

ΚΕΦ. 1:

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Διαφομετική ανάλυση μιας

πραγματικής μεταβλητής

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$t \mapsto X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Η παράγωγος της X είναι

$$\dot{X}(t) = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$$

* Ιδιότητες

$$1) \frac{d}{dt}(X(t) + Y(t)) = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}$$

$$2) \frac{d}{dt}(c \cdot X(t)) = c \cdot \frac{dX}{dt}$$

$$3) \frac{d}{dt}(f(t) \cdot X(t)) = \frac{df}{dt} \cdot X(t) + f(t) \cdot \frac{dX}{dt}$$

$$4) \frac{d}{dt}(X(t) \cdot Y(t)) = \dot{X}(t) \cdot Y(t) + X(t) \cdot \dot{Y}(t)$$

(κανόνας γινομένου $\uparrow$)

$$5) \frac{d}{dt}(X \circ f)(t) = \frac{d}{df} X(f) \cdot \frac{df}{dt}$$

(κανόνας αλυσίδας $\uparrow$)

όπου f διακεκριμένη πραγματική συνάρτ.

Παράδ.

Εστω $X(t) = (\sin 2t, \ln(1+t), t)$.

Τότε $\dot{X}(t) = (2\cos 2t, \frac{1}{1+t}, 1)$,

και $\ddot{X}(t) = (-4\sin 2t, -\frac{1}{(1+t)^2}, 0)$. □

Άσκ. Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτ. $\vec{r}(t) = e^{2t} \vec{i} + e^{-2t} \vec{j}$
 Ν.δ.ο. (να δείχτεί ότι) το διάνυσμα $\ddot{\vec{r}}(t)$ είναι παράλληλο με το $\vec{r}(t)$.

Απ Είναι $\dot{\vec{r}}(t) = 2e^{2t} \vec{i} - 2e^{-2t} \vec{j}$

Οπότε $\ddot{\vec{r}}(t) = 4e^{2t} \vec{i} + 4e^{-2t} \vec{j} = 4(e^{2t} \vec{i} + e^{-2t} \vec{j}) = 4 \cdot \vec{r}(t)$

και επομένως $\ddot{\vec{r}}(t) \parallel \vec{r}(t)$. □

Aus Av

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$$

v.d.o.

$$\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \sqrt{2}.$$

Am Exoque

$$\dot{\vec{r}}(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}$$

Koll

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

1.3

Apa

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin t) \vec{i} - (\cos t) \vec{j} + (\sin^2 t + \cos^2 t) \vec{k}$$

$$= \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \vec{k}.$$

Zuvers

$$\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} \\ = \sqrt{2}.$$

□

* Ευθείες και επιπεδα

Η παραμετρική εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο P και είναι παράλληλη με το διάν.

$\vec{OA} = \vec{a}$ είναι

$$X = P + t \cdot A$$

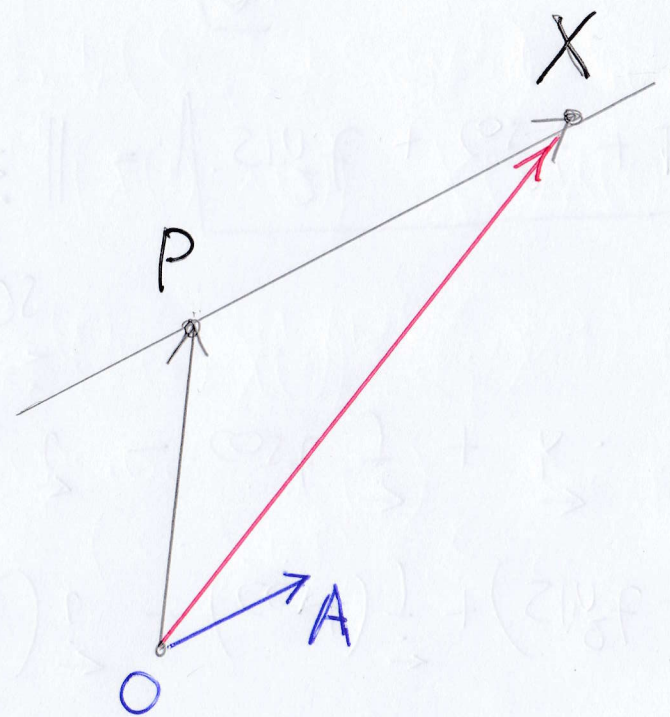
ή

$$\vec{OX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{OA}$$

ή

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$$

όπου $t \in \mathbb{R}$



$$(\text{αφαι } \vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OP} + t \cdot \vec{OA}).$$

Στον 3-χώρο ένα
επίπεδο (αντ. υπερεπίπεδο)

περιγράφεται ως εξής:

Το επίπεδο ή υπερεπίπεδο
είναι το σύνολο των σημείων
 X τ.ω. το διαν. $\vec{PX}$ να
είναι ορθογώνιο προς το $\vec{ON}$

δηλ.

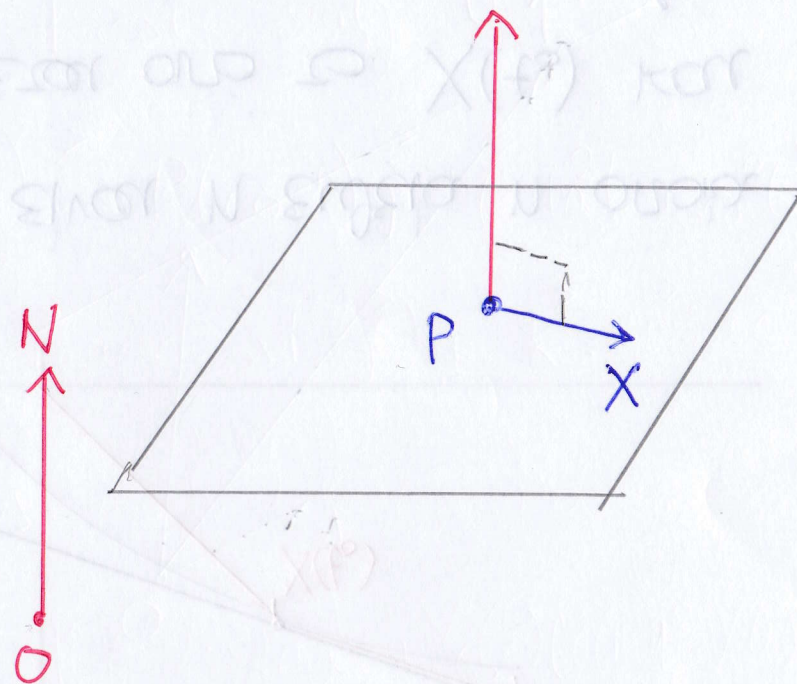
$$(X-P) \cdot N = 0$$

ή

$$X \cdot N = P \cdot N$$

(αφού

$$\vec{PX} \cdot \vec{ON} = 0 \Rightarrow (\vec{OX} - \vec{OP}) \cdot \vec{ON} = 0$$



* Καμπύλες

Οφ (Παραμετρική) καμπύλη

συνιστάται η διαν. συνάρτηση

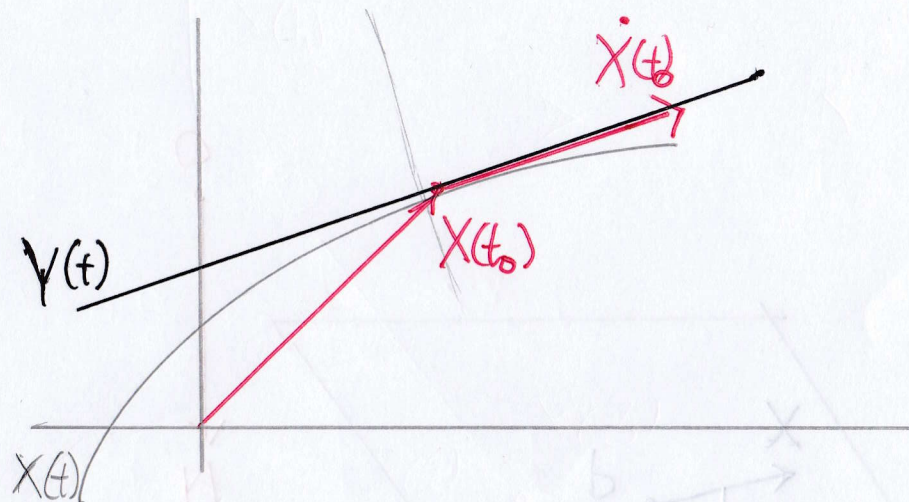
$$X: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

όπου I διδομένη μέσα στο $\mathbb{R}$.

Αν η διαν. συνάρτηση X είναι διαφορίσιμη και $\dot{X}(t) \neq 0$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την εφαπτομένη ευθεία ως

Εξήν)

$$Y(t) = X(t_0) + t \dot{X}(t_0)$$



δηλ. είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το $X(t_0)$ και είναι παράλληλη με το $\dot{X}(t_0)$. Επίσης μια ευθεία καλείται στην εφαπτομένη στο $X(t_0)$ και λέγεται καύση στην κοίτη στο $X(t_0)$.

Παραδ. Έστω η καμπύλη

$$X(t) = (\sin t, \cos t)$$

Τότε η εξίσωση της

εφαπτόμενης ευθείας

στην καμπύλη $X(t)$

στο χρόνο $t = \frac{\pi}{3}$

θα είναι

1.7

$$Y(t) = X\left(\frac{\pi}{3}\right) + t \dot{X}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$Y(t) = \left(\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}\right) + t \left(\cos \frac{\pi}{3}, -\sin \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$Y(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) + t \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Δηλ., οι παραμετρικές εξισώσεις

της εφαπτόμενης ευθείας θα είναι

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t \\ y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Ορ. Αν η διανυσματική συνάρτ. $X(t)$ είναι διαφορίσιμη, τότε η παράγωγος $\dot{X}(t)$ λέγεται διάνυσμα ταχύτητας.

της καμπύλης $X(t)$. Το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας ονομάζεται ταχύτητα $v(t)$ της $X(t)$, δηλ.

$$v(t) = \|\dot{X}(t)\|.$$

Ορ. Αν το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{X}(t)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτ. τότε η $2^{\text{η}}$ παράγωγος $\ddot{X}(t)$ καλείται διάνυσμα επιταχυνσης της $X(t)$. Ομοίως το μέτρο του διανύσματος της επιταχυνσης ονομάζεται επιταχυνση $a(t)$ της $X(t)$ δηλ.

$$a(t) = \|\ddot{X}(t)\|.$$

Παρατήρηση Ισχύει

ότι

$$\ddot{X}(t) = \frac{d}{dt} \dot{X}(t)$$

και

$$\|\ddot{X}(t)\| \neq \frac{d}{dt} \|\dot{X}(t)\|$$

Ορ: Έστω ένα διάστημα I του $\mathbb{R}$,
και έστω $a, b \in I$. Τότε το
μήκος της καμπύλης $X(t)$ μεταξύ
των σημείων a και b ορίζεται ως

$$\int_a^b v(t) dt = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt$$

Ορ. Το μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ a και t (όπου $a, t \in I, a < t$) ορίζει μια νέα παραμέτρο s σαν συνάρτηση της αρχικής παραμέτρου t , ως εξής:

$$s(t) = \int_a^t v(\tau) d\tau$$

Ανών η $s(t)$ είναι αυξανόμενη, διαφορίσιμη και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα I , τότε έχει μια μοναδική αντίστροφη συνάρτ. την οποία συμβολίζουμε με $t(s)$. Από τη διαφορίσιμη αντίστροφη συνάρτ. έχουμε

$$\frac{d}{ds} t(s) = \left[\frac{d}{dt} s(t) \right]^{-1} = \|\dot{X}(t)\|^{-1}$$

όταν $\|\dot{X}(t)\| \neq 0$.

Θέωρ Αν η καμπύλη $X(t)$ είναι
συνεχής και διαφορίσιμη και
 $\| \dot{X}(t) \| \neq 0$, τότε η καμπύλη

$$Y(s) = X(t(s))$$

είναι συνεχής και διαφορίσιμη
και

$$\| \dot{Y}(s) \| = 1.$$

Πόρισμα: Ισχύει $\dot{Y}(s) \cdot \ddot{Y}(s) = 0$

Απόδ Από το τελευταίο θεω-
ρήμα, γνωρίζουμε ότι

$$\| \dot{Y}(s) \| = 1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\dot{Y}(s) \cdot \dot{Y}(s)} = 1 \Rightarrow$$

$$\dot{Y}(s) \cdot \dot{Y}(s) = 1 \Rightarrow$$

$$\ddot{Y}(s) \cdot \dot{Y}(s) + \dot{Y}(s) \cdot \ddot{Y}(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{Y}(s) \cdot \ddot{Y}(s) = 0$$



Ορ. Όταν μια καμπύλη $\gamma(s)$ έχει
για παράμετρο το μήκος τόξου s ,
τότε η καμπυλότητα της ορίζεται
ως

$$K(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

και, όταν $\|\ddot{\gamma}(s)\| \neq 0$, η ακτίνα
καμπυλότητας της ορίζεται ως

$$R(s) = \frac{1}{\|\ddot{\gamma}(s)\|} = \frac{1}{K(s)}$$

Ορ. Όταν μια καμπύλη $\chi(t)$ έχει
παράμετρο t και $\|\dot{\chi}(t)\| \neq 0$,
τότε η καμπυλότητα της ορίζεται
ως

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{\chi}(t)\|} \cdot \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{\chi}(t)\|} \dot{\chi}(t) \right) \right\|$$

και, όταν $K(t) \neq 0$, η ακτίνα
καμπυλότητας της, ορίζεται ως

$$R(t) = \frac{1}{K(t)}$$

Παράδ. Έστω η καμπύλη

$$X(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Τότε

$$\dot{X}(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \|\dot{X}(t)\| = \sqrt{2}$$

και

$$\ddot{X}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), \quad \|\ddot{X}(t)\| = 1$$

Αρα

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \ddot{X}(t) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}^2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

και

$$R(t) = \frac{1}{K(t)} = 2. \quad \square$$

1.13

Ασκ Να βρεθεί η καμπυλότητα και η ακτινα καμπυλότητας της καμπύλης

$$X(t) = (\sin 3t, \cos 3t).$$

Αν $\dot{X}(t) = (3\cos 3t, -3\sin 3t).$

$$\|\dot{X}(t)\| = \sqrt{9\cos^2 3t + 9\sin^2 3t} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\ddot{X}(t) = (-9\sin 3t, -9\cos 3t):$$

$$\|\ddot{X}(t)\| = \sqrt{81\sin^2 3t + 81\cos^2 3t} = \sqrt{81} = 9.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{3} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \dot{X}(t) \right) \right\| = \frac{1}{3^2} \cdot 9 = 1. \end{aligned}$$

και

$$R(t) = \frac{1}{K(t)} = 1. \quad \square$$

Ασκ. Να δείξετε, αν τα
διανύσματα της ταχύτητας

$\dot{X}(t) \neq 0$ και της επιτάχυνσης

$\ddot{X}(t)$ είναι ορθογώνια για

κάθε t , και $\|\dot{X}(t)\| \neq 0$,

τότε η ταχύτητα $v(t)$ θα

είναι σταθερή.

Απ. Αφού $\dot{X}(t) \perp \ddot{X}(t)$, έχουμε

$$\dot{X}(t) \cdot \ddot{X}(t) = 0.$$

Αλλά

$$v(t) = \|\dot{X}(t)\| = \sqrt{\dot{X}(t) \cdot \dot{X}(t)} \Rightarrow$$

$$(v(t))^2 = \|\dot{X}(t)\|^2 = \dot{X}(t) \cdot \dot{X}(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[(v(t))^2] = \ddot{X}(t) \cdot \dot{X}(t) + \dot{X}(t) \cdot \ddot{X}(t) \Rightarrow$$

$$\cancel{2} v(t) \cdot \dot{v}(t) = \cancel{2} \dot{X}(t) \cdot \ddot{X}(t) \Rightarrow$$

$$v(t) \cdot \dot{v}(t) = 0$$

$$\dot{v}(t) = 0$$

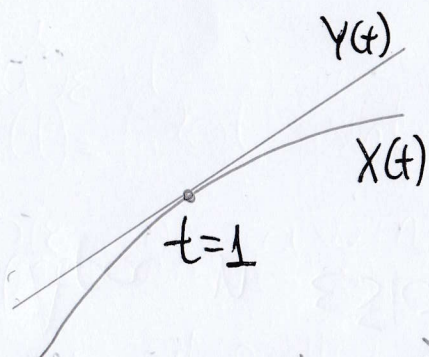
Συν. η ταχύτητα $v(t)$ είναι σταθερή.



Ασκ Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης για την καμπύλη

$$X(t) = (e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t), \text{ για } t=1.$$

Απ. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι



$$Y(t) = X(1) + t \dot{X}(1) \quad \Rightarrow$$

$$Y(t) = (e^3, e^{-3}, 3\sqrt{2}) + t(3e^3, -3e^{-3}, 3\sqrt{2})$$

η οποία έχει παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^3 + 3e^3 t \\ y_2(t) = e^{-3} - 3e^{-3} t \\ y_3(t) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Ασκ. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της εφαπτομένης για την καμπύλη $\chi(t) = (t, 2t, t^2)$ στο σημείο $(1, 2, 1)$.

Απ. Το σημείο $(1, 2, 1)$ αντιστοιχεί στο $t=1$, γιατί $\begin{cases} t=1 \\ 2t=2 \\ t^2=1 \end{cases}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $t_0=1$, θα είναι

$$\gamma(t) = \chi(1) + t \dot{\chi}(1) \quad \Rightarrow$$

$$\gamma(t) = (1, 2, 1) + t(1, 2, 2)$$

και επομένως οι παραμετρικές της εξισώσεις είναι

$$\begin{cases} y_1(t) = 1 + t \\ y_2(t) = 2 + 2t \\ y_3(t) = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

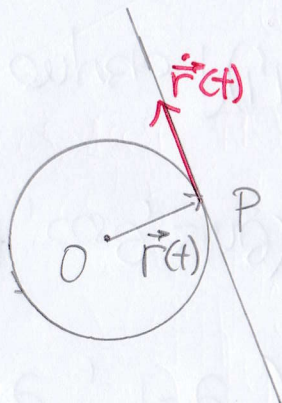


Ασκ Ν. δ. ο. η εφαιζόμενη
στο τυχαίο σημείο P του κύκλου

$$C: \vec{r}(t) = \rho \cos t \vec{i} + \rho \sin t \vec{j}$$

είναι κάθετη στην ακτίνα $\vec{OP}$.

Απ



Είναι $\vec{OP} = \vec{r}(t)$ και το
εφαιζόμενο διάνυσμα της C

στο σημείο P είναι το

$$\dot{\vec{r}}(t) = -\rho \sin t \vec{i} + \rho \cos t \vec{j}$$

Συνεπώς

$$\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = -\rho^2 \cos t \sin t + \rho^2 \sin t \cos t = 0$$

δηλ.

$$\vec{r}(t) \perp \dot{\vec{r}}(t).$$

□

Ασκ α). Ν.δο οι καμπύλες

$$c_1: \vec{r}_1(t) = (e^t, e^{2t}, 1-e^{-t})$$

$$c_2: \vec{r}_2(\theta) = (1-\theta, \cos\theta, \sin\theta)$$

τέμνονται στο σημείο $P(1,1,0)$.

β) Να βρεθεί η γωνία
μεταξύ των εφαπτομένων
τους στο σημείο αυτό.

Απ α) Το $P \in c_1$ για $t=0$, γιατί

$$\begin{cases} 1 = e^t \\ 1 = e^{2t} \\ 0 = 1 - e^{-t} \end{cases}$$

Το $P \in c_2$ για $\theta=0$, γιατί

$$\begin{cases} 1 = 1 - \theta \\ 1 = \cos\theta \\ 0 = \sin\theta \end{cases}$$

1.18

$$\beta) \dot{\vec{r}}_1(t) = (e^t, 2e^{2t}, 1e^{-t}) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}}_1(0) = (e^0, 2e^0, e^0) \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{r}}_1(0) = (1, 2, 1) \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}_1(0)\| = \sqrt{6}$$

$$\dot{\vec{r}}_2(\theta) = (-1, -\sin\theta, \cos\theta) \Rightarrow$$

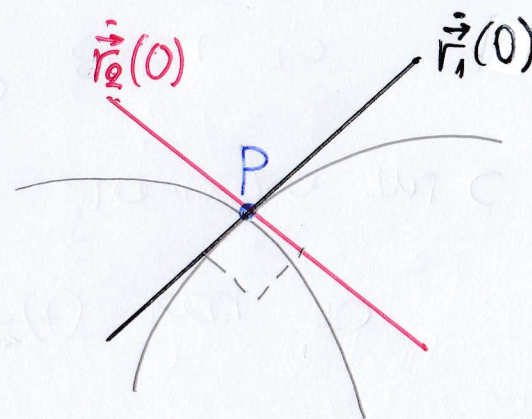
$$\dot{\vec{r}}_2(0) = (-1, 0, 1) \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}_2(0)\| = \sqrt{2}$$

Επομένως

$$\cos\omega = \frac{\dot{\vec{r}}_1(0) \cdot \dot{\vec{r}}_2(0)}{\|\dot{\vec{r}}_1(0)\| \cdot \|\dot{\vec{r}}_2(0)\|} = \frac{-1+0+1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = 0.$$

Άρα

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$



Ασκ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \vec{r}(t) dt$ όπου

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{t+1}\vec{j} - e^t\vec{k}.$$

Αν. $\int_0^1 \vec{r}(t) dt = \left(\int_0^1 t dt \right) \vec{i} + \left(\int_0^1 \sqrt{t+1} dt \right) \vec{j} + \left(\int_0^1 (-e^t) dt \right) \vec{k}$

$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^1 \vec{i} + \left[\frac{(t+1)^{3/2}}{3/2} \right]_{t=0}^1 \vec{j} + \left[-e^t \right]_{t=0}^1 \vec{k}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \vec{j} + (-e + 1) \vec{k}.$$



Ασκ Να βρεθεί η διαδρομή κίνησης $\vec{r}(t)$, αν

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2\cos t, -t\sin t^2, 2t) \text{ και } \vec{r}(0) = (1, 0, 3).$$

Απ. Ολοκληρώνοντας την $\dot{\vec{r}}(t)$ έχουμε

$$\vec{r}(t) = (2\sin t + c_1, \frac{1}{2}\cos t^2 + c_2, t^2 + c_3)$$

Ομως

$$\vec{r}(0) = (c_1, \frac{1}{2} + c_2, c_3) \Rightarrow$$

$$(1, 0, 3) = (c_1, \frac{1}{2} + c_2, c_3) \Rightarrow$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = 3$$

Άρα

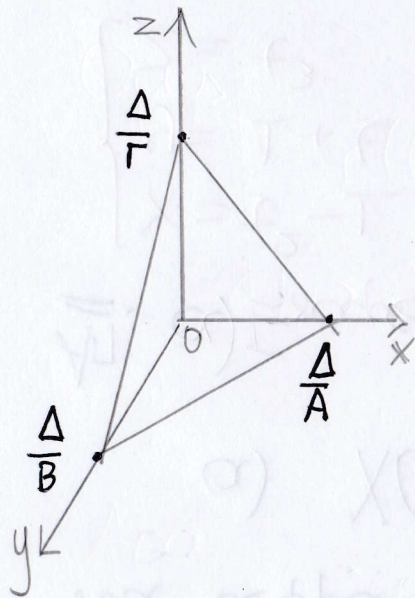
$$\vec{r}(t) = (2\sin t + 1, \frac{1}{2}\cos t^2 - \frac{1}{2}, t^2 + 3).$$



* Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

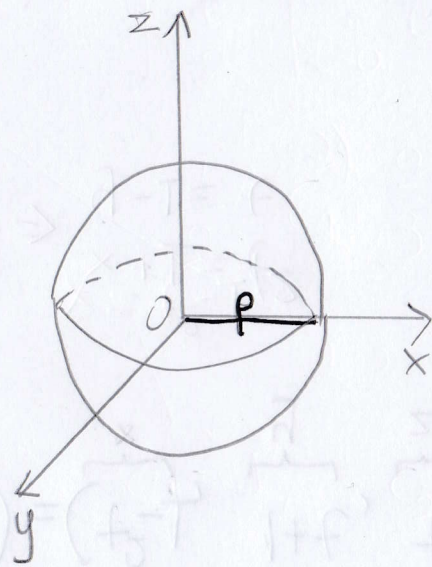
1) Επίπεδο

$$Ax + By + Cz = \Delta$$



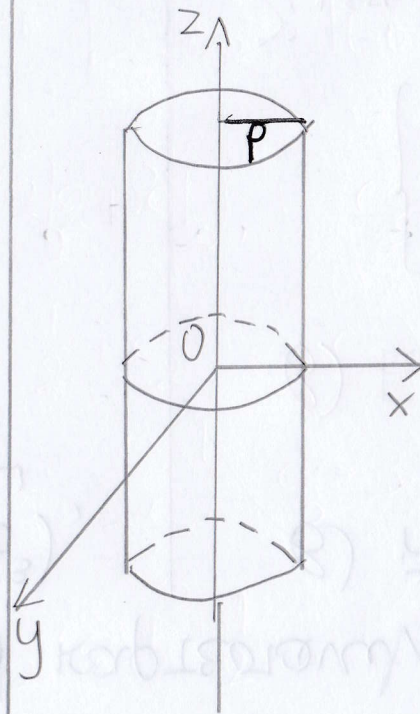
2) Σφαίρα

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$



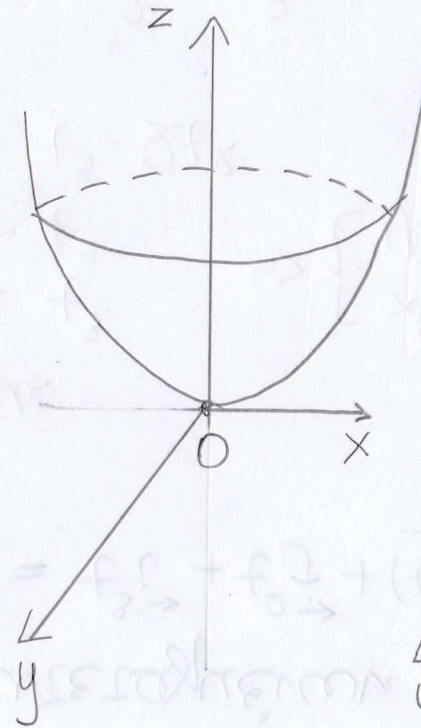
3) Κυλινδρος

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



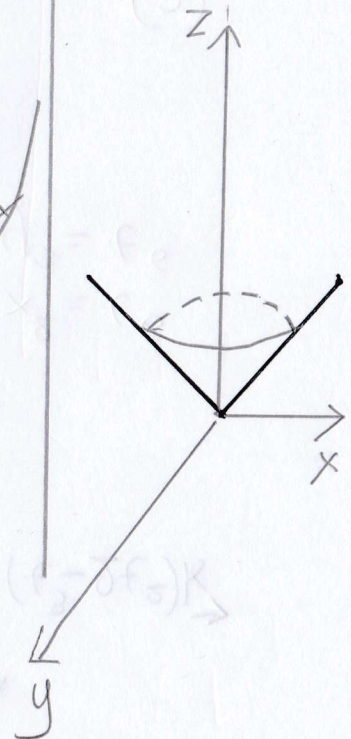
4) Παραβολοειδές

$$z = x^2 + y^2$$



5) Κώνος

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ασκ Θεωρούμε τις παρακάτω καμπύλες υπό μορφή παραμετρικών εξισ.
Να εκφραστούν υπό μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων.

$$\alpha) \chi(t) = (\underbrace{t^2 - 1}_x, \underbrace{1+t}_y, \underbrace{t^3}_z),$$

Απ. α) Έχουμε

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 1 + t \\ z = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = t^2 \\ y - 1 = t \end{cases}$$

Οπότε, αν' τις δύο πρώτες,

$$(x+1) = (y-1)^2 \quad (1)$$

Επίσης, αν' τις δύο τελευταίες

$$z = (y-1)^3 \quad (2)$$

Η τριμή των επιφανειών
(1) και (2) είναι η καμπύλη χ .

$$\beta) \vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + t^2 \vec{j} + (t^3 - 2t^2) \vec{k}$$

β) Έχουμε

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t^3 - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^6 \\ y^3 = t^6 \end{cases}$$

Συνεπώς

$$x^2 = y^3 \quad (3)$$

και

$$z = x - 2y \quad (4)$$

Η τριμή των επιφανειών
(3) και (4) είναι η καμπύλη $\vec{r}(t)$.



Ασκ Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης c που δίνεται ως τομή των επιφανειών

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

$$S_2: z = 1$$

Απ Προφανώς η καμπύλη c είναι ένας κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας S_1 και επιπέδου S_2 . Αν στην S_1 θέσουμε $z=1$ παίρνουμε

$$x^2 + y^2 + 1 = 5 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 4. \quad (\text{καρτεσιανή εξίσωση})$$

Άρα

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} \quad (\text{Παραμετρική εξίσωση})$$

όπου $0 \leq t \leq 2\pi$.



Ασκ Έστω η καμπύλη c με διανωματική εξίσωση (δίνεται παραμετρική εξίσωση)

$$c: \vec{r}(t) = a \cos t \vec{i} + b \sin t \vec{j} + t \vec{k},$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, a, b σταθερές. Να εκφραστεί υπό μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων, ως τμήμα επιφανειών.

Απ. Έχουμε

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Απ' τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει

$$y = b \sin z \quad (2)$$

Άρα η c έχει καρτεσιανές εξισώσεις τις (1) και (2). □

Ασκ. Θεωρούμε καμπύλη c η οποία είναι τομή των επιφανειών με καρτεσιανές εξισώσεις

$$2x^2 + y - z = 0 \text{ και } 2x - y - z = 0.$$

Να βρεθεί η διανυσματική/παραμετρική εξίσωση της c .

Απ. Θέτοντας $x = t$, προκύπτει

$$\begin{cases} y + z = -2t^2 \\ y + z = 2t \end{cases}$$

Τότε λύνοντας το σύστημα αυτό ως προς y και z βρίσκουμε

$$y = t - t^2, \quad z = t + t^2.$$

Επομένως η καμπύλη c έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - t^2 \\ z = t + t^2 \end{cases} \quad \text{ή διανυσμ. εξίσωση} \quad \vec{r}(t) = t\vec{i} + (t - t^2)\vec{j} + (t + t^2)\vec{k}$$

□

Απ Να βρεθεί το μήκος τόξου της καμπύλης

$$X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Απ Έχουμε

$$\dot{X}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \|\dot{X}(t)\| &= \sqrt{\dot{X}(t) \cdot \dot{X}(t)} = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cancel{\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cancel{\sin t \cos t} + \cos^2 t + 1)} = e^t \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Αρα το μήκος τόξου της καμπύλης μας θα είναι:

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{X}(t)\| dt = \int_0^t e^t \sqrt{3} dt = \sqrt{3} (e^t - 1).$$

Ασκ Η τροχιά ενός σημείου στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ έχει εξίσωση

$$x(t) = (a \cos t + b, a \sin t + \gamma)$$

όπου $t \in \mathbb{R}$ ο χρόνος και $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ σταθερές.

- Να δείξει ότι η ταχύτητα είναι σταθερή.
- Να βρεθεί το διάνυσμα της επιταχύνου για $t=0$.

Απ.

$$a) \dot{x}(t) = (-a \sin t, a \cos t) \Rightarrow v(t) = \|\dot{x}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

$$b) \ddot{x}(t) = (-a \cos t, -a \sin t) \Rightarrow \ddot{x}(0) = (-a, 0).$$



Ασκ. Η τροχιά ενός υλικού σημείου στα $\mathbb{R}^3$ έχει εξίσωση

$$\vec{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, b \omega t)$$

όπου $t \in \mathbb{R}$ ο χρόνος και

$a, b, \omega \in \mathbb{R}_+$ σταθερές.

Να βρεθούν

α) το διάνυσμα της ταχύτητας

β) η ταχύτητα

γ) το διάνυσμα της επιτάχυνσης

δ) η επιτάχυνση.

Απ

$$\alpha) \dot{\vec{r}}(t) = (-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t, b\omega)$$

$$\beta) v(t) = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + b^2 \omega^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2 \omega^2} = \omega \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\gamma) \ddot{\vec{r}}(t) = (-a\omega^2 \cos \omega t, -a\omega^2 \sin \omega t, 0)$$

$$\delta) a(t) = \|\ddot{\vec{r}}(t)\|$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + a^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^4} = a\omega^2.$$



Αγρ Η τροχιά ενός κινούμενου υλικού σημείου στο $\mathbb{R}^2$ είναι εφό:

$$\vec{r}(t) = (2\cos 2t, 3\cos t).$$

Να δείξει ότι το υλικό αυτό σημείο κινείται στην παραβολή

$$4y^2 - 9x - 18 = 0.$$

Αγρ. Έχουμε

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t \\ y(t) = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(2\cos^2 t - 1) \\ y = 3\cos t \end{cases} \Rightarrow x = 2\left[2\left(\frac{y}{3}\right)^2 - 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\left[2\frac{y^2}{9} - 1\right] \Rightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 2 \Rightarrow 9x = 4y^2 - 18 \Rightarrow 4y^2 - 9x - 18 = 0$$



$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \Rightarrow \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \Rightarrow \cos 2t = \cos^2 t - 1$$

αφα

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

κι εσχεύας

$$\cos(t+t) = \cos t \cdot \cos t - \sin t \cdot \sin t \Rightarrow$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2t = (1 - \sin^2 t) - \sin^2 t \Rightarrow 2\sin^2 t = 1 - \cos 2t \\ \cos 2t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t \Rightarrow 2\cos^2 t = \cos 2t + 1 \end{cases}$$