ΚΕΦ. 9: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

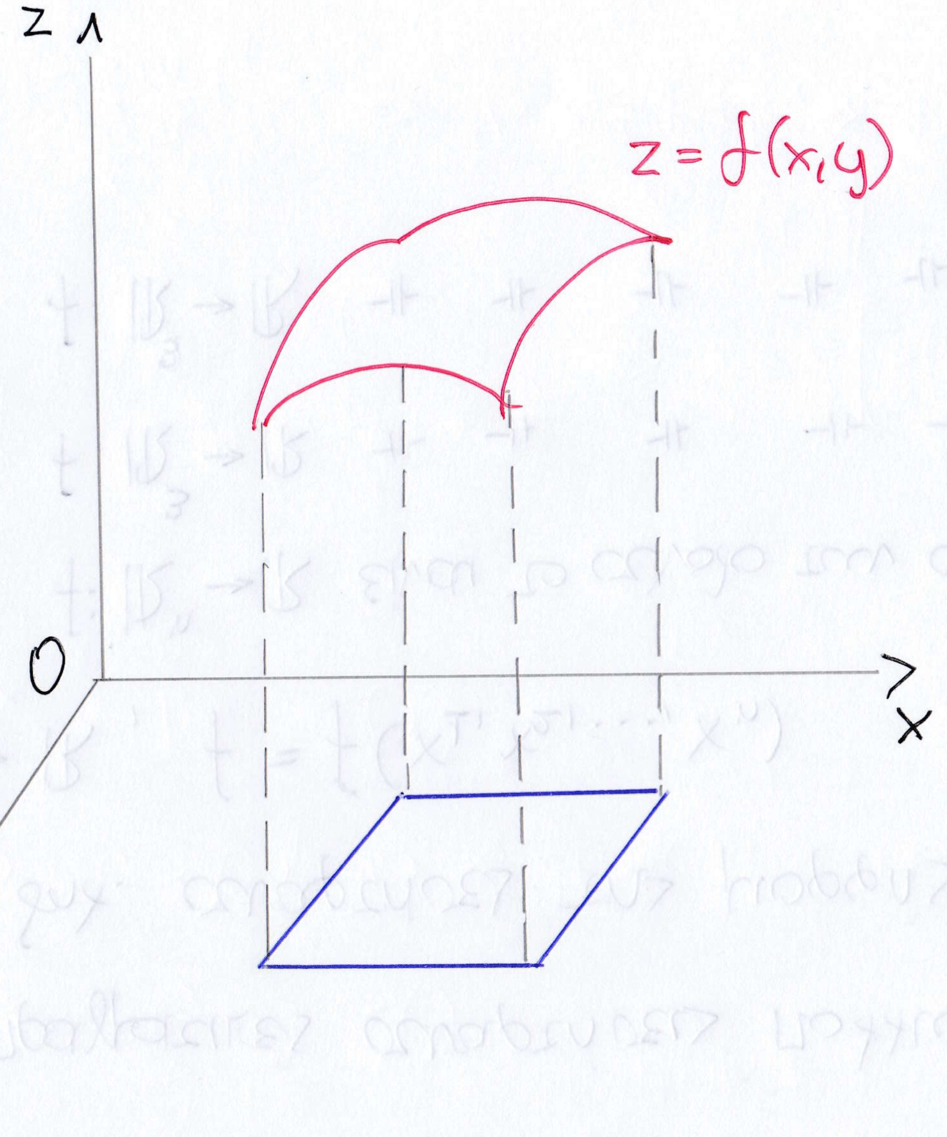
Θα μελετήσουμε τώρα πραγματικές συναρτήσεις πολλών (πραγματικών) μεταβλητών, δηλ. συναρτήσεις της μορφής

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Το γράφημα μιας συναρτ. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημ. $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$

 -"- -"- -"- -"- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ -"- -"- -"- -"- -"- $(x_1, x_2, x_3, f(x_1,x_2,x_3))$

 -"- -"- -"- -"- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ -"- -"- -"- -"- -"- $(x_1, x_2, f(x_1,x_2)) \in \mathbb{R}^3$


z
$z = f(x,y)$
O
x
y

Ορ. Η στάθμη c της $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^{n+1}$ τ.ω.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

Για $n=2$ η στάθμη της $f(x_1,x_2)$ είναι μια καμπύλη

-//- $n=3$ -//- -//- -//- $f=f(x_1,x_2,x_3)$ -//- -//- επιφάνεια.

Παραδ. Θεωρούμε την $f(x,y) = x^2+y^2$.

Για να βρούμε τη στάθμη, λύνουμε την εξίσωση

$$x^2+y^2 = c$$

η οποία έχει λύσεις για $c \geq 0$, οπότε οι λύσεις είναι κύκλοι. $\square$

Έστω P σημείο του $\mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε

Το σύνολο των σημείων X τ.ω. $\|X-P\| < a$ λέγεται ανοικτή μπάλα $B(P,a)$.

" " " " X " $\|X-P\| \leq a$ " κλειστή μπάλα $B[P,a]$.

" " " " X " $\|X-P\| = a$ " σφαίρα.

Για $n=2$ η μπάλα $B(P,a)$ ονομάζεται ανοικτός δίσκος.

" " " " $B[P,a]$ " κλειστός δίσκος.

" " " σφαίρα " κύκλος.

<u>Ορ.</u> Το σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ θα λέγεται <u>ανοικτό</u>, αν $\forall P \in U$, $\exists a \in \mathbb{R}$, τ.ω.

$$B(P, a) \subset U.$$

<u>Ορ.</u> Εστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f: U \to \mathbb{R}$. Τότε η <u>μερική παράγωγος</u> της f ως προς x_i ορίζεται ως

$$D_i f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

αν το παραπάνω όριο υπάρχει.

Παραδ. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι για τη συνάρτηση

$$f(x,y,z) = \sin(xy) + \cos z$$

στο σημείο $(1, \pi, \pi)$.

Απ. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) + 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,\pi,\pi)} = \pi \cdot \cos\pi = -\pi.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy) + 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,\pi,\pi)} = 1 \cos\pi = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 - \sin z \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,\pi,\pi)} = -\sin\pi = 0.$$

$\square$

<u>Ασκ</u> Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης
$$f(x,y) = \ln\left(\tan\frac{x}{y}\right), \quad x,y\in\mathbb{R}^*_+.$$

<u>Απ.</u> Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}}{\tan\frac{x}{y}} = \frac{1}{y\,\frac{\sin\frac{x}{y}}{\cancel{\cos}\frac{x}{y}}\cdot\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{y}} = \frac{1}{y\sin\frac{x}{y}\,\cos\frac{x}{y}}.$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{\tan\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y^2\,\frac{\sin\frac{x}{y}}{\cancel{\cos}\frac{x}{y}}\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y^2\sin\frac{x}{y}\,\cos\frac{x}{y}}.$$

$\square$

Άσκ Αν $f(x,y,z) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, να δείχτει ότι

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 1, \quad x,y,z \in \mathbb{R}^*_+ .$$

Απ. Θέτουμε $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}r}}{x+r} = \frac{\frac{r+x}{r}}{x+r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}r}}{x+r} = \frac{\frac{y}{r}}{x+r} = \frac{y}{r(x+r)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\cancel{2}z}{\cancel{2}r}}{x+r} = \frac{\frac{z}{r}}{x+r} = \frac{z}{r(x+r)}.$$

Άρα

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= x\frac{1}{r} + y\frac{y}{r(x+r)} + z\frac{z}{r(x+r)} =$$

$$= \frac{x(x+r)+y^2+z^2}{r(x+r)} =$$

$$= \frac{x^2+xr+y^2+z^2}{r(x+r)} =$$

$$= \frac{xr+r^2}{r(x+r)} = \frac{r(x+r)}{r(x+r)} = 1. \quad \square$$

* Κλίση

<u>Ορ</u> Αν η συνάρτηση $f = f(x_1, \dots, x_n) : U \to \mathbb{R}$, όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο U, τότε καλείται <u>κλίση</u> της f και συμβολίζεται με

∇f ή $\vec{\nabla} f$ ή $\mathrm{grad} f$

το διάνυσμα

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Το διάνυσμα ∇f είναι κάθετο στην επιφάνεια της f.

<u>Παρατ.</u> Το σύμβολο

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

λέγεται <u>διανυσματικός διαφορικός τελεστής ανάδελτα</u> και ισχύει ότι

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

<u>Ιδιότητες</u>

1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2) $\nabla(cf) = c\nabla f, \ c \in \mathbb{R}$.

<u>Ασκ</u> Να βρεθεί η κλίση της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \ln[z+\sin(y^2-x)]$$

στο σημείο $(1,-1,1)$.

<u>Απ.</u>

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{-\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)}, \frac{2y\cos(y^2-x)}{z+\sin(y^2-x)}, \frac{1}{z+\sin(y^2-x)}\right)$$

Άρα

$$\nabla f(1,-1,1) = \left(\frac{-1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{1}\right)$$

$$= (-1, -2, 1). \quad \square$$

Ασκ. Να βρεθεί η κλίση της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = e^{3x+y}\sin(3z),$$

στο σημείο $(0,0,\frac{\pi}{6})$.

Απ.: $\nabla f = \left(3e^{3x+y}\sin(3z),\ e^{3x+y}\sin(3z),\ 3e^{3x+y}\cos(3z)\right).$

$$\nabla f(0,0,\tfrac{\pi}{6}) = (3,\ 1,\ 0).$$

$\square$

2.12

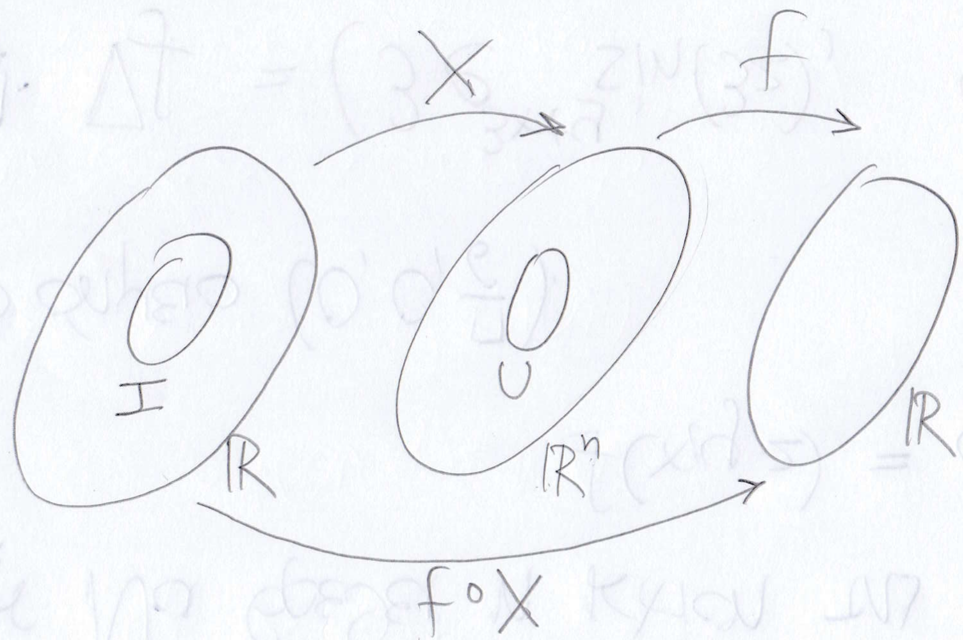
* Κανόνας αλυσίδας

Θεωρούμε τη συναρτ. $f: U \to \mathbb{R}$ (όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$)

και την καμπύλη $X: I \to \mathbb{R}^n$ (-//- I -//- διάστημα του $\mathbb{R}$)

Τότε η <u>σύνθεση των f και X</u> η οποία συμβολίζεται

$f \circ X : I \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως $(f \circ X)(t) = f(X(t))$



$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, mapsto, "X"] \arrow[rr, bend right, "f \circ X"'] & (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \arrow[r, mapsto, "f"] & y \end{tikzcd}$$

Αν οι συναρτήσεις f και X είναι διαφορίσιμες, τότε σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας και η σύνθεση $f \circ X$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και ισχύει

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f \circ X)(t) = \nabla f(X(t)) \cdot \dot{X}(t)}$$

$X(t) = (x(t), y(t))$ και

Έστω $f(X(t)) = f(x(t), y(t))$

Τότε

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Έστω $f(x(t,s), y(t,s))$.

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Παραδ. Έστω $f(x,y) = x^2 + 2xy$ όπου

$x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ και $y = y(r,\theta) = r\cdot\sin\theta$.

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= (2x+2y)(-r\sin\theta) + (0+2x)\cdot(r\cdot\cos\theta)$$

$$= (2r\cos\theta + 2r\sin\theta)(-r\sin\theta) + (2r\cos\theta)(r\cos\theta)$$

$$= -2r^2\cos\theta\cdot\sin\theta - 2r^2\sin^2\theta + 2r^2\cos^2\theta$$

$$= -2r^2(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta).$$

$\square$

Όμοια για $\frac{\partial f}{\partial r}$.

Παράδ. Έστω $f(x,y,z) = e^{xy} \cdot \cos z$ και

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t,u) = tu \\ y &= y(t,u) = \sin(tu) \\ z &= z(t,u) = u^2 \end{aligned}\right\}.$$ Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= \left(y e^{xy}\cos z\right)\cdot(t) + \left(x e^{xy}\cdot\cos z\right)\left(t\cos(tu)\right) + \left(-e^{xy}\sin z\right)(2u)$$

$$= t\sin(tu)\cdot\cos u^2\, e^{tu\sin(tu)} + t^2u\cos u^2\cdot\cos(tu)\, e^{tu\sin(tu)} - 2u\sin u^2 e^{tu\sin(tu)}.$$

Ομοίως εργαζόμενοι υπολογίζουμε και τη $\frac{\partial f}{\partial t}$. $\square$

<u>Παρατ.</u> Αν $f(X(t)) = c$, όπου c σταθ. τότε

$$\frac{d}{dt} f(X(t)) = 0 \Rightarrow \nabla f(X(t)) \cdot \dot{X}(t) = 0$$

δηλ. τα διανύσματα $\nabla f(X(t))$ και $\dot{X}(t)$ είναι ορθογώνια.

<u>Άσκ</u> Έστω $f(x,y,z) = x^3 + 3xyz - y^2 z$ όπου $\begin{cases} x = x(t,s) = 2t+s \\ y = y(t,s) = -t-s \\ z = z(t,s) = t^2 \end{cases}$.

Να υπολογιστεί η $\frac{\partial f}{\partial t}$.

<u>Απ.</u>
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (3x^2 + 3yz) \cdot (2) + (3xz - 2yz) \cdot (-1) + (3xy - y^2) \cdot (2t)$$

$$= 6(2t+s)^2 - 6(t+s)t^2 - 3(2t+s)t^2 - 2(t+s)t^2 - 6(2t+s)(t+s)t - 2(t+s)^2 t.$$

$\square$

<u>Άσκ</u> Αν $u = x^3 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, ν.δ.ο.

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 3u.$$

<u>Απ.</u>

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \cdot f + x^3 \left[(D_1 f)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + (D_2 f) \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 \left[(D_1 f) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + (D_2 f) \cdot (0) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3 \left[(D_1 f) \cdot (0) + (D_2 f) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

Άρα

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= 3x^3 \cdot f + \cancel{x^2} \left[\cancel{-y (D_1 f)} - \cancel{z (D_2 f)} \right]$$

$$+ y \left[x^2 \cancel{(D_1 f)} \right]$$

$$+ z \left[x^2 \cancel{(D_2 f)} \right] =$$

$$= 3x^3 \cdot f = 3u. \qquad \square$$

Ασκ Να βρεθεί η $\frac{df}{dt}$ για $t=\frac{\pi}{4}$ της σύνθετης συνάρτησης $f=f(t)$ η οποία ορίζεται από τις

$$f(x,y)=xye^{xy}, \quad x=\cos t, \quad y=\sin t.$$

Απ. $$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\left(ye^{xy}+xy^2e^{xy}\right)\left(-\sin t\right)+\left(xe^{xy}+x^2ye^{xy}\right)\cdot\left(\cos t\right)$$

Άρα

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left(\sin\frac{\pi}{4}\,e^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}+\cos\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{\pi}{4}\,e^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+\left(\cos\frac{\pi}{4}\,e^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}+\cos^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\,e^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$$

□

* Εφαπτόμενο Επίπεδο

Έστω g μία διαφορίσιμη συνάρτηση και $X(t)$ μία διαφορίσιμη καμπύλη. Τότε το σύνολο των σημείων X τ.ω. $g(X) = c$, c σταθ. αποτελεί μία επιφάνεια.

Το επίπεδο, που περνά από ένα σημείο P και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\nabla g(X)$ ονομάζεται <u>εφαπτόμενο επίπεδο</u> και έχει εξίσωση

$$\boxed{X \cdot \nabla g(P) = P \cdot \nabla g(P)}$$

Παράδ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(X) = x^2+y^2+z^2 = 3$,

$X=(x,y,z)$ και το σημείο $P=(1,1,1)$. Τότε

$$\nabla g(X) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) \Rightarrow \nabla g(X) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\Rightarrow \nabla g(P) = (2, 2, 2)$$

Οπότε η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου θα είναι η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο P και είναι κάθετο στο διάνυσμα $N = \nabla g(P)$, δηλ.

$$X\cdot N = P\cdot N \Rightarrow (x,y,z)\cdot(2,2,2) = (1,1,1)\cdot(2,2,2) \Rightarrow 2x+2y+2z=6$$

$$\Rightarrow x+y+z=3. \quad \square$$

<u>Παρατ.</u> Μία επιφάνεια μπορεί επίσης να δοθεί υπό τη μορφή

$$z = f(x,y).$$

Οπότε

$$f(x,y) - z = 0$$

Θέτουμε

$$g(x,y,z) = f(x,y) - z$$

και υπολογίζουμε το εφαπτόμενο επίπεδο, όπως προηγουμένως.

<u>Παράδ.</u> Έστω η επιφάνεια

$$z = x^2 + y^2$$

και το σημείο $P(1,2,5)$.

Θέτουμε

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$$

και βρίσκουμε

$$\nabla g = (2x, 2y, -1) \Rightarrow \nabla g(P) = (2,4,-1) = N$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο είναι

$$X \cdot N = P \cdot N \Rightarrow$$

$$(x,y,z) \cdot (2,4,-1) = (1,2,5) \cdot (2,4,-1) \Rightarrow$$

$$2x + 4y - z = 5. \qquad \square$$

* Παράγωγος κατά διεύθυνση

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Έστω επίσης P σημείο του U και A τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα ($\|A\|=1$). Τότε για τη συναρτ. $f(P+tA)$ έχουμε

$$\frac{d}{dt} f(P+tA) = \nabla f(P+tA) \cdot \frac{d}{dt}(P+tA) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} f(P+tA) = \nabla f(P+tA) \cdot A$$, και αν $t=0$, τότε $\frac{d}{dt} f(P) = \nabla f(P) \cdot A$

Ορ. Η <u>Παράγωγος κατά κατά διεύθυνση</u> (συμβ. $D_A f(P)$) ορίζεται ως

$$\boxed{D_A f(P) = \nabla f(P) \cdot A}$$

όπου $\|A\|=1$.

Παρατ. Αν B τυχαίο μη-μοναδιαίο διάνυσμα, τότε εφαρμόζουμε τη $A = \frac{B}{\|B\|}$.

Παραδ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = x^2+y^3$$

το διάνυσμα $B=(1,2)$ και το σημείο $P=(-1,3)$.

Ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $A=\frac{B}{\|B\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Υπολογίζουμε την κλίση $\nabla f(P) = (2x, 3y^2)\Big|_P = (-2, 27)$.

Επομένως η παράγωγος της f κατά τη διεύθυνση του A ($A/\!/B$) στο P είναι

$$D_A f(P) = \nabla f(P)\cdot A = (-2,27)\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}},\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{54}{\sqrt{5}} = \frac{52}{\sqrt{5}}. \quad \square$$

Ασκ Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$$

στο σημείο $P_0(1,-1,3)$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{P_0P_1}$ όπου $P_1(0,1,1)$.

Απ. Είναι

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (0-1)\vec{i} + (1+1)\vec{j} + (1-3)\vec{k}$$
$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

και

$$\|\overrightarrow{P_0P_1}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3.$$

Ορίζουμε τώρα το μοναδιαίο διάν.

$$\vec{\alpha} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\|\overrightarrow{P_0P_1}\|} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

Επίσης

$$\vec{\nabla} f = 2xy^2z^2\vec{i} + 2x^2yz^2\vec{j} + 2x^2y^2z\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} f(P_0) = 18\vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}$$

Άρα η παράγωγος κατά διεύθυνση $\vec{\alpha}$ (όπου $\vec{\alpha} \parallel \overrightarrow{P_0P_1}$) της f στο P_0 είναι

$$D_{\vec{\alpha}} f(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{\alpha}$$
$$= (18\vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right)$$
$$= -6 - 12 - 4$$
$$= -22.$$

$\square$

* Απόκλιση και Περιστροφή

Διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών ονομάζεται μια συναρτ.

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Κάθε συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>αριθμητικό πεδίο</u>

— " — " — $F : U \to \mathbb{R}^3$ — " — <u>διανυσματικό πεδίο</u>.

<u>Ορ</u>. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$F : U \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$$

Η <u>απόκλιση</u> του F ορίζεται ως

$$\boxed{\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}.$$

Παρατ. Θεωρώντας τον διαφορικό τελεστή

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

και το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$$

η <u>απόκλιση</u> είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

Παράδ. Έστω το διαν. πεδίο

$$F(x,y,z) = (\underbrace{\sin xy}_{f_1}, \underbrace{e^{xz}}_{f_2}, \underbrace{2x+yz^4}_{f_3})$$

Τότε η απόκλιση του $\vec{F}$ είναι

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

$$= y\cos xy + 4yz^3.$$

$\square$

<u>Ορ.</u> Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$F = F(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right).$$

Η <u>περιστροφή</u> ή <u>στροφή</u> του F ορίζεται ως

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

<u>Παραδ.</u> Έστω το διαν. πεδίο

$$F(x,y,z) = \left(\sin xy,\ e^{xz},\ 2x + yz^4\right)$$

Τότε η περιστροφή του F είναι

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin xy & e^{xz} & 2x+yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(z^4 - xe^{xz}\right)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + \left(ze^{xz} - x\cos xy\right)\vec{k}$$

$$= \left(z^4 - xe^{xz}\right)\vec{i} - 2\vec{j} + \left(ze^{xz} - x\cos xy\right)\vec{k}.$$

□

<u>Άσκ</u> Έστω $F(x,y,z) = (y\ln x,\ x\ln y,\ xy\ln z)$.

Να βρεθεί (α) η απόκλιση και (β) η περιστροφή του F.

<u>Λύση</u>. α) $\operatorname{div}F = \dfrac{\partial}{\partial x}(y\ln x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(x\ln y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(x\cdot y\cdot \ln z)$

$$= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}.$$

β) $\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\ln x & x\ln y & xy\ln z \end{vmatrix} = (x\ln z - 0)\vec{i} + (0 - y\ln z)\vec{j} + (\ln y - \ln x)\vec{k}$

$$= (x\ln z)\vec{i} - (y\ln z)\vec{j} + \left(\ln\frac{y}{x}\right)\vec{k}.$$

$\square$

<u>Ορ.</u> Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ καλείται <u>σωληνοειδές</u> πεδίο όταν

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

<u>Ορ.</u> Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ καλείται <u>αστρόβιλο</u> πεδίο, όταν

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}.$$

<u>Ορ.</u> Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \vec{F}(\vec{X})$ καλείται <u>Νευτώνιο</u> πεδίο, αν

$$\vec{F}(\vec{X}) = c\,\frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|^3},$$

όπου c σταθερά.

Ασκ. Ν. δ. ο. το Νευτώνιο πεδίο $F(X) = c\dfrac{X}{\|X\|^3}$, είναι σωληνοειδές, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Απ. Εστω $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ και $\|X\| = (\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r})^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}$.

Τότε
$$F(X) = F(x,y,z) = \left(\frac{cx}{r^{3/2}}, \frac{cy}{r^{3/2}}, \frac{cz}{r^{3/2}} \right).$$

Συνεπώς
$$\operatorname{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}\frac{cx}{r^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{cy}{r^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{cz}{r^{3/2}}$$
$$= c\left[\frac{r^{3/2} - x\frac{3}{\cancel{2}}r^{1/2}\cancel{2}x}{r^3} + \frac{r^{3/2} - y\frac{3}{\cancel{2}}r^{1/2}\cancel{2}y}{r^3} + \frac{r^{3/2} - z\frac{3}{\cancel{2}}r^{1/2}\cancel{2}z}{r^3} \right]$$
$$= c\,\frac{3r^{3/2} - 3r^{1/2}(x^2+y^2+z^2)}{r^3} = c\,\frac{3r^{3/2} - 3r^{1/2}r}{r^3} = 0,$$

που σημαίνει ότι το Νευτώνιο πεδίο F είναι σωληνοειδές. $\square$

* Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$ (όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$), μία πραγματική συνάρτηση. Τότε μπορούμε να ορίσουμε (αν αυτές υπάρχουν) τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \left(\text{ή } D_1(D_1 f) = D_1^2 f\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \left(\text{ή } D_2(D_1 f) = D_2 D_1 f\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \left(\text{ή } D_1(D_2 f) = D_1 D_2 f\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \left(\text{ή } D_2(D_2 f) = D_2^2 f\right).$$

Παραδ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = \sin(xy)$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x,y) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$\square$

Θεωρ. Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς τότε ισχύει η ισότητα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ορ. Μία συνάρτηση $f(x,y,z)$ θα λέμε ότι ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, αν

$$\Delta f = \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Παραδ: Θεωρούμε την $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$. Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -4z,$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 2 - 4 = 0,$$

που σημαίνει ότι η f ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace. $\square$

<u>Ασκ.</u> Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f=f(x,y,z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης, τότε ν.δ.ο.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0} \quad (\text{ή } \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = \vec{0}).$$

<u>Απ.</u>

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}\right)\vec{i} - \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}}\right)\vec{j} + \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

□

* Ο τύπος του Taylor

Θεωρ. (Taylor) Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $f: U \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης $\leq r$, για κάποιο $r \in \mathbb{Z}_+^*$. Έστω P σημείο του U και $H(h_1, h_2)$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Αν $\forall t \in [0,1]$ τα σημεία $P + tH \in U$, τότε $\exists \tau \in (0,1)$ τ.ω.

$$f(P+H) = f(P) + \frac{1}{1!}(H \cdot \nabla) f(P) + \frac{1}{2!}(H \cdot \nabla)^2 \cdot f(P) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!}(H \cdot \nabla)^{r-1} \cdot f(P) + \frac{1}{r!}(H \cdot \nabla)^r f(P + \tau H).$$

Παράδ. Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor έως $2^{ης}$ τάξης όρων τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$ στο σημείο $P=(2,1)$.

Απ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x+2y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{1+x+2y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(1+x+2y)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = -\frac{1}{25}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{(1+x+2y)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = -\frac{2}{25}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4}{(1+x+2y)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = -\frac{4}{25}$$

Άρα

$$f(P+H) = f(2,1) + \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\right] + \frac{1}{2}\left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1)\right]$$

$$= \ln 5 + \left[\frac{1}{5}h_1 + \frac{2}{5}h_2\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{25}h_1^2 - \frac{4}{25}h_1h_2 - \frac{4}{25}h_2^2\right]. \quad \square$$

Ασκ. Έστω $z = z(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$. Ν.δ.ο. $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Απ. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x(x-y)^2 - x^2 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2x(x-y) - 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}.$$

Οπότε

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$= x^2 \frac{2y^2}{(x-y)^3} + 2xy \frac{-2xy}{(x-y)^3} + y^2 \frac{2x^2}{(x-y)^3} =$$

$$= \frac{2x^2y^2 - 4x^2y^2 + 2y^2x^2}{(x-y)^3} = 0.$$

<u>Ασκ.</u> Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y,\ -2xz,\ 2yz)$. Να βρεθεί το

[2]

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}).$$

<u>Απ.</u>

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = (2z+2x)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (-2z-x^2)\vec{k}.$$

Άρα

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2(z+x) & 0 & -2z-x^2 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (2+2x)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$$

$$= 2(x+1)\vec{j}.$$

$\square$

Άσκ. Έστω $\vec{F}(x,y,z)=(x^2y, -2xz, 2yz)$. Να βρεθεί το
[3]

$$\text{grad}(\text{div}\vec{F}) \quad (\text{ή } \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})).$$

Απ. Έχουμε

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2yz) = 2xy + 2y$$

Και συνεπώς

$$\text{grad}(\text{div}\vec{F}) = (2y,\ 2x+2,\ 0)$$

$$= (2y,\ 2(x+1),\ 0).$$

$\square$

Ασκ. Έστω $f = f(\underbrace{x^2+y^2}_{u})$. Ν.δ.ο. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

[4]

Απ. Ορίζουμε $u = u(x,y) = x^2+y^2$. Οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \frac{df}{du},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\,\frac{df}{du}.$$

Άρα

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot 2x \cdot \frac{df}{du} - x \cdot 2y \cdot \frac{df}{du} = 0.$$

$\square$

Ασκ. Έστω η διανυσματική συνάρτηση

[5]

$$\vec{r}(x,y) = \left(e^{-\lambda x}\sin(\lambda y),\ e^{-\lambda x}\cdot\cos(\lambda y)\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ν.δ.ο.

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = \vec{0}.$$

Απ.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(-\lambda e^{-\lambda x}\cdot\sin(\lambda y),\ -\lambda e^{-\lambda x}\cdot\cos(\lambda y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = \left(\lambda^2 e^{-\lambda x}\cdot\sin(\lambda y),\ \lambda^2 e^{-\lambda x}\cdot\cos(\lambda y)\right),$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\lambda e^{-\lambda x}\cdot\cos(\lambda y),\ -\lambda\cdot e^{-\lambda x}\cdot\sin(\lambda y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = \left(-\lambda^2\cdot e^{-\lambda x}\sin(\lambda y),\ -\lambda^2 e^{-\lambda x}\cdot\cos(\lambda y)\right).$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = (0,\ 0) = \vec{0}. \qquad \square$$

Άσκ. Έστω $z = z(x,y,t) = e^{-t}(\sin x + \cos y)$. Ν.δ.ο.

[6]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Απ. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-t}\cdot\cos x \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^{-t}\cdot\sin x$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{-t}(-\sin y) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-t}\cdot\cos y$,

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t}(\sin x + \cos y)$.

Άρα

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^{-t}\sin x - e^{-t}\cos y = -e^{-t}(\sin x + \cos y) = \frac{\partial z}{\partial t}. \quad \square$$

<u>Ασκ.</u> Έστω $f(x,y) = e^{xy^2}$. Να υπολογιστεί η

[7]

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}.$$

<u>Απ.</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cdot e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y \cdot e^{xy^2} + y^2 \cdot 2xy e^{xy^2} = 2y e^{xy^2} + 2y^3 x e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 2e^{xy^2} + 2y\, 2xy e^{xy^2} + 6y^2 x e^{xy^2} + 2y^3 \cdot 2y x^2 e^{xy^2}$$

$$= 2e^{xy^2} + 4xy^2 e^{xy^2} + 6y^2 x e^{xy^2} + 4y^4 x^2 e^{xy^2}$$

$$= 2e^{xy^2}\left(1 + 5xy^2 + 2x^2y^4\right).$$

□

<u>Ασκ</u> Ν.δ.ο το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(x^3+xy^2, x^2y+y^3, 2z)$ είναι αστρόβιλο.

<u>Απ</u>. Έχουμε

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^3+xy^2 & x^2y+y^3 & 2z\end{vmatrix}=$$

$$=(0-0)\vec{i}+(0-0)\vec{j}+(2xy-2xy)\vec{k}$$

$$=\vec{0}.$$

$\square$

Ασκ. Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς α, έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z) = \alpha x y^2 \vec{i} + 3x^2 y \vec{j}$$

να είναι αστρόβιλο.

Απ. Έχουμε

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha x y^2 & 3x^2 y & 0 \end{vmatrix} = (6xy - 2\alpha xy)\,\vec{k}.$$

Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι όμως αστρόβιλο, επομένως

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow (6xy - 2\alpha xy)\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow 6xy = 2\alpha xy \Rightarrow \alpha = 3. \quad \square$$

Ασκ. Να υπολογιστεί η τιμή των σταθερών a και b, έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z) = ayz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} - bxy\,\vec{k}$$

να είναι αστρόβιλο.

Απ. Έχουμε

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ayz & xz & -bxy \end{vmatrix}$$

$$= (-bx - x)\,\vec{i} + (ay + by)\,\vec{j} + (z - az)\,\vec{k}.$$

Το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο, αν $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$, $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Οπότε

$$\left.\begin{array}{r} -bx - x = 0 \\ ay + by = 0 \\ z - az = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b + 1 = 0 \\ a + b = 0 \\ 1 - a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1. \end{array}$$

$\square$

* ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε συνάρτηση $F: U \to \mathbb{R}^m$ με

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)).$$

Αν οι μερικές παράγωγοι των $f_1, f_2, \dots, f_m$ υπάρχουν, τότε ορίζουμε τον πίνακα

$$J_F(X) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[D_j f_i(X)\right] = \begin{bmatrix} D_1 f_1(X) & \cdots & D_n f_1(X) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(X) & \cdots & D_n f_m(X) \end{bmatrix}$$

ο οποίος ονομάζεται <u>Ιακωβιανός πίνακας</u> της F (συμβ. $J_F(X)$)

Στην περίπτωση που $n=m$, μπορούμε να ορίσουμε και τη λεγόμενη <u>Ιακωβιανή ορίζουσα</u> της F (συμβ. $\Delta_F(X)$).

Παραδ. Έστω

$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\quad F(x_1,x_2)=(f_1(x_1,x_2),\ f_2(x_1,x_2))=(x_1^2+x_2^2,\ e^{x_1x_2})$

Τότε ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο σημείο $(1,1)$ θα είναι:

$$J_F(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\\ x_2e^{x_1x_2} & x_1e^{x_1x_2}\end{bmatrix}\Rightarrow J_F(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ e & e\end{bmatrix}$$

και η αντίστοιχη Ιακωβιανή ορίζουσα της F θα είναι:

$$\Delta_F(X)=\begin{vmatrix}2x_1 & 2x_2\\ x_2e^{x_1x_2} & x_1e^{x_1x_2}\end{vmatrix}=2x_1^2e^{x_1x_2}-2x_2^2e^{x_1x_2}=2(x_1^2-x_2^2)e^{x_1x_2}\Rightarrow\Delta_F(1,1)=0.$$

$\square$

Παραδ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad F(x_1,x_2)=\left(x_1x_2,\ \sin x_1,\ x_1^2x_2\right)$$

Έχουμε, τότε τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J_F(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ \cos x_1 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_F\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \pi \\ -1 & 0 \\ \pi^2 & \pi^2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Παραδ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(r,\theta) = (f_1(r,\theta), f_2(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Βρίσκουμε αρχικά τον Ιακωβιανό πίνακα

$$J_F(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς, η αντίστοιχη Ιακωβιανή ορίζουσα είναι

$$\Delta_F(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$\square$