

ΚΕΦ 4

ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Οφ. Έστω $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, διανυσματική συνάρτηση, όπου $U \subset \mathbb{R}^n$.

Μια συνάρτηση $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και τ.ω. $F = \nabla \varphi$
ονομάζεται δυναμική συνάρτηση της F .

Θα επιχειρήσουμε να δώσουμε απάντηση σε δύο προβλήματα:
την ύπαρξη και τη μοναδικότητα δυναμικών συναρτήσεων.

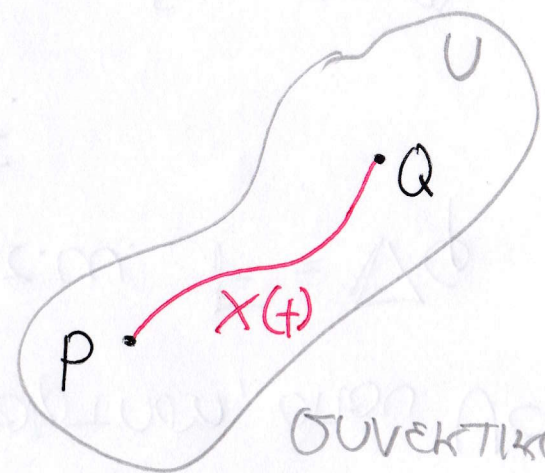
Θα ασχοληθούμε, αρχικά, με το πρόβλημα της
μοναδικότητας ξεκινώντας με έναν ορισμό.

Οφ. Ένα ανοικτό υποσύνολο U ενός n -χώρου λέγεται συνεκτικό ή περίωχη, αν $\forall P, Q \in U$, υπάρχει διαφορίσιμη καμπύλη $X(t)$ τ.ω. για κάποια t_1, t_2 να ισχύει

$$X(t_1) = P, \quad X(t_2) = Q$$

και για όλα τα $t \in (t_1, t_2)$ να ισχύει

$$X(t) \in U.$$



Θεωρ. Έστω U συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και φ_1, φ_2 δύο διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις στο U . Αν

$$\nabla \varphi_1(x) = \nabla \varphi_2(x), \quad \forall x \in U$$

τότε υπάρχει σταθερά c ,
τ.ω.

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + c, \quad \forall x \in U.$$

Με άλλα λόγια, αν υπάρχει δυναμική συνάρτ., τότε είναι μοναδική (κατά προσέγγιση σταθεράς c).

Αναφορικά, με το πρόβλημα της υπάρξης, θα χρησιμοποιούμε τα επόμενα δύο θεωρήματα.

Θεωρ. Έστω f, g δύο διαφορετικές
πραγματικές συναρτ. με συνεχείς
μερικές παραχώδους, που ορίζονται
σε ένα ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^2$.
Αν.

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x},$$

τότε η διανυσμ. συνάρτηση

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

δεν έχει μιαν δυναμική συναρτ.

Παράρ. Έστω

$$F(x, y) = (\underbrace{x^2 y}_f, \underbrace{\sin xy}_g)$$

Ορίσαμε τις

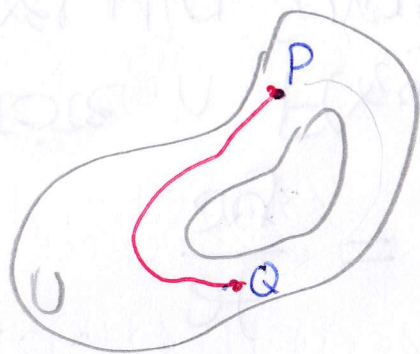
$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y \\ g(x, y) &= \sin xy \end{aligned} \right\} \text{ Τότε}$$

παρατηρούμε ότι

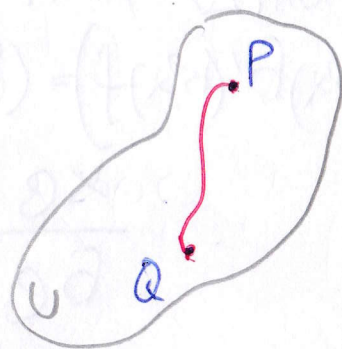
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = y \cos xy$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x},$$

που σημαίνει ότι η F
δεν έχει δυναμική συναρτ. $\square$



ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ



απλώς συνεκτικό

Ορ. Ένα σύνολο U λέγεται απλώς συνεκτικό, όταν ισχύει ότι κάθε κλειστή καμπύλη, που περιέχεται στο U , μπορεί να συρρικνωθεί με συνεχή τρόπο σε ένα σημείο του U .

Μερικά παραδείγματα απλώς συνεκτικών συνόλων είναι ο $\mathbb{R}^2$, ένας ανοικτός κυκλικός δίσκος, το εσωτερικό ενός ορθογωνίου κ.α...

Θεωρ. Έστω U ανοικτό
αγκυρσμένο συνεκτικό υποσύνολο
του $\mathbb{R}^2$ και f, g δύο διαφο-
ρίσιμες πραγματικές συναρτ.
που ορίζονται στο U .

Αν οι $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial g}{\partial x}$ είναι

συνεχείς και ίσες, δηλ.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

τότε η $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$
έχει μία δυναμική συνάρτ.

Παραδ. Εξετάσουμε αν η
 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = (\underbrace{e^{xy}}_f, \underbrace{e^{x+y}}_g)$
έχει μία δυναμική συνάρτ.

Ορίζουμε τις

$$\begin{cases} f(x, y) = e^{xy} \\ g(x, y) = e^{x+y} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Αρα $\frac{\partial f}{\partial y} \neq \frac{\partial g}{\partial x}$

που σημαίνει ότι η F
δεν έχει δυναμική συνάρτ. $\square$

Ασκ Έστω η διανυσματική συνάρτηση

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (\underbrace{2xy}_f, \underbrace{x^2 + 3y^2}_g)$$

Να εξεταστεί αν η F έχει δυναμική συνάρτηση και αν ναι, τότε να υπολογιστεί.

Απ. Ορίζουμε $f(x, y) = 2xy$, $g(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, δηλ. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Επίσης το πεδίο ορισμού της F είναι το $\mathbb{R}^2$, το οποίο

είναι απλώς συνεκτικό σύνολο. Άρα η F έχει δυναμική συνάρτηση.

Για να υπολογίσουμε τη δυναμική αναρ. φ , εργαζόμαστε ως εξής:

Έχουμε

$$\begin{aligned} F = (f, g) \\ \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} F = \nabla \varphi \\ \Rightarrow \end{aligned} \right. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

Αν' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, y)$ προκύπτει $\varphi(x, y) = \int f(x, y) dx + u(y)$
 $= \int 2xy dx + u(y) = x^2 y + u(y).$

Αν' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g(x, y)$ προκύπτει $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + u(y)) = x^2 + 3y^2 \Rightarrow$
 $\underline{x^2} + u'(y) = \underline{x^2} + 3y^2 \Rightarrow u'(y) = 3y^2 \Rightarrow u(y) = y^3 + c.$

Άρα η ζητούμενη δυναμική αναρτησιμότητα είναι η $\varphi(x, y) = x^2 y + y^3 + c.$ □

* ΕΠΙΚΑΜΠΥΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω εικόνη $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση με συνιστώσες

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

Αν

$$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι μία διαφορίσιμη καμπύλη και οι παράγωγοί της είναι συνεχείς, τότε ορίζεται

ότι το $F(c(t)) \cdot \dot{c}(t)$ είναι ολοκληρώσιμο στο $[a, b]$.

Το ολοκλήρωμα αυτού του εσωτερικού γινομένου ορίζει το επικαμπύσιο

ολοκλήρωμα της F

κατά μήκος της καμπύλης c ως

$$\int_c F = \oint_c F dc = \int_a^b F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt$$

Παράδειγμα Έστω

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x^2 y, y^3)$$

Να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F κατά

μήκος της ευθείας, η οποία
εκτείνει την αρχή των αξόνων
(0,0) με το σημείο (1,1).

Αν θεωρούμε ως καμπύλη
την ευθεία που εκτείνει την
αρχή των αξόνων (0,0) με
το σημείο (1,1) και αντιστοίχως

θα έχει την παραμετρική μορφή
 $c(t) = (t, t), t \in [0, 1]$.

Οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
της F κατά μήκος της $c(t)$, θα είναι

$$\int_C F = \int_0^1 F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 t, t^3) \cdot (1, 1) dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + t^3) dt$$

$$= 2 \int_0^1 t^3 dt$$

$$= 2 \left[\frac{t^4}{4} \right]_{t=0}^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

* Όταν μια καμπύλη δίνεται υπό τη μορφή $y = f(x)$

τότε μπορεί να εκφραστεί και με την παραμετρική ελλο.

$$x = t$$

$$y = f(t)$$

Π.χ. η $y = x^2$ γραφεται και με την παραμετρική μορφή $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

* Παραμετρική εξίσωση κύκλου $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$

* Παραμετρική εξίσωση ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το σημείο $P(x_p, y_p)$ με το σημείο $Q(x_q, y_q)$:

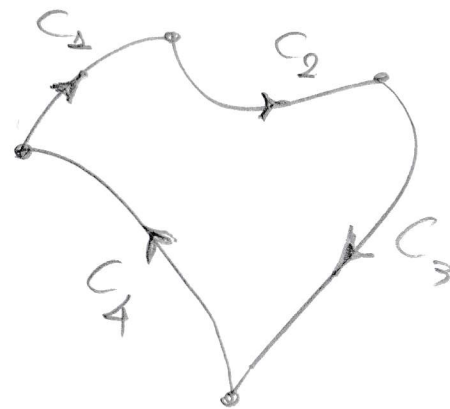
$$\begin{cases} x = x_p + t(x_q - x_p) \\ y = y_p + t(y_q - y_p) \end{cases}$$

Ορ. Όταν έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο διαφορίσιμων καμπυλών $C_1, C_2, \dots, C_n$ τέτοιων ώστε το τελικό σημείο κάθε μιας να συμπίπτει με το αρχικό σημείο της επόμενης, τότε αναφερόμαστε σε μια διαδρομή c και ισχύει ότι

$$\int_c F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + \dots + \int_{C_n} F.$$



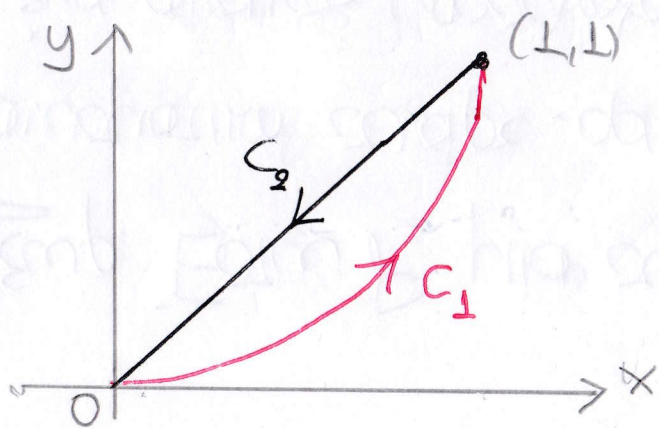
Ορ. Μια διαδρομή c λέγεται κλειστή, όταν το αρχικό σημείο της 1^{ης} καμπύλης C_1 και το τελικό σημείο της τελευταίας καμπύλης C_n , ταυτίζονται



Παράδ. Έστω

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x,y) = (x^2, xy)$$

και έστω επίσης η κλειστή
διαδρομή που αποτελείται
από το τμήμα της παραβολής
 $y=x^2$ μεταξύ των $(0,0)$ και $(1,1)$
και το ευθύ τμήμα μεταξύ
των σημείων $(1,1)$ και $(0,0)$.



4.13

Να βρεθεί το $\int_C F$ κατά μήκος
της κλειστής αυτής διαδρομής

Απ. Η διαδρομή μας θα αποτελεστεί
από τις καμπύλες

$$C_1: C_1(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$$

$$C_2: C_2(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

$$\text{Άρα } \int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F$$

$$= \int_0^1 (t^2, tt^2) \cdot (1, 2t) dt +$$

$$+ \int_0^1 ((1-t)^2, (1-t)(1-t)) \cdot (-1, -1) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^3) dt - 2 \int_0^1 (1 - 2t + t^2) dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^4}{4} \right]_0^1 - 2 \left[t - 2 \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{15} \quad \square$$

Θεωρ. Έστω F μια συνεχής
 διανυσματική συνάρτ. ορισμένη
 σε ένα ανοικτό υποσύνολο U
 του $\mathbb{R}^n$. Αν υπάρχει μια
 διαφορίσιμη συνάρτ. φ στο U
 τ.ω. $\nabla \varphi$ να
 είναι δυναμική συνάρτ.-της F
 τότε για κάθε συνεχώς διαφορί-
 σιμη καμπύλη ή διαδρομή c
 στο U , που ενώνει τα σημεία
 P και Q του U , έχουμε

$$\int_P^Q F = \varphi(Q) - \varphi(P).$$

Παρατ. Το επικαμπύλιο
 ολοκλήρωμα μιας διανυσμ.
 συνάρτησης F είναι ανεξάρτητο
 από την καμπύλη ή τη διαδρομή
 κατά μήκος της οποίας ορίζεται,
 όταν η F έχει δυναμική συνάρτ.
Παρατ. Για κάθε κλειστή
 διαδρομή c έχουμε

$$\int_c F = 0$$

 όταν η F έχει δυναμική συνάρτ.

Παράδειγμα Έστω $F: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη c με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \int_c F &= \int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Ενν. το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι διάφορο του μηδενός, αφού παρόλο

που $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, το $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ δεν είναι απλώς συνεκτικό σύνολο.

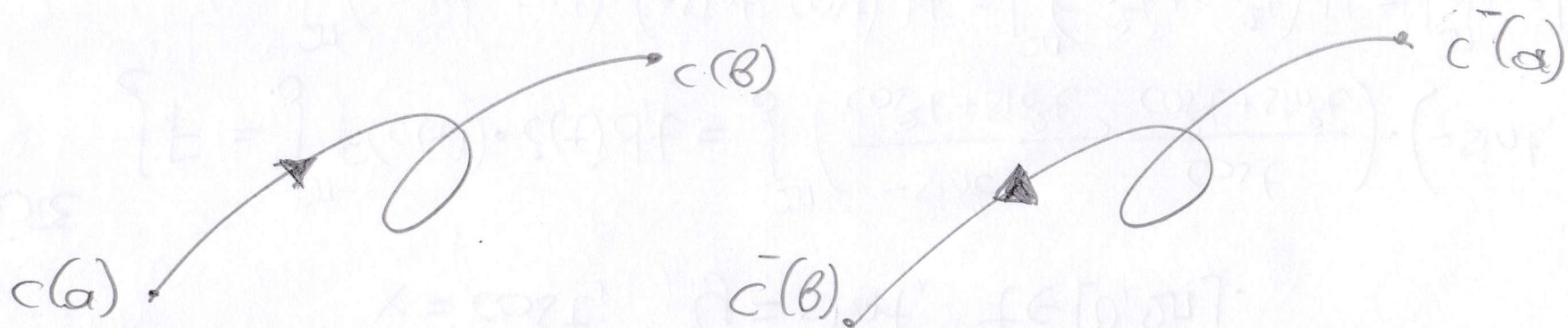
* Εστω η καμπύλη c που ορίζεται στο $[0, 2\pi]$

□

* Έστω μια καμπύλη c που ορίζεται στο $[a, b]$. □

Τότε η αντίθετη καμπύλη c^- ορίζεται ως εξής

$$c^-(t) = c(a+b-t)$$



Επίσης, αν η F είναι μια συνεχής διανυσμ. συνάρτηση, τότε

$$\int_{c^-} F = - \int_c F$$

Ασκ Να υπολογιστεί το
 σκελετικό ολοκλήρωμα της

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{xy^2}, \frac{1}{x^2y} \right)$$

κατά μήκος της καμπύλης C
 με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \sqrt{t}, y = \sqrt{t+1}, t \in [1, 4].$$

Απ Είναι

$$F(c(t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}, \frac{1}{t\sqrt{t+1}} \right)$$

και

$$\dot{c}(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \right).$$

Αρα

$$\int_C F = \int_1^4 (F(c(t)) \cdot \dot{c}(t)) dt$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{2t(t+1)} + \frac{1}{2t(t+1)} \right) dt$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{t(t+1)} dt =$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{t} dt - \int_1^4 \frac{1}{t+1} dt$$

$$= [\ln|t|]_1^4 - [\ln|t+1|]_1^4$$

$$= \left[\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \right]_1^4$$

$$= \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{1}{2}$$

$$= \ln \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} = \ln \frac{8}{5}.$$



Ασκ Έστω $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = (3x^2y, 5xy^2)$$

και τὸ ζο $\overline{AB}$ της $y=x^3$

απὸ τὸ $A(1,1)$ εἰς τὸ $B(2,8)$.

Να υπολογιστεῖ τὸ $\int_{\overline{AB}} F$.

Απ. Το τὸ ζο (καμπύλη) $\overline{AB}$

ἔχει παραμετρικὲς ἐξίσ.

$$x=t, \quad y=t^3, \quad t \in [1,2].$$

4.18

Αρα $\int_{\overline{AB}} F = \int_1^2 F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt$ □

$$= \int_1^2 (3t^2 \cdot t^3, 5t \cdot t^6) \cdot (1, 3t^2) dt$$

$$= \int_1^2 (3t^5 + 15t^9) dt$$

$$= \left[3 \frac{t^6}{6} - 15 \frac{t^{10}}{10} \right]_{t=1}^2$$

$$= 1566.$$

* ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

* Εμβαδόν: $E = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$

Παραδ. Χρησιμοποιώντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Απ. Οι παραμετρικές εξίστ. του κύκλου είναι $\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\rho \cos t d(\rho \sin t) - \rho \sin t d(\rho \cos t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 [t]_{t=0}^{2\pi} = \pi \rho^2. \end{aligned}$$



Ασκ Να υπολογιστεί
το εμβαδόν της
έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Απ Οι παραμετρικές
εξισώσεις της έλλειψης
είναι

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

Αρα

$$E = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \, d(b \sin t) - b \sin t \, d(a \cos t))$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ba \sin^2 t) dt$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt$$

$$= \frac{1}{2} ab [t]_{t=0}^{2\pi}$$

$$= a \cdot b \cdot \pi.$$



* Έργο

Το

$$W = \int_C F \, ds = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) \, dt$$

είναι το έργο το οποίο παράγεται όταν δύναμη $\vec{F}$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος καμπύλης C , από το αρχικό σημείο $C(a)$ στο τελικό σημείο $C(b)$.

Παραδ Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$\vec{F}(x,y,z) = (xy, yz, xz)$ όταν μετατοπιστεί το σημείο

εφαρμογής της απ' το $P_1(-1, 1, -1)$ στο $P_2(1, 1, 1)$ κατά μήκος

της καμπύλης $\vec{c}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [-1, 1]$.

Απ. Είναι $c(-1) = \underbrace{(-1, 1, -1)}_{P_1}$ και $c(1) = \underbrace{(1, 1, 1)}_{P_2}$

Αρα

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} d\vec{c} = \int_{-1}^1 \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt = \int_{-1}^1 (tt^2, t^2t^3, tt^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^3 + 2t^6 + 3t^6) dt \\ &= \left[\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^7}{7} + 3\frac{t^7}{7} \right]_{-1}^1 \\ &= 0 + 2\frac{2}{7} + 3\frac{2}{7} = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}. \end{aligned}$$

□

Ασκ Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C (2x - y + 4)dx + (3x + 5y - 6)dy$$

κατά μήκος της καμπύλης (κύκλου) $x^2 + y^2 = 4$.

Απ. Η εξίσωση του κύκλου είναι $\vec{c}: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \vec{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$

Οπότε

$$I = \int_0^{2\pi} [4\cos t - 2\sin t + 4)(-2\sin t) + (6\cos t + 10\sin t - 6)(2\cos t)] dt$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} [-2\cos t \sin t + \sin^2 t - 2\sin t + 3\cos^2 t + 5\sin t \cos t - 3\cos t] dt$$

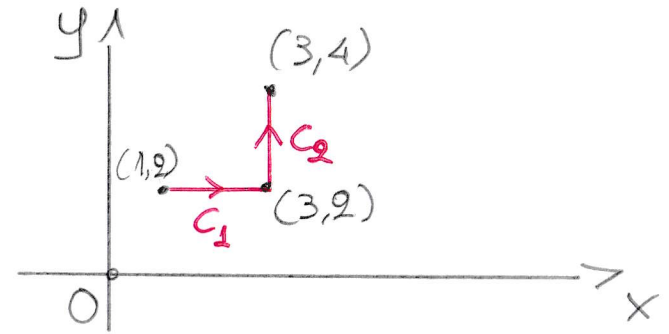
$$= 4 \int_0^{2\pi} (3\sin t \cos t + 1 + 2\cos^2 t - 2\sin t - 3\cos t) dt$$

$$= 12 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_{t=0}^{2\pi} + 4 \left[t \right]_{t=0}^{2\pi} + 4 \left[t \right]_{t=0}^{2\pi} + 4 \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_{t=0}^{2\pi} + 8 \left[\cos t \right]_0^{2\pi} - 12 \left[\sin t \right]_0^{2\pi}$$

$$= 0 + 8\pi + 8\pi + 0 + 0 + 0 = 16\pi.$$



Ασκ Να υπολογιστεί το $\int_C F dc$ όπου $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με
 $F(x,y) = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$ και
 η καμπύλη c δίνεται από το σχήμα!



Απ. Θεωρούμε τις καμπύλες $C_1: 1 \leq x \leq 3, y=2$
 $C_2: x=3, 2 \leq y \leq 4.$
 Οπότε

$$\begin{aligned} \int_C F dc &= \int_{C_1} F dc_1 + \int_{C_2} F dc_2 = \int_1^3 (6 \cdot 4 - 8) dx + \int_2^4 (6 \cdot 3^2 \cdot y - 3 \cdot 3 \cdot y^2) dy \\ &= 24 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^3 - 8 [x]_{x=1}^3 + 54 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^4 - 9 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^4 \\ &= 12 [9-1] - 8 [3-1] + 27 [16-4] - 3 [64-8] = 236. \end{aligned}$$

□

Β' Τρόπος Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y}(6xy^2 - y^3) = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 3xy^2)$

Άρα υπάρχει δυναμική συνάρτηση φ τέω $\nabla\varphi = F$. Οπότε

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3 \Rightarrow \varphi(x,y) = 3x^2y^2 - y^3x + h(y)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - y^3x + h(y)) = 6x^2y - 3xy^2$$

$$\Rightarrow \cancel{6x^2y} - \cancel{3y^3x} + h'(y) = \cancel{6x^2y} - \cancel{3xy^2} \Rightarrow h(y) = c.$$

Συνεπώς

$$\varphi(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + c$$

Άρα

$$\int_C F dc = \varphi(3,4) - \varphi(1,2) = 3 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 236.$$

□

Ασκ. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται όταν η δύναμη $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (e^y, xe^y + 2y)$ μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το $P(1,0)$ έως το $Q(2,1)$ κατά μήκος καμψής C .

Απ. Ορίζουμε $f(x,y) = e^y$, $g(x,y) = xe^y + 2y$.

Παρατηρούμε $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y$ και $\frac{\partial g}{\partial x} = e^y$, δηλ. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Συνεπώς η F έχει δυναμική αναπαράσταση φ . Τότε

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^y \Rightarrow \varphi(x,y) = xe^y + h(y).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xe^y + 2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (xe^y + h(y)) = xe^y + 2y \Rightarrow \cancel{xe^y} + h'(y) = \cancel{xe^y} + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y \Leftrightarrow h(y) = y^2 + c.$$

Επομένως $\varphi(x,y) = xe^y + y^2 + c$.

$$\text{Άρα } W = \int_C F \cdot dc = \varphi(2,1) - \varphi(1,0) = 2e + 1 - 1 = 2e.$$

□

Πρόταση Αν $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$,
τότε το διάνυσμα πεδίο
 $\vec{F}$ έχει δυναμική συνάρτ.

Παραδ. Έστω το διάνυσμα
πεδίο $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, τ.ω.

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz + 2yz, xy + y^2).$$

Να υπολογιστεί το έργο που
παροίχεται όταν η διαδρομή $\vec{F}$
μετακινεί το σημείο εφαρμογής
ευθύγραμμο από το

από το σημείο $P(1, 1, 1)$ έως το $Q(2, 2, 1)$.

Απ.

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz + 2yz & xy + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x + 2y - x - 2y) \vec{i}$$

$$- (y - y) \vec{j}$$

$$+ (z - z) \vec{k} = \vec{0}.$$

Συνεπώς το $\vec{F}$ έχει δυναμική
συνάρτηση φ , δηλ.

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{F} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz & (1) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz + 2yz & (2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + y^2 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz \Rightarrow \varphi = \int yz dx + h(y, z) \Rightarrow \varphi = xyz + h(y, z).$$

$$(2) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz + 2yz \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(xyz + h(y, z)) = xz + 2yz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{xz} + \frac{\partial h}{\partial y} = \underline{xz} + 2yz \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 2yz$$

$$\Rightarrow h(y, z) = \int 2yz dy + k(z) \Rightarrow h(y, z) = y^2 z + k(z)$$

$$(3) \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy + y^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(xyz + y^2 z + k(z)) = xy + y^2 \Rightarrow \underline{xy} + \underline{y^2} + k'(z) = \underline{xy} + \underline{y^2}$$

$$\Rightarrow k'(z) = 0 \Rightarrow k(z) = c.$$

Αρα

$$\varphi(x, y, z) = xyz + y^2 z + c.$$

και επομεως το Ιντεριμω Εργο θα ειναι

$$W = \int_C \vec{F} = \varphi(Q) - \varphi(P) = \varphi(2, 2, 1) - \varphi(1, 1, 1) = 4 + 4 + c - 1 - c = 6.$$

Β' Τρόπος | Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα c .

$$\left. \begin{aligned} x &= x_p + t \cdot (x_q - x_p) \\ y &= y_p + t \cdot (y_q - y_p) \\ z &= z_p + t \cdot (z_q - z_p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= t + 1 \\ y &= t + 1 \\ z &= 1 \end{aligned}, \quad t \in [0, 1].$$

Άρα το ζητούμενο έργο W θα είναι

$$\begin{aligned} W &= \int_c \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \int_0^1 (t+1, (t+1)+2(t+1), 2(t+1)^2) \cdot (1, 1, 0) dt \\ &= \int_0^1 [(t+1) + 3(t+1)] dt = \int_0^1 4(t+1) dt = 4 \left[\frac{(t+1)^2}{2} \right]_{t=0}^1 = \\ &= 4 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right] = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6. \end{aligned}$$

