ΚΕΦ. 3: ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

* Απλά Ακρότατα

Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f: A \to \mathbb{R}$.

Ορ. Ένα σημείο P του A λέγεται <u>ολικό ή απόλυτο ελάχιστο</u> της f, αν $f(P) \leq f(X)$ $\forall X \in A$.

" " P " " " <u>" " μέγιστο</u> " ", " $f(P) \geq f(X)$

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f: U \to \mathbb{R}$.

Ορ. Ένα σημείο P του U λέγεται <u>τοπικό ή σχετικό ελάχιστο</u> της f, αν $\exists B(P,a)$, τ.ω. $f(P) \leq f(X)$

" " P " " " <u>τοπικό ή σχετικό μέγιστο</u> " ", $\exists B(P,a)$, τ.ω. $f(P) \geq f(X)$

$\forall X \in B(P,a)$.

<u>Ορ.</u> Ένα σημείο P του U ονομάζεται <u>κρίσιμο σημείο της f</u>, αν

$$D_1 f(P) = D_2 f(P) = \dots = D_n f(P) = 0.$$

<u>Θεωρ.</u> Αν $P \in U$ τοπικό ακρότατο της f, τότε το P είναι κρίσιμο σημείο της f.

<u>Θεωρ.</u> (Κριτήριο του Sylvester) Έστω ότι η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης και 2ης τάξης και έστω ότι το P είναι κρίσιμο σημείο της f.

Για λόγους συντομίας, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ και τις $\underbrace{\text{ορίζουσες}}_{\text{Εσσιανές}}$ H_k, ή Δ_k, ή D_k

$$H_1 = a_{11}, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Τότε

(i) Αν $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, ..., $H_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P.

(ii) — $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, ..., $(-1)^n H_n > 0$, — — — — — μέγιστο — —.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι (i) και (ii) και $H_k \neq 0$, $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$ τότε η f δεν έχει τοπ. ακρότατο

(iv) Αν $H_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1,\dots,n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε, για τοπ. ακρότατο.

Παραδ. Έστω $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$. Αναζητούμε τα τυχόν τοπικά ακρότατα της f.

Αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία $P(x,y)$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(P)}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f(P)}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x^2=y\\ y^2=x\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x^4=y^2\\ y^2=x\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x^4=x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=1.$$

Συνεπώς, τα κρίσιμα σημεία είναι τα $P_1=(0,0)$ και $P_2=(1,1)$.

Υπολογίζουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$.

Για το $\boxed{P_1=(0,0)}$ έχουμε $H_1 = 6x|_{(0,0)}=0$, οπότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Για το $\boxed{P_2=(1,1)}$ — " — $H_1=6x|_{(1,1)}=6>0$, $H_2=\begin{vmatrix}6x & -3\\ -3 & 6y\end{vmatrix}_{(1,1)}=\begin{vmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{vmatrix}=27>0$

Άρα στο σημείο P_2 έχουμε τ.ε. (τοπικό ελάχιστο) και $f(P_2)=-1$. □

Παραδ. Θεωρούμε την $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

Αναζητούμε τα τοπικά ακρότατα της f.

Έστω $P(x,y,z)$ κρίσιμο σημείο της f. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\\ \frac{\partial f}{\partial z}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x-y+1=0\\ 2y-x=0\\ 2z-2=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x=-\frac{2}{3}\\ y=-\frac{1}{3}\\ z=1\end{array}$$

Βρήκαμε ένα κρίσιμο σημείο το $P_1=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$. Για το P_1 έχουμε

$a_{11}=D_1^2f(P)=2$, $a_{12}=D_1D_2f(P)=-1$, $a_{13}=D_1D_3f(P)=0$

$a_{21}=D_2D_1f(P)=-1$, $a_{22}=D_2^2f(P)=2$, $a_{23}=D_2D_3f(P)=0$

$a_{31}=D_3D_1f(P)=0$, $a_{32}=D_3D_2f(P)=0$, $a_{33}=D_3^2f(P)=2$

Υπολογίζουμε τις Εσσιανές ορίζουσες:

$H_1=a_{11}=2>0$, $H_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3>0$, $H_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=6>0$

Άρα, στο σημείο $P_1(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ έχουμε τ.ε. και $f(P_1)=f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)=-\frac{4}{3}$. $\square$

Ασκ. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + y^2 + 2xy + 2$$

Απ. Έστω $P(x,y)$ κρίσιμο σημείο της f. Τότε

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(P)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(P)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + 3x - 2 + 2y &= 0 \\ 2y + 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^2 + 3x - 2 - 2x &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Συνεπώς καταλήξαμε σε δύο κρίσιμα σημεία τα $P_1(1,-1)$, $P_2(-2,2)$.

Υπολογίζουμε τις

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x + 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Για το $\boxed{P_1=(1,-1)}$ έχουμε

$$H_1 = a_{11} = \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = 2x+3\Big|_{P_1} = 5>0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6>0$$

Άρα στο σημείο $P_1=(1,-1)$ έχουμε τ.ε. και $f(P_1)=f(1,-1)=\frac{5}{6}$.

Για το $\boxed{P_2(-2,2)}$ έχουμε

$$H_1 = a_{11} = \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = 2x+3\Big|_{P_2} = -1<0, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6<0$$

Άρα στο σημείο $P_2(-2,2)$ δεν έχουμε τοπικό ακρότατο, αλλά σαγματικό σημείο. $\square$

* ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

<u>Θεωρ.</u> Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και

$$f: U \to \mathbb{R}, \quad g: U \to \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και ότι υπάρχει ένα σημείο P του U τ.ω. (τέτοιο ώστε) $\nabla g(P) \neq 0$. Αν το σημείο P είναι <u>τοπικό ακρότατο υπό τη συνθήκη $g(P)=0$</u>, τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός λ, που λέγεται <u>πολλαπλασιαστής του Lagrange</u>, τ.ω.

$$\nabla f(P) = \lambda \cdot \nabla g(P).$$

Με άλλα λόγια, οι συντεταγμένες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ των πιθανών ακρότατων υπό συνθήκη προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος

$$D_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot D_1 g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$D_2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot D_2 g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$D_n f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \cdot D_n g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Για να βρούμε τα ακρότατα της f υπό τη συνθήκη $g(X) = 0$, βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

και εφαρμόζουμε το κριτήριο του Sylvester. Όμως η περίπτωση (iii) του κριτηρίου γενικώς δεν ισχύει (δηλ. είναι δυνατόν $H_2 < 0$ για τη $\varphi = f - \lambda \cdot g$ και να έχουμε ακρότατο).

<u>Ασκ.</u> Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x + 3y - 2z$$

υπό τη συνθήκη

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

<u>Απ.</u> Έχουμε τη συνάρτηση

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 14$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z).$$

Λύνουμε, αρχικά, το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} D_1\varphi=0 \\ D_2\varphi=0 \\ D_3\varphi=0 \\ g=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1-2\lambda x=0 \\ 3-2\lambda x=0 \\ -2-2\lambda x=0 \\ x^2+y^2+z^2-14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{2\lambda} \\ y=\frac{3}{2\lambda} \\ z=-\frac{1}{\lambda} \\ \lambda=\pm\frac{1}{2}. \end{array}$$

Συνεπώς τα μόνα πιθανά ακρότατα της f υπό τη συνθήκη $g=0$ είναι τα $P_1=(1,3,-2)$ και $P_2=(-1,-3,2)$ τα οποία είναι κρίσιμα σημεία των συνάρτ.

$$\varphi_1=f-\frac{1}{2}g, \quad \text{για} \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

$$\varphi_2=f+\frac{1}{2}g, \quad '' \quad \lambda=-\frac{1}{2}$$

Για το σημείο $P_1(1,3,-2)$ έχουμε

$$\begin{array}{lll} a_{11}=-1 & a_{12}=0 & a_{13}=0 \\ a_{21}=0 & a_{22}=-1 & a_{23}=0 \\ a_{31}=0 & a_{32}=0 & a_{33}=-1 \end{array}$$

Οπότε $H_1=-1<0$, $H_2=1>0$, $H_3=-1<0$.

Άρα στο P_1 έχουμε τ.μ. $f(P_1)=14$.

Για το σημείο $P_2(-1,-3,2)$ έχουμε

$$\begin{array}{lll} a_{11}=1 & a_{12}=0 & a_{13}=0 \\ a_{21}=0 & a_{22}=1 & a_{23}=1 \\ a_{31}=0 & a_{32}=0 & a_{33}=0 \end{array}$$

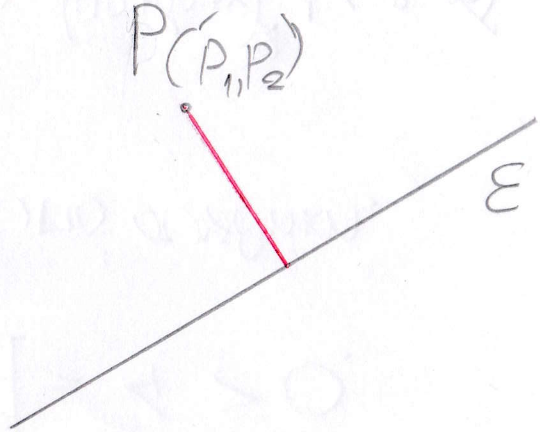
Οπότε $H_1=1>0$, $H_2=1>0$, $H_3=1>0$.

Άρα στο P_2 έχουμε τ.ε. και $f(P_2)=-14$.

□

Ασκ. Να βρεθεί η απόσταση δοθέντος σημείου $P(p_1, p_2)$ από δοθείσα ευθεία $\varepsilon: ax + by + \gamma = 0$ του επιπέδου. $\mathbb{R}^2$.

Απ. Ζητούμε το ακρότατο (ελάχιστο) της



$$f(x,y) = d^2 = (x-p_1)^2 + (y-p_2)^2$$

υπό τη συνθήκη

$$g(x,y) = ax + by + \gamma = 0$$

Θεωρούμε

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

Τα πιθανά ακρότατα σημεία $A(x_A, y_A)$ της f υπό τη συνθήκη $g=0$ είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{r} D_1\varphi(x,y)=0 \\ D_2\varphi(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2(x-p_1)-\lambda\alpha=0 \\ 2(y-p_2)-\lambda\beta=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_A=p_1+\frac{\lambda\alpha}{2} \\ y_A=p_2+\frac{\lambda\beta}{2} \\ \lambda=-2\,\frac{\alpha p_1+\beta p_2+\gamma}{\alpha^2+\beta^2} \end{array}$$

Έχουμε

$$\alpha_{11}=D_1^2\varphi(x,y)=2,\quad \alpha_{12}=\alpha_{21}=D_1D_2\varphi(x,y)=0,\quad \alpha_{22}=D_2^2\varphi(x,y)=2$$

Οπότε

$$H_1=\alpha_{11}=2>0,\quad H_2=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0.$$

Άρα το A είναι σημείο τοπικού ελαχίστου υπό συνθήκη.

Για την ελάχιστη απόσταση έχουμε

$$d^2=f(A)=f\left(p_1+\frac{\lambda\alpha}{2},\,p_2+\frac{\lambda\beta}{2}\right)=\left(\cancel{p_1}+\frac{\lambda\alpha}{2}-\cancel{p_1}\right)^2+\left(\cancel{p_2}+\frac{\lambda\beta}{2}-\cancel{p_2}\right)^2=\frac{\lambda^2}{2^2}(\alpha^2+\beta^2)=\cancel{4}\frac{(\alpha p_1+\beta p_2+\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^{\cancel{2}}}\frac{1}{\cancel{4}}\cancel{(\alpha^2+\beta^2)}$$

δηλ. έχουμε τη γνωστή απόσταση σημείου από ευθεία

$$d=\frac{|\alpha p_1+\beta p_2+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

$\square$

* Ολικά Ακρότατα

* Μεθοδολογία εύρεσης ολικού ακρότατου όταν το πεδίο ορισμού A είναι ανοικτό σύνολο.

Βήμα 1| Βρίσκουμε όλα τα κρίσιμα σημεία και επιλέγουμε αυτό που δίνει τη μεγαλύτερη (αντίστοιχα μικρότερη) τιμή.

Βήμα 2| Αποδεικνύουμε με τον ορισμό ότι αυτό είναι και ολικό μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο).

<u>Ασκ.</u> Έστω η συναρτ. $f(x,y) = x^2+4y^2-2x+8y-1$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Να εξεταστεί αν η f έχει τοπικά και ολικά ακρότατα.

<u>Απ.</u> Έστω $P(x,y)$ κρίσιμο σημείο της f. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ 8y+8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

Συνεπώς έχουμε ένα κρίσιμο σημείο το $P(1,-1)$.

Υπολογίζουμε $a_{11} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} = 2$, $a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} = 0$, $a_{22} = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} = 8$.

Οπότε $H_1 = a_{11} = 2 > 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 16 > 0$.

Άρα η f έχει τ.ε. στο $P(1,-1)$ και $f(P) = -6$.

Θα εξετάσουμε αν το $P(1,-1)$ είναι ολικό ελάχιστο, δηλ. $f(x,y) \geq -6$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Πράγματι $f(x,y)+6 = x^2+4y^2-2x+8y-1+6 = x^2+4y^2-2x+8y+5 =$

$$= x^2-2x+1+4y^2+8y+4 = (x-1)^2+4(y+1)^2 \geq 0.$$

Άρα το $P(1,-1)$ είναι ολικό ελάχιστο. □

* Μεθοδολογία εύρεσης ολικού ακρότατου όταν το πεδίο ορισμού A είναι κλειστό και φραγμένο

<u>Βήμα 1</u> | Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του A.

<u>Βήμα 2</u> | Θεωρώντας την f στο σύνορο του A, βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία

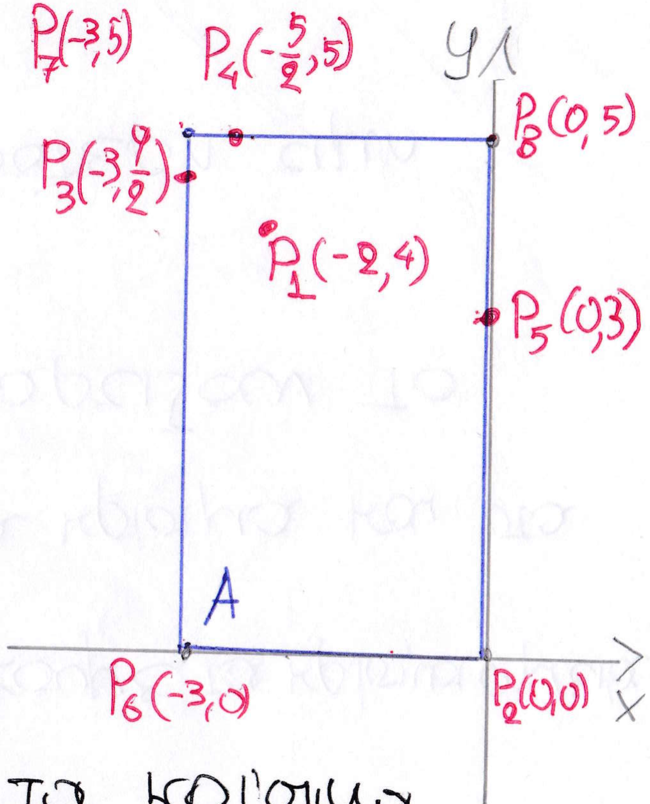
<u>Βήμα 3</u> | Υπολογίζουμε τις τιμές της f σε όλα τα κρίσιμα και στα άκρα (κορυφές) των καμπυλών που απαρτίζουν το σύνολο A.

<u>Βήμα 4</u> | Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή της f.

<u>Ασκ</u> Έστω η συναρτ. $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6y + 2$, όπου $A = \{(x,y) \mid -3 \le x \le 0, 0 \le y \le 5\}$. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της f.

<u>Απ</u> <u>ΒΗΜΑ 1</u>| Έστω (x,y) εσωτερικό σημείο του A.

Τότε
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2x + y = 0 \\ x + 2y = 6\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y = -2x \\ x - 4x = 6\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x = -2 \\ y = 4\end{array}$$



Συνεπώς στο εσωτερικό του A, έχουμε ένα κρίσιμο σημείο το $P_1(-2,4)$, $f(P_1) = -10$.

Στο επόμενο βήμα θα αναζητήσουμε τα κρίσιμα σημεία στο σύνορο της f.

ΒΗΜΑ 2 Έστω $-3 \leq x \leq 0$, $y=0$.

Τότε $f(x,0) = x^2+2$.

Οπότε

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x=0.$$

Συνεπώς έχουμε το κρίσιμο σημείο

$P_2(0,0) \Rightarrow$

$f(P_2) = 2$.

Έστω $x=-3$, $0 \leq y \leq 5$.

Τότε $f(-3,y) = 9-3y+y^2-6y+2$.

Οπότε

$$\frac{\partial f(-3,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow -3+2y-6=0 \Rightarrow 2y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{2}.$$

Συνεπώς έχουμε το κρίσιμο σημείο

$P_3(-3, \frac{9}{2}) \Rightarrow$

$f(P_3) = -\frac{37}{4}$.

Έστω $-3 \leq x \leq 0$, $y=5$.

Τότε $f(x,5) = x^2+5x+25-30+2$.

Οπότε

$$\frac{\partial f(x,5)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x+5=0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Συνεπώς έχουμε το κρίσιμο σημείο

$P_4(-\frac{5}{2}, 5) \Rightarrow$

$f(P_4) = -\frac{37}{4}$.

Έστω $x=0$, $0 \leq y \leq 5$.

Τότε $f(0,y) = y^2-6y+2$.

Οπότε

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = 2y-6=0 \Rightarrow y=3.$$

Συνεπώς έχουμε το κρίσιμο σημείο

$P_5(0,3) \Rightarrow$

$f(P_5) = -7$.

ΒΗΜΑ 3 | Υπολογίζουμε τις τιμές της f στις κορυφές του A και προκύπτει

$$f(0,0)=2,\quad f(-3,0)=11,\quad f(-3,5)=-9,\quad f(0,5)=-3.$$

ΒΗΜΑ 4 | Συγκρίνοντας τις τιμές της f, βρίσκουμε

$$f_{min}=\min\{f(P_1), f(P_2), f(P_3), \dots, f(P_8)\}$$
$$=\min\{-10,\ 2,\ -7,\ -\tfrac{37}{4},\ -\tfrac{37}{4},\ 11,\ -3,\ -9\}=-10=f(-2,4)$$

και

$$f_{max}=\max\{f(P_1), f(P_2), f(P_3), \dots, f(P_8)\}=\dots=11=f(-3,0)$$

Άρα το ολικό ελάχιστο επιτυγχάνεται στο $P_1(-2,4)$ και $f(-2,4)=-10$
και -"- -"- μέγιστο -"- -"- $P_6(-3,0)$ και $f(-3,0)=11$. $\square$