

Άσκηση 3.1

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2(1 - x) - y^2(1 + x).$$

Απ. Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x(2 - 3x) - y^2 = 0 \\ 2y(1 + x) = 0 \end{array} \right\} \text{ άρα τα κρίσιμα σημεία είναι: } P_1(0, 0) \text{ και } P_2\left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

$$\text{Υπολογίζουμε τις } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(1 + x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y.$$

Για το $P_1(0, 0)$ έχουμε

$$\Delta_2 = \left\{ (2 - 6x)[-2(1 + x)] - (-2y)^2 \right\} \Big|_{P_1} = -4 < 0.$$

Άρα η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο P_1 .

Για το $P_2\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ έχουμε

$$\Delta_2 = \left\{ (2 - 6x)[-2(1 + x)] - (-2y)^2 \right\} \Big|_{P_2} = (-2) \left[\frac{-10}{3} \right] = \frac{20}{3} > 0 \quad \text{και} \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_2} = -2 < 0.$$

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο P_2 και $f_{\max} = f(P_2) = \frac{4}{27}.$