

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών  
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Τμήματος ΗΜΜΥ  
Ακαδ. Έτος 2023-2024

ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΥΛΙΚΩΝ

Διάλεξη 7  
Ηλεκτρική αγωγιμότητα στα μέταλλα


1

## Ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων

- Οι «μεγάλες» ερωτήσεις:
  - Πως προκύπτει ο νόμος του Ohm;
  - πως υπολογίζουμε την αγωγιμότητα των μετάλλων, που οφείλεται και πως εξαρτάται από τη θερμοκρασία;
  - Γιατί θερμαίνονται οι αντιστάσεις;

2

**Γενικά**  
**Νόμος του Ohm**  
 Η τάση είναι ανάλογη της έντασης του ρεύματος  
 $V(V)=R(\Omega) \cdot I(A)$   
 R αντίσταση του υλικού στη ροή ρεύματος

**Ειδική αντίσταση  $\rho$**    
 $\rho = \frac{R \cdot A}{L}$   
 $\rho$  ( $\Omega \cdot m$ ) χαρακτηριστική ιδιότητα ενός υλικού, ανεξάρτητη από μήκος, διατομή

Το αντίστροφο της ειδικής αντίστασης λέγεται **ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα,  $\sigma$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>**  
 $\sigma = \frac{1}{\rho}$

$\frac{V}{L} = \frac{I}{A} \cdot \rho = J \cdot \rho$

**Γενική μορφή νόμου του Ohm**  
 περιγράφει μακροσκοπικά την ηλεκτρική αγωγιμότητα των υλικών

$$J = \sigma E = \frac{E}{\rho}$$

Τυπικές τιμές ειδικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας

Μονωτές	Ημιαγωγοί	Μέταλλα
10 <sup>-20</sup> έως 10 <sup>-10</sup>	10 <sup>6</sup> έως 10 <sup>4</sup>	~ 10 <sup>7</sup>

**Πως προκύπτει ο νόμος του Ohm;**

3

## Ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα σε μέταλλα

- Πειραματικές μετρήσεις σε καθαρά μέταλλα

Μέταλλο (σε καθαρή μορφή)	Ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα (10 <sup>6</sup> S/m)	% σε σχέση με το χαλκό
Άργυρος (ασήμι), Ag	62.9	105.2
Χαλκός, Cu	59.8	100
Χρυσός, Au	42.6	71.2
Αλουμίνιο, Al	37.7	63
Ψευδάργυρος, Zn	16.9	28.3
Νικέλιο, Ni	14.6	24.4
Σίδηρος, Fe	10.3	17.2
Λευκόχρυσος, Pt	9.7	16.2

4

**Υπολογισμός πυκνότητας ρεύματος**

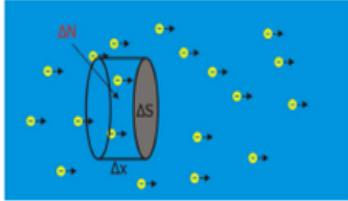
$$J = \frac{dI}{dS} \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

Αρκεί να βρεθεί το φορτίο  $\Delta Q$  που περνάει από την επιφάνεια  $\Delta S$ , σε χρόνο  $\Delta t$

Σε χρόνο  $\Delta t$ : Θα περάσουν όσα βρίσκονται εντός του κυλίνδρου  $\Delta x \Delta S$ :  $\Delta N = n \cdot \Delta x \cdot \Delta S$

Το αντίστοιχο φορτίο θα είναι:  $\Delta Q = e \Delta N = e \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta S$

**Έτσι:**

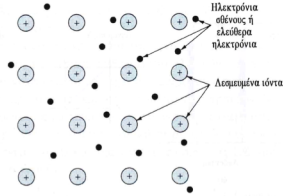
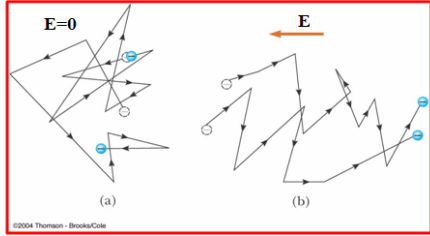
$$J = \frac{\Delta Q}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{e \cdot n \cdot \Delta S \cdot \Delta x}{\Delta S \cdot \Delta t} = e \cdot n \cdot u_D$$


5

**Αγωγιμότητα στα μέταλλα:**  
 Συμπεριφορά (κίνηση) ηλεκτρονίων όταν εφαρμόζεται ηλεκτρικό πεδίο

**Κλασικό μοντέλο (Drude) - Υποθέσεις:** Ηλεκτρόνιο-σωματίδιο

- Τα μέταλλα αποτελούνται από περιοδική τρισδιάστατη διάταξη **θετικών ιόντων** (ατομικός πυρήνας και ηλεκτρόνια των εσωτερικών στοιβάδων) με τα ηλεκτρόνια σθένους να κινούνται ελεύθερα
  - ✓ Νέφος ηλεκτρονίων ως ιδανικό ουδέτερο αέριο, η συνολική ενέργειά τους εξαρτάται από τη θερμοκρασία και την ενέργεια του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου
  - ✓ Τυχαία κίνηση στο χώρο με μέση θερμική ταχύτητα (απουσία ηλεκτρικού πεδίου)
  - ✓ Συγκρούσεις (ανελαστικές) με τα θετικά ιόντα του κρυστάλλου (ανταλλαγή ενέργειας)
  - ✓ Όταν εφαρμόζεται εξωτερικό πεδίο αποκτούν μία μέση ταχύτητα ολίσθησης με κατεύθυνση αντίθετη του πεδίου

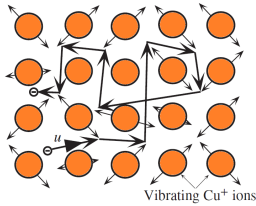



Σχηματική διάταξη των θετικών ιόντων και του ηλεκτρονικού νέφους ατόμων μετάλλου σε ένα επίπεδο, για μονοσθενή άτομα

α)  $E=0$ : Κίνηση ηλεκτρονίου για τυχαίες συγκρούσεις με μέση θερμική ταχύτητα  
 β)  $E \neq 0$ : Κατευθυνόμενη κίνηση ηλεκτρονίου (αντίθετη στο πεδίο) με μέση ταχύτητα ολίσθησης

6

## Μοντέλο Drude



$E=0$ , τυχαία κίνηση ηλεκτρονίων με θερμική ταχύτητα:

$$\frac{1}{2} m v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v_{th} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} \approx 10^5 \frac{m}{s} \quad @ \quad T = 300K$$

$$\vec{p}_{i,final} = \vec{p}_{i,initial} + \vec{F} dt$$

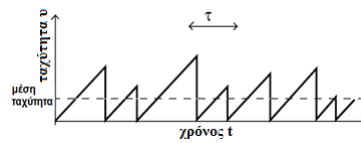
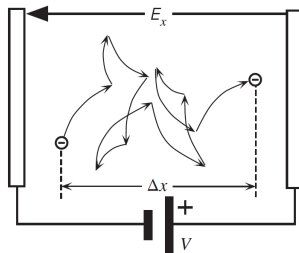
$$m \vec{v}_i = m \vec{u}_i + \vec{F}(t_i - t)$$

$$m \vec{v}_i = m \vec{u}_i - e \vec{E}(t_i - t)$$

$$\vec{v}_i = \vec{u}_i - \frac{e \vec{E}}{m}(t_i - t)$$

7

## Μοντέλο Drude



$$\vec{u}_d = \frac{1}{N} \sum_i \left[ \vec{u}_i + \frac{e \vec{E}}{m} (t_i - t) \right]$$

$$\vec{u}_d = \frac{1}{N} \sum_i \vec{u}_i + \frac{1}{N} \sum_i \frac{e \vec{E}}{m} (t_i - t)$$

$$\vec{u}_d = \frac{e \vec{E}}{m} \frac{1}{N} \sum_i (t_i - t)$$

$$\vec{u}_d = \frac{e \vec{E}}{m} \frac{1}{N} \sum_i (t_i - t)$$

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_i (t_i - t) \quad \text{Μέσος χρόνος σκέδασης}$$

$$\vec{u}_d = \frac{e \tau}{m} \vec{E}$$

8

**Αγωγιμότητα- Κλασικό Μοντέλο**

$$J = -env_d = \frac{ne^2\tau_m}{m} E$$

ή  $J = \sigma E$  νόμος του Ohm

Ειδική αγωγιμότητα  $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} = ne\mu$ ,

όπου  $\mu = \frac{e\tau}{m}$  ( $m^2V^{-1}s^{-1}$ ) είναι η ευκινησία του ηλεκτρονίου

εξαρτάται από το μέσο χρόνο ηρεμίας  $\tau$  που σχετίζεται με τους μηχανισμούς σκέδασης του ηλεκτρονίου

Μέση ελεύθερη διαδρομή  $\lambda_m$  σε χρόνο  $\tau$

$$\lambda_m = v\tau$$

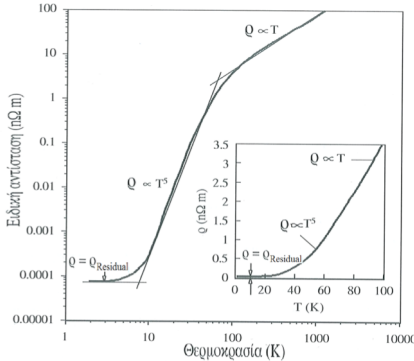
**Εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από τη θερμοκρασία**

$$v_{ther} \approx 10^5 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}mv_{ther}^2 = \frac{3}{2}kT \Rightarrow v_{ther} \propto \sqrt{T}$$

$$\tau = \frac{\lambda_m}{v_{ther}} \Rightarrow \tau \propto \frac{1}{\sqrt{T}} = T^{-1/2}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \Rightarrow \sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}} = T^{-1/2}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \rho \propto \sqrt{T}$$


**Πρόβλημα!!**  
Οι μετρήσεις δείχνουν ότι  $\rho \propto T$

9

## Μοντέλο Drude - πλεονεκτήματα

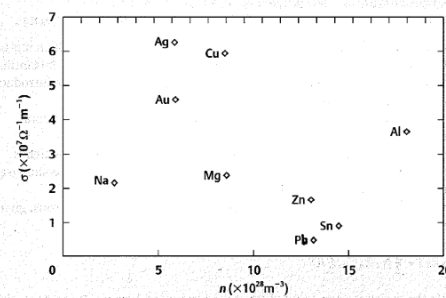
Το μοντέλο του Drude μας δίνει ενδιαφέροντα στοιχεία:

- Όταν εφαρμόζουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο όλα τα ηλεκτρόνια δεν πηγαίνουν προς το θετικό πόλο, αλλά τα περισσότερα κινούνται όπως θέλουν!!
- Μπορεί να εξηγηθεί η αντίσταση, όπως και η θέρμανση των αγωγών όταν αυτοί διαρέονται από ρεύμα.
- Καταλήγει στο νόμο του Ohm
- Προβλέπει σωστές τιμές στις αγωγιμότητες των μετάλλων.

10

## Προβλήματα του κλασικού μοντέλου

- Πρόβλημα 1: δεν εξηγεί τις διαφορετικές αγωγιμότητες μεταξύ των μετάλλων
- Πρόβλημα 2: δεν μπορεί να δικαιολογήσει την αγωγιμότητα μερικών κραμάτων (π.χ. Νικελοχρώμιο το οποίο έχει 10 φορές μεγαλύτερη αγωγιμότητα απ'ότι το νικέλιο και το χρώμιο)
- Πρόβλημα 3: η εξάρτηση της αγωγιμότητας είναι (πειραματικά) αντιστρόφως ανάλογη με τη θερμοκρασία (το κλασικό μοντέλο προβλέπει  $T^{-1/2}$ )
- Πρόβλημα 4: η ειδική θερμοχωρητικότητα



11

### Κβαντικό μοντέλο:

Ηλεκτρόνιο:-κύμα

• Ηλεκτρόνια σε πηγάδι δυναμικού

✓ Κβαντισμένες (συγκριμένες) ενεργειακές καταστάσεις (δεν ισχύει το  $(3/2) kT$ )

✓ Καταλαμβάνουν ενεργειακές καταστάσεις σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli

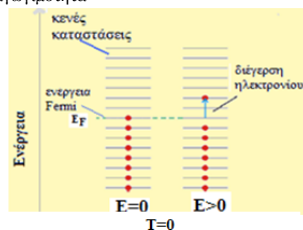
✓ Αποκτούν πρόσθετη ενέργεια όταν εφαρμόζεται ηλεκτρικό πεδίο

• **Συνέπειες για τη θεωρία αγωγιμότητας στα μέταλλα**

✓ Όλες οι συγκρούσεις προϋποθέτουν μόνο ηλεκτρόνια

που βρίσκονται ενεργειακά κοντά στη στάθμη Fermi

✓ γιατί μόνο αυτά τα ηλεκτρόνια μπορούν να διεγερθούν σε υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις και να συμμετάσχουν στην αγωγιμότητα



Σε θερμοκρασία  $T=0K$   
 $E_F(0) \sim 5-10 \text{ eV}$

### Θερμική ταχύτητα Fermi

$$E_F = \frac{1}{2} m v_F^2, \quad v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{m}$$

$$\tau = \frac{\lambda_m(E_F)}{v_F}$$

$$\sigma = \frac{q^2 n \lambda_m(E_F)}{m v_F}$$

$$\rho = \frac{m v_F}{e^2 n \lambda_m(E_F)}$$

$$\lambda_F = \frac{h}{p_F} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_F}} \sim 3-5 \text{ \AA}$$

$\lambda_F$  ανεξάρτητη της θερμοκρασίας  $\Rightarrow$

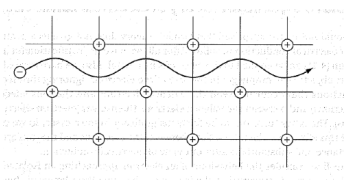
$\rho$  ανεξάρτητο της θερμοκρασίας

**Πρόβλημα!!**

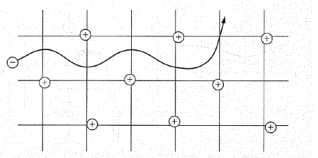
12

**Αγωγιμότητα μετάλλων**  
**Κβαντικό μοντέλο**  
 Κβαντομηχανικά το ηλεκτρόνιο θα περνούσε μέσα από έναν τέλειο κρύσταλλο χωρίς σκέδαση

Τότε πως εξηγείται η αντίσταση των μετάλλων;



Τελικά τα ηλεκτρόνια σκεδάζονται λόγω των θερμικών ταλαντώσεων των μεταλλικών ιόντων (και όχι μόνο!)



**Μέση ελεύθερη διαδρομή της τάξης του 1 μm**

Οπότε η ευκινησία του ηλεκτρονίου  $\mu = e\tau/m$  σχετίζεται με το μέσο χρόνο  $\tau$  μεταξύ των σκεδάσεων που οφείλονται σ' αυτή τη διαδικασία.

13

**Αγωγιμότητα μετάλλων**  
 Η μέση ελεύθερη διαδρομή θα δίνεται από τον τύπο:

$$\lambda = \frac{1}{n_{ion} \cdot A}$$

Όπου  $n_{ion}$  η πυκνότητα των ιόντων στο μέταλλο.  
 Στο **κλασικό μοντέλο**,  $A$  είναι η διάσταση του ιόντος  
**Άρα  $A$  ανεξάρτητο της  $T$**

Στο **κβαντικό μοντέλο**,  $A$  είναι η σφαίρα γύρω από την οποία ταλαντώνονται λόγω θερμότητας τα ιόντα  
**Άρα  $A$  εξαρτάται από την  $T$  (ευθέως ανάλογα)**

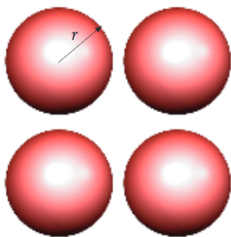
$$A \propto T \Rightarrow \lambda \propto \frac{1}{T}$$

**Συμπερασματικά**

$\rho \propto T$       **Συμφωνία με το πείραμα**

**Κλασικό μοντέλο**

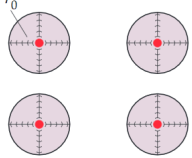
(a)



$A = \pi r^2$

**Κβαντικό μοντέλο**

(b)



$A = \pi r_0^2$

14

**Πειραματική ηλεκτρική ειδική αντίσταση μετάλλων  
Εξάρτηση από τη θερμοκρασία και τη δομή**

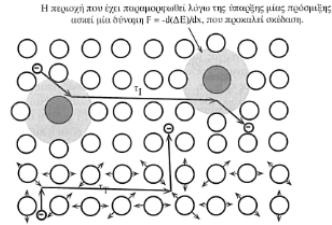
Στα μέταλλα με ατέλειες τα ηλεκτρόνια σκεδάζονται λόγω των θερμικών ταλαντώσεων των μεταλλικών ιόντων μέσος χρόνος σκέδασης  $\tau_L$

➢ των κρυσταλλικών ατελειών (σημειακές, γραμμικές, επιφανειακές)

μέσος χρόνος σκέδασης  $\tau_I$

Συνεπώς ο χρόνος σκέδασης  $\tau = \frac{1}{\tau_L} + \frac{1}{\tau_I}$

Η ευκινησία  $\mu = \frac{1}{e m_L} + \frac{1}{e m_I}$



Αναπαράσταση της σκέδασης λόγω των ατελειών (προσμίξεις) και της σκέδασης λόγω των θερμικών ταλαντώσεων

Η ολική ειδική αντίσταση είναι το άθροισμα α) της ειδικής αντίστασης του καθαρού με τέλεια κρυσταλλική δομή μετάλλου,  $\rho_{phonon}(T)$ , που εξαρτάται από τη θερμοκρασία και β) των επί μέρους αυξήσεων της ειδικής αντίστασης που οφείλονται στους διάφορους τύπους ατελειών του κρυστάλλου,  $\rho_{imp}$  ανεξάρτητη της θερμοκρασίας

$$\rho_{ολ} = \rho_{phonon}(T) + \rho_{imp} \quad \text{νόμος του Matthiessen}$$

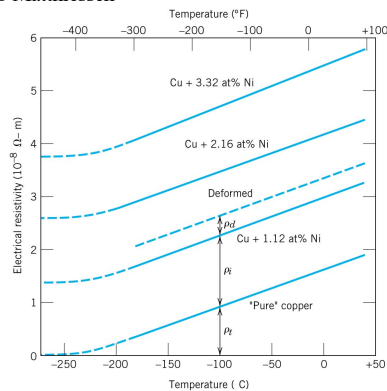
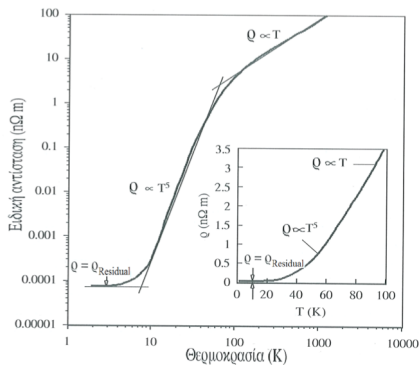
$$\frac{1}{e \mu} = \frac{1}{e m_L} + \frac{1}{e m_I}$$

Η θερμική συνιστώσα  $\rho_{phonon}(T)$  οφείλεται στις συγκρούσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων και δονούμενων θετικών ιόντων στο κρυσταλλικό πλέγμα

15

**Εξάρτηση από τη θερμοκρασία και τη δομή**

$$\rho_{ολ} = \rho_{phonon}(T) + \rho_{imp} \quad \text{νόμος του Matthiessen}$$



Για  $T > 120K$   $\rho_T = \rho_{0C}(1 + \alpha T)$ ,  
όπου  $\rho_{0C}$  η ειδική αντίσταση για  $T=0^{\circ}C$ ,  
 $\alpha$  είναι ο θερμοκρασιακός συντελεστής της  $\rho$   
Σε χαμηλές  $T$ ,  $\rho \propto T^5$   
Σε  $T < 20K$   $\rho = \rho_{\text{παραμένουσα}}$

Ειδική αντίσταση  $\rho$  αυξάνει με:  
-- θερμοκρασία  
-- wt% ποσοστό πρόσμιξης  
-- % βαθμός παραμόρφωσης

16