ΚΕΦ. 6 : ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Δ.6.1[1]

Οι Διαφορικές Εξισώσεις (ΔΕ) είναι εξισώσεις που περιέχουν μία άγνωστη συνάρτηση μίας μεταβλητής και παραγώγους αυτής.

Οι Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (ΔΕΜΠ) είναι εξισώσεις που περιέχουν μία άγνωστη συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών και μερικές παραγώγους αυτής.

Ένα φυσικό μέγεθος που εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τις μεταβλητές $x, y, z, \ldots$ και το χρόνο t, συνήθως διέπεται από μία ΔΕΜΠ. Μία ΔΕΜΠ είναι η μαθηματική διατύπωση των νόμων, που περιγράφουν ένα φυσικό φαινόμενο.

Παραδ. Ν.δ.ο. οι συναρτ. (α) $u=(x-y)^n$ και (β) $u=f(x-y)$, όπου f αυθαίρετη συναρτ., είναι λύσεις της ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Απ. (α) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=n(x-y)^{n-1}+\left[-n(x-y)^{n-1}\right]=0.$

(β) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(x-y)+(-1)\cdot f'(x-y)=0.$ $\square$

Δ.6.1.[2]

Η γενική μορφή μιας ΔΕΜΠ είναι

$$F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz}, u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xxz}, \dots) = 0, \quad (1)$$

όπου $u = u(x, y, z)$ άγνωστη συνάρτηση.

Δ

<u>Τάξη</u> της ΔΕΜΠ (1) ονομάζεται η τάξη της ανώτερης μερικής παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτή.

Η ΔΕΜΠ (1) ονομάζεται <u>γραμμική ΔΕΜΠ</u>, αν η F είναι γραμμικός συνδυασμός της άγνωστης συνάρτησης u και των μερικών της παραγώγων με συντελεστές συναρτήσεις των x, y, z.

Η ΔΕΜΠ (1) ονομάζεται <u>ημιγραμμική ΔΕΜΠ</u>, αν η F είναι γραμμικός συνδυασμός των μερικών παραγώγων της u, με συντελεστές την άγνωστη συνάρτηση u και συναρτήσεις των x, y, z.

Π.χ. οι παρακάτω ΔΕΜΠ

$$(\alpha)\quad 4u_x - u_z = 3u_y + x^2 - yz$$

$$(\beta)\quad u_{xx} + u_{yy} = xy^2$$

$$(\gamma)\quad 2xy\, u_{xy} + z u_y = u$$

Είναι γραμμικές ΔΕΜΠ (η (α) $1^{ης}$ τάξης και οι (β), (γ) $2^{ης}$ τάξης) ενώ η ΔΕΜΠ

$$(\delta)\quad u_{xy} + 2u\, u_x + z u_y = 0$$

Είναι ημιγραμμική ΔΕΜΠ $2^{ης}$ τάξης.

Η γενική μορφή μιας γραμμικής ΔΕΜΠ $2^{ης}$ τάξης είναι

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{xy} + a_3 u_{xz} + a_4 u_{yy} + a_5 u_{yz} + a_6 u_{zz} + a_7 u_x + a_8 u_y + a_9 u_z + a_{10} u = f(x,y,z) \quad (2)$$

όπου $u = u(x,y,z)$ είναι η αγνωστη συναρτηση και οι

συντελεστές $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ και η f είναι συναρτήσεις των x, y, z.

Δ

Ορ. Εστω η γραμμική ΔΕΜΠ (2).

Αν $f(x,y,z) = 0$, τότε η (2) καλείται ομογενής.

Αν $f(x,y,z) \neq 0$, τότε η (2) καλείται μη-ομογενής.

Ετσι οι ΔΕΜΠ (α) και (β) είναι μη ομεγενεις ενώ η (γ)

είναι ομογενής. Η (δ) δεν είναι καν γραμμική.

Ασκ. Να βρεθεί μια λύση της ΔΕΜΠ

$$u_x = 3x^2 + y. \quad (3)$$

Απ. Ολοκληρώνοντας ως προς x, αμφότερα τα μέλη, προκύπτει

$$u = x^3 + xy + f(y) \quad (4)$$

όπου $f = f(y)$ αυθαίρετη συνάρτηση. $\square$

Ασκ. Να βρεθεί μια λύση της ΔΕΜΠ

$$u_{xy} = y + z. \quad (5)$$

Απ. Ολοκληρώνοντας ως προς y προκύπτει

$$u_x = \frac{1}{2}y^2 + yz + f_1(x,z). \quad (6)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x προκύπτει

$$u = \frac{1}{2}xy^2 + xyz + \int^x f_1(s,z)ds + f_2(y,z)$$

Θέτοντας $f(x,z) = \int^x f_1(s,z)ds$, $g(y,z) = f_2(y,z)$ προκύπτει

$$u = \frac{1}{2}xy^2 + xyz + f(x,z) + g(y,z). \quad (6) \ \square$$

Οι (4) και (6) ονομάζονται γενική λύση των ΔΕΜΠ (3) και (5) αντιστοίχως. Η αντικατάσταση των αυθαίρετων συναρτήσεων στις (4) και (6) με συγκεκριμένες συναρτήσεις μας δίνει μια μερική λύση των ΔΕΜΠ (3) και (5).

Π.χ. η $u = x^3 + xy + 4\cos^2 y$ είναι μερική λύση της (3)

και η $u = \frac{1}{2}xy^2 + xyz + e^{xz} + 3yz^2$ είναι μερική λύση της (4).

Η γενική λύση μιας γραμμικής ΔΕΜΠ τάξης n για μια άγνωστη συνάρτηση εξαρτώμενη από s μεταβλητές, περιλαμβάνει n αυθαίρετες συναρτήσεις καθε μια εκ των οποίων εξαρτάται από s-1 μεταβλητές.

Παραδ. Στη Θεωρία ελαστικότητας η συνάρτηση της τάσης Φ του Airy ικανοποιεί τη ΔΕΜΠ $\Phi_{xxxx} + 2\cdot\Phi_{xxyy} + \Phi_{yyyy} = 0$. Η εν λόγω ΔΕΜΠ είναι ομογενής γραμμική ΔΕΜΠ $4^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές. □

<u>Άσκ.</u> Αν $u=u(x,y)$, τότε να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕΜΠ

α) $u_{xx}=0$

β) $u_{yy}=\cos y+e^x$

γ) $u_{xy}=\cos y+e^y$

<u>Απ.</u> α)

$$u_{xx}=0 \Rightarrow$$
$$u_x=f(y) \Rightarrow$$
$$u=xf(y)+g(y).$$

β)

$$u_{yy}=\cos y+e^x \Rightarrow$$
$$u_y=\sin y+ye^x+f(x) \Rightarrow$$
$$u=-\cos y+\frac{y^2}{2}e^x+yf(x)+g(x).$$

γ)

$$u_{xy}=\cos y+e^y \Rightarrow$$
$$u_x=\sin y+e^y+f_1(x) \Rightarrow$$
$$u=x\sin y+xe^y+\int^x f_1(s)ds+g(y) \Rightarrow$$
$$u=x\sin y+xe^y+f(x)+g(y).$$

$\square$

<u>Άσκ.</u> Αν $u=u(x,y,z)$, τότε να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕΜΠ

α) $u_{yz}=x$

β) $u_{xxy}=0$

γ) $u_{zz}=y+3x$

δ) $u_{xyz}=2$.

<u>Απ.</u> α) $u_{yz}=x \Rightarrow$

$$u_y = xz + f_1(x,y) \Rightarrow$$

$$u = xyz + \int^y f_1(x,s)ds + g(x,z) \Rightarrow$$

$$u = xyz + f(x,y) + g(x,z).$$

β) $u_{xxy}=0 \Rightarrow$

$$u_{xx} = f_1(x,z) \Rightarrow$$

$$u_x = \int^x f_1(s,z)ds + g(y,z) \Rightarrow$$

$$u_x = f_2(x,z) + g(y,z) \Rightarrow$$

$$u = \int^x f_2(s,z)ds + x\cdot g(y,z) + h(y,z) \Rightarrow$$

$$u = f(x,z) + x\cdot g(y,z) + h(y,z).$$

γ) $u_{zz} = y+3x \Rightarrow$

$$u_z = yz + 3xz + f(x,y) \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{2}yz^2 + \frac{3}{2}xz^2 + z\cdot f(x,y) + g(x,y).$$

δ) $u_{xyz}=2 \Rightarrow$

$$u_{xy} = 2z + f_1(x,y) \Rightarrow$$

$$u_x = 2yz + \int^y f_1(x,s)ds + g_1(x,z) \Rightarrow$$

$$u_x = 2yz + f_2(x,y) + g_1(x,z) \Rightarrow$$

$$u = 2xyz + \int^x f_2(s,y)ds + \int^x g_1(s,z)ds + h(y,z) \Rightarrow$$

$$u = 2xyz + f(x,y) + g(x,z) + h(y,z).$$

$\square$

* Γραμμικές ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = f(x,y)$ με σταθερούς συντελεστές.

Η γενική μορφή μιας ΔΕΜΠ με σταθερούς συντελεστές

$$F(D_x, D_y)\,z = f(x,y) \tag{1}$$

όπου F πολυώνυμο των D_x και D_y και f δοθείσα συνάρτηση.

Παραδ. Να βρεθεί η ΔΕΜΠ που έχει λύση τη συνάρτηση

$$z = ax^2 + bxy + \gamma y^2, \quad a, b, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Απ. Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση z ως προς x και ως προς y, προκύπτουν:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + by \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = bx + 2\gamma y.$$

Οπότε

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2ax^2 + bxy + byx + 2\gamma y^2 \Rightarrow$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2(ax^2 + bxy + \gamma y^2) \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z \qquad \square$$

η οποία είναι η ζητούμενη ΔΕΜΠ.

Παράδ. Να βρεθεί η ΔΕΜΠ που έχει λύση τη συνάρτηση

$$z = f(x+3y) + g(x-3y).$$

όπου f και g αυθαίρετες συναρτ. των $x+3y$ και $x-3y$, αντίστοιχα.

Απ. Θέτοντας $x+3y=u$ και $x-3y=v$, βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 3\cdot f'(u) - 3\cdot g'(v)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{df'}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dg'}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 3\frac{df'}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - 3\frac{dg'}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 9f''(u) + 9g''(v)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Είναι η ζητούμενη ΔΕΜΠ, δηλ. η ΔΕΜΠ που έχει λύση τη συναρτ.

$$z = f(x+3y) + g(x-3y).$$

□

Δ.6.2_Ομογενείς_ΔΕΜΠ

Έστω η ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = 0$.

Αν η χαρακτηριστική εξίσωσή της $F(\omega,1) = 0$, έχει ρίζες $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, τότε $F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y)\ldots(D_x - \omega_n D_y)z = 0$.

1) Αν $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \ldots \neq \omega_n$, τότε η ΔΕΜΠ έχει λύση την

$$\boxed{z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \ldots + \varphi_n(y + \omega_n x)}.$$

2) Αν $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k \neq \omega_{k+1} \neq \ldots \neq \omega_n$, τότε η λύση είναι

$$\boxed{\begin{aligned} &z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x\varphi_2(y + \omega_1 x) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1} x) \\ &+ \ldots + \varphi_n(y + \omega_n x). \end{aligned}}$$

3) Αν $\omega_1 = a + \beta i$, $\omega_2 = a - \beta i$, τότε η αντίστοιχη λύση είναι

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_1\left[y + (a + i\beta)x\right] + \varphi_1\left[y + (a - i\beta)x\right] \\ &+ i\left\{\varphi_2\left[y + (a + i\beta)x\right] + \varphi_2\left[y + (a - i\beta)x\right]\right\}. \end{aligned}}$$

όπου c_i είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις των x και y.

Μια ανάλογη έκφραση (όπως στην περίπτωση (2)) μπορεί να διατυπωθεί, αν οι μιγαδικές ρίζες είναι πολλαπλές (διπλές, τριπλές κ.λπ.).

Τέλος οι καμπύλες

$$y+\omega_1 x = c_1, \quad y+\omega_2 x = c_2, \quad \dots, \quad y+\omega_n x = c_n$$

λέγονται χαρακτηριστικές καμπύλες της ΔΕΜΠ.

Άσκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\omega^2 - \omega - 6 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_1 = -2$ και $\omega_2 = 3$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕΜΠ είναι η

$$z = \varphi_1(y-2x) + \varphi_2(y+3x).$$

□

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0.$$

Απ. Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_x-D_y)\cdot(D_x+2D_y)^2=0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$(\omega-1)\cdot(\omega+2)^2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_1=1$ και $\omega_2=\omega_3=-2$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z=\varphi_1(y+x)+\varphi_2(y-2x)+x\cdot\varphi_3(y-2x)$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Απ. Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$D_x^2 - 2D_xD_y + 5D_y^2 = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$\omega^2 - 2\omega + 5 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_1 = 1-2i$, $\omega_2 = 1+2i$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \varphi_1(y+x-2ix) + \varphi_1(y+x+2ix) + i\left[\varphi_2(y+x-2ix) + \varphi_2(y+x+2ix)\right].$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} + 5\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} - 4\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} + 4\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0.$$

Απ. Είναι $D_x^4 - 4D_x^3 D_y + 5D_x^2 D_y^2 - 4D_x D_y^3 + 4D_y^4 =$

$$\underbrace{D_x^4 - 4D_x^3 D_y + 4D_x^2 D_y^2}\overbrace{}+ \underbrace{D_x^2 D_y^2 - 4D_x D_y^3 + 4D_y^4} =$$

$$(D_x^2 - 2D_x D_y)^2 + (D_x D_y - 2D_y^2)^2 =$$

$$D_x^2 (D_x - 2D_y)^2 + D_y^2 (D_x - 2D_y)^2 =$$

$$(D_x - 2D_y)^2 (D_x^2 + D_y^2)$$

Οπότε

$$(\omega - 2)^2 \cdot (\omega^2 + 1) = 0$$

Δηλ. οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\omega_{1,2} = 2$, $\omega_{3,4} = \pm i$.

Άρα

$$z = \varphi_1(y+2x) + x\varphi_2(y+2x) + \varphi_3(y+ix) + \varphi_3(y-ix) + i\left[\varphi_4(y+ix) + \varphi_4(y-ix)\right].$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}-\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

Απ. Έχουμε

$$\left(D_x^3+D_x^2D_y-D_xD_y^2-D_y^3\right)z=0 \Rightarrow$$

$$\left[D_x^2(D_x+D_y)-D_y^2(D_x+D_y)\right]z=0 \Rightarrow$$

$$\left[(D_x+D_y)(D_x^2-D_y^2)\right]z=0 \Rightarrow$$

$$\left[(D_x+D_y)(D_x+D_y)(D_x-D_y)\right]z=0 \Rightarrow$$

$$\left[(D_x+D_y)^2(D_x-D_y)\right]z=0.$$

Οπότε

$$(\omega+1)^2(\omega-1)=0.$$

Οι ρίζες της παραπάνω χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $\omega_{1,2}=-1$, $\omega_3=1$.

Άρα

$$z=\varphi_1(y-x)+x\varphi_2(y-x)+\varphi_3(y+x).$$

Β' Τρόπος Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕΜΠ είναι

$$\omega^3+\omega^2-\omega-1=0.$$

Δοκιμαστικά, ελέγχουμε την τιμή $\omega=1$ και διαπιστώνουμε ότι είναι ρίζα.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Οπότε έχουμε $\omega^3+\omega^2-\omega-1=0 \Rightarrow$

$(\omega-1)(\omega^2+2\omega+1)=0 \Rightarrow$

$(\omega-1)(\omega+1)^2=0 \Rightarrow$

$\omega_{1,2}=-1 \quad \omega_3=1$

Γ' Τρόπος Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί εναλλακτικά να παραγοντοποιηθεί ως εξής

$$\omega^3+\omega^2-\omega-1=\omega^3-\omega^2+2\omega^2-\omega-1=\omega^2(\omega-1)+2\omega^2-\omega-1=$$

$$=\omega^2(\omega-1)+2\omega^2-2\omega+\omega-1=\omega^2(\omega-1)+2\omega(\omega-1)+\omega-1=$$

$$=(\omega-1)(\omega^2+2\omega+1)=(\omega-1)(\omega+1)^2=0 \Rightarrow \omega_{1,2}=-1,\ \omega_3=1.$$

$\square$

A1) ΑΝΑΛΥΣΙΜΕΣ ΔΕΜΠ

Έστω η αναλύσιμη ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1)(a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2)\ldots(a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0$$

όπου όλοι οι παράγοντες είναι διάφοροι μεταξύ τους.

Τότε σε κάθε παράγοντα $(a_i D_x + \beta_i D_y + \gamma_i)$ αντιστοιχεί η λύση

$$\boxed{z = e^{-\frac{\gamma_i}{a_i}x}\varphi(a_i y - \beta_i x),\ \text{αν } a_i \neq 0 \quad \text{ή} \quad z = e^{-\frac{\gamma_i}{\beta_i}y}\varphi(a_i y - \beta_i x),\ \text{αν } \beta_i \neq 0.}$$

και η γενική λύση θα είναι το άθροισμα όλων αυτών των παραστάσεων.

Αν υπάρχουν επαναλαμβανόμενοι παράγοντες, π.χ. ο $(a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1)^k$, τότε το αντίστοιχο μέρος της λύσης θα είναι το

$$\boxed{e^{-\frac{\gamma_1}{a_1}x}\left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x\varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \ldots + x^{k-1}\varphi_k(a_1 y - \beta_1 x)\right]}.$$

A2) ΜΗ ΑΝΑΛΥΣΙΜΕΣ ΔΕΜΠ

Έστω η μη αναλύσιμη ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = 0$. Τότε η λύση της δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y}}$$

όπου $F(a_i, \beta_i) = 0$, αρκεί η σειρά να συγκλίνει.

* Αναλύσιμες ΔΕΜΠ

Παραδ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}+2z\right)^2=0.$$

Απ. Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_x+2D_y)(D_x+2D_y+1)(D_x+2D_y+2)^2 z=0.$$

Στον ομογενή παράγοντα D_x+2D_y αντιστοιχεί η λύση $\varphi_1(y-2x)$.

〃 αναλύσιμο 〃 D_x+2D_y+1 〃 〃 〃 $e^{-x}\varphi_2(y-2x)$.

〃 αναλύσιμο 〃 $(D_x+2D_y+2)^2$ 〃 〃 〃 $e^{-2x}\left[\varphi_3(y-2x)+x\varphi_4(y-2x)\right]$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z=\varphi_1(y-2x)+e^{-x}\varphi_2(y-2x)+e^{-2x}\left[\varphi_3(y-2x)+x\varphi_4(y-2x)\right].$$

□

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} - z\right) = 0.$$

Απ. Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_x D_y + 2D_y^2)(D_x - 2D_y - 1)z = 0 \Rightarrow$$

$$D_y(D_x + 2D_y)\cdot(D_x - 2D_y - 1)z = 0.$$

Στον αναλύσιμο παράγοντα D_y αντιστοιχεί η λύση $\varphi_1(-x)$

-"- ομογενή -"- $D_x + 2D_y$ -"- -"- -"- $\varphi_2(y-2x)$

-"- αναλύσιμο -"- $D_x - 2D_y - 1$ -"- -"- -"- $e^x\varphi_3(y+2x)$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \varphi_1(-x) + \varphi_2(y-2x) + e^x\varphi_3(y+2x). \qquad \square$$

* Μη αναλύσιμες ΔΕΜΠ

Παραδ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Απ. Η ΔΕΜΠ αναλύεται ως εξής:

$$F(D_x, D_y) = D_x^3 - 2D_xD_y^2 - D_x^2D_y^2 + D_y^4 + D_y^3 + D_x^2 - D_xD_y = (D_x - D_y^2)^2 + D_x^3 - D_x^2D_y^2 + D_y^3 - D_xD_y =$$

$$= (D_x - D_y^2)^2 + D_x^2(D_x - D_y^2) - D_y(D_x - D_y^2) = (D_x - D_y^2)\left[D_x - D_y^2 + D_x^2 - D_y\right] =$$

$$= (D_x - D_y^2)\left[D_x^2 - D_y^2 + D_x - D_y\right] = (D_x - D_y^2)\left[(D_x + D_y)(D_x - D_y) + D_x - D_y\right] =$$

$$= (D_x - D_y^2)\left[(D_x - D_y)(D_x + D_y + 1)\right] = (D_x - D_y)(D_x + D_y + 1)(D_x - D_y^2).$$

Στον ομογενή παράγοντα $D_x - D_y$ αντιστοιχεί η λύση $\varphi_1(y+x)$

-//- αναλύσιμο -//- $D_x + D_y + 1$ -//- -//- -//- $e^{-x}\varphi_2(y-x)$

-//- μη αναλύσιμο -//- $D_x - D_y^2$ -//- -//- -//- $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\beta_i^2 x + \beta_i y}$

όπου $F(\alpha_i ; \beta_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i - \beta_i^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i^2$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \varphi_1(y+x) + e^{-x}\varphi_2(y-x) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\beta_i^2 x + \beta_i y},$$

όπου $\beta_i \in \mathbb{R}$. $\square$

B) ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΕΜΠ

Θεωρούμε τη μη ομογενή ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = f(x, y).$$

Τότε η γενική λύση αυτής θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ $F(D_x, D_y)z = 0$ συν μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς ΔΕΜΠ.

Για την εύρεση μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)...(D_x - \omega_n D_y)z = f(x, y)$$

λύνουμε διαδοχικά την αλυσίδα των ΔΕΜΠ

$$(D_x - \omega_n D_y)u_1 = f(x, y)$$

$$(D_x - \omega_{n-1} D_y)u_2 = u_1$$

$$.....$$

$$(D_x - \omega_1 D_y)z = u_{n-1}$$

ξεκινώντας από την πρώτη και καταλήγοντας στην τελευταία, από την οποία βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση z.

<u>Πρόταση</u> Έστω η μη ομογενής γραμμική ΔΕΜΠ

$$\left(D_x - \omega D_y\right)u = f(x,y).$$

Τότε μία μερική λύση της, είναι η:

$$\boxed{u = \int f(x, a - \omega x)dx}$$

στην οποία, μετά την ολοκλήρωση, αντικαθιστούμε το α με $y+\omega x$.

* Μη ομογενείς ΔΕΜΠ

Παραδ. Να λυθεί η μη ομογενής ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(2x+y).$$

Απ. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕΜΠ

$$(D_x + 3D_y)z = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\omega + 3 = 0 \Rightarrow \omega = -3$, και λύση

$$\varphi(y-3x).$$

Για να βρούμε μία μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$(D_x + 3D_y)z = \cos(2x+y)$$

Έχουμε

$$z = \int \cos(2x + \overbrace{a+3x}^{y})\,dx$$

$$= \int \cos(5x+a)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+a)$$

$$= \frac{1}{5}\sin(5x+y-3x)$$

Οπότε βρήκαμε τη μερική λύση

$$\frac{1}{5}\sin(2x+y).$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \underbrace{\varphi(y-3x)}_{\substack{\text{γενική λύση}\\ \text{ομογενούς ΔΕ}}} + \underbrace{\frac{1}{5}\sin(2x+y)}_{\substack{\text{μερική λύση}\\ \text{μη ομογενούς ΔΕ}}}.$$

$\square$

6.30

Άσκ. Να λυθεί η μη-ομογενής ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = (y-1)e^{3x}$$

Απ. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ

$$(D_x - 2D_y)z = 0$$

είναι

$$\varphi(y+2x)$$

γιατί απ' τη χαρακτηριστική εξίσωση $\omega - 2 = 0$ βρίσκουμε $\omega_1 = 2$.

Για να βρούμε μία μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕΜΠ

$$(D_x - 2D_y)z = (y-1)e^{3x}$$

λύνουμε τη ΔΕ

$$z = \int f(x, \overbrace{a-\omega x}^{y})\, dx = \int (\overbrace{a-2x}^{y}-1)e^{3x}\, dx$$

$$= \int (a-1)e^{3x}\, dx - 2\int xe^{3x}\, dx = \frac{a-1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(xe^{3x} - \int e^{3x}\, dx\right)$$

$$= \frac{a-1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} = \frac{y+2x-1}{3}e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{3x}$$

$$= \frac{3y+6x-3+2}{9}e^{3x} - \frac{2}{3}xe^{3x} = \frac{3y+\cancel{6x}-3+2-\cancel{6x}}{9}e^{3x} = \frac{3y-1}{9}e^{3x}.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \varphi(y+2x) + \frac{3y-1}{9}e^{3x} \Rightarrow z = \varphi(y+2x) + \frac{y}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}.$$

□

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x+y.$$

Απ. Από τη χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ

$$(D_x^2 - D_x D_y - 6D_y)z = 0$$

$$\omega^2 - \omega - 6 = 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες $\omega_1 = -2$ και $\omega_2 = 3$.
Για να βρούμε μία μερική λύση της ΔΕΜΠ λύνουμε την αλυσίδα των ΔΕ

$$(D_x + 2D_y)\,u_1 = x+y \qquad (i)$$

$$(D_x - 3D_y)\,z = u_1 \qquad (ii)$$

(i) $\rightsquigarrow$ $u_1 = \int (x + \underbrace{a+2x}_{y})\,dx = \int (3x+a)\,dx = \frac{3x^2}{2} + ax = \frac{3x^2}{2} + (y-2x)x =$

$$= \frac{3x^2}{2} + xy - 2x^2 = xy - \frac{1}{2}x^2.$$

(ii) $\mapsto$ $z = \int \left[x(\underbrace{a-3x}_{y}) - \frac{1}{2}x^2\right]dx = \int \left(ax - \frac{7}{2}x^2\right)dx = a\frac{x^2}{2} - \frac{7}{2}\frac{x^3}{3} =$

$$= \frac{y+3x}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3.$$

Άρα η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕΜΠ $(D_x^2 - D_xD_y - 6D_y^2)z = 0$ είναι $\varphi_1(y-2x) + \varphi_2(y+3x)$ και επομένως η ζητούμενη λύση είναι

$$z = \varphi_1(y-2x) + \varphi_2(y+3x) + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3.$$

□