

Άσκηση 3.2

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4.$$

Απ. Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ xy - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y(x - 1) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{συνεπώς } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$P_1(0,0), \quad P_2(2,0), \quad P_3(1,1), \quad P_4(1,-1).$$

$$\text{Υπολογίζουμε τις } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y.$$

$$\text{Οπότε } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6 \quad \Delta_2 = [(6x - 6)(6x - 6) - (6y)^2] = 36[(x - 1)^2 - y^2].$$

$$\text{Στο } P_1(0,0) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = -6 < 0, \quad \Delta_2 = 36 > 0, \quad \text{άρα έχουμε τ.μ.}$$

$$f_{\max} = f(P_1) = 4.$$

$$\text{Στο } P_2(2,0) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = -6 > 0, \quad \Delta_2 = 36 > 0, \quad \text{άρα έχουμε τ.ε.}$$

$$f_{\min} = f(P_2) = 0.$$

$$\text{Στο } P_3(1,1) \text{ είναι } \Delta_2 = -36 < 0, \text{ άρα έχουμε δεν έχουμε ακρότατο.}$$

$$\text{Στο } P_4(1,-1) \text{ είναι } \Delta_2 = -36 < 0, \text{ άρα έχουμε δεν έχουμε ακρότατο.}$$