ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$, $\coth x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$.

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, $\cosh(-x)=\cosh x$, $\sinh(-x)=-\sinh x$.

$\int f'(x)dx=f(x)+c$, $\int \lambda f(x)dx=\lambda\int f(x)dx$, $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

$\int 0dx=c$, $\int dx=x+c$	$\int \sinh x dx=\cosh x+c$
$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $n\neq -1$	$\int \cosh x dx=\sinh x+c$
$\int \dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$	$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}dx=\tanh x+c$
$\int e^x dx=e^x+c$	$\int \dfrac{1}{\sinh h^2 x}dx=-\coth x+c$
$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+c$
$\int \sin x dx=-\cos x+c$	$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+c$
$\int \cos x dx=\sin x+c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\cosh^{-1}\dfrac{x}{a}+c=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert+c$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\sinh^{-1}\dfrac{x}{a}+c=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$	

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Για $\sqrt{a^2-x^2}$ θέτουμε $x=a\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=a\cos t$, $0\le t\le\pi$.

Για $\sqrt{a^2+x^2}$ θέτουμε $x=a\sinh t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=a\tan t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Για $\sqrt{x^2-a^2}$ -//- $x=a\cosh t$, $t\ge 0$ ή $x=\dfrac{a}{\cos t}$, $0\le t\le\pi$ ή $x=\dfrac{a}{\sin t}$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

$\int_\beta^a f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$, $\int_a^a f(x)dx=0$,

$\int_\beta^a f(x)dx=-\int_a^\beta f(x)dx$, $\int_a^\beta f(x)dx=\int_a^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$, $a,\beta,\gamma\in\Delta_f$.

$\int_a^\beta\left(\kappa f(x)+\lambda g(x)\right)dx=\kappa\int_a^\beta f(x)dx+\lambda\int_a^\beta g(x)dx$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,\beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx\ge 0$.

Αν $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[a,\beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx\le\int_a^\beta g(x)dx$.

$\left\lvert\int_a^\beta f(x)dx\right\rvert\le\int_a^\beta\lvert f(x)\rvert dx$. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(a)$, $\int_a^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(a)$.

$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{m\to+\infty}\int_a^m f(x)dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{m\to-\infty}\int_m^a f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^{+\infty}f(x)dx$

$\int_a^\beta f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{\beta-\varepsilon}f(x)dx$, $\int_a^\beta f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^\beta f(x)dx$, $\int_a^\beta f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{\gamma-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{\gamma+\varepsilon_2}^\beta f(x)dx$

Εμβαδόν: $E(D)=\int_a^\beta |y(x)|dx$.

Αν $D=\{(x,y):\ a\le x\le \beta,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ τότε $E(D)=\int_a^\beta |y_2(x)-y_1(x)|dx$.

Αν $D=\{(x,y):\ a\le y\le \beta,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$ τότε $E(D)=\int_a^\beta |x_2(y)-x_1(y)|dy$.

Όγκος: $V=\int_a^\beta \pi\left[f(x)\right]^2 dx$.

Αν $D=\{(x,y):\ a\le x\le \beta,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, τότε ο **όγκος** του στερεού

γύρω από τον άξονα των *x* είναι $V=\int_a^\beta \pi\left[y_2^2(x)-y_1^2(x)\right]dx$,

γύρω από τον άξονα των *y* είναι $V=\int_a^\beta 2\pi|x|\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx$.

Αν $D=\{(x,y):\ a\le y\le \beta,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$, τότε ο **όγκος** του στερεού

γύρω από τον άξονα των *x* είναι $V=\int_a^\beta 2\pi|y|\left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy$,

γύρω από τον άξονα των *y* είναι $V=\int_a^\beta \pi\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy$.

Για το **εμβαδόν *E*** γύρω από τον άξονα των *x* ισχύει:

αν $y=y(x)$, $x_1\le x\le x_2$,τότε $E=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi|y(x)|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$,

αν $x=x(y)$, $y_1\le y\le y_2$, τότε $E=\int_{y_1}^{y_2} 2\pi|y|\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$,

αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, τότε $E=\int_{t_1}^{t_2} 2\pi|y(t)|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.

Για το **εμβαδόν *E*** γύρω από τον άξονα των *y* ισχύει:

αν $y=y(x)$, $x_1\le x\le x_2$, τότε $E=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi|x|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$,

αν $x=x(y)$, $y_1\le y\le y_2$, τότε $E=\int_{y_1}^{y_2} 2\pi|x(y)|\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$,

αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$,τότε $E=\int_{t_1}^{t_2} 2\pi|x(t)|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.

Για το **μήκος *L*** μιας γραμμής (καμπύλης) *c* του επιπέδου *xy* ισχύει:

αν $y=y(x)$, $x_1\le x\le x_2$, τότε $L=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$,

αν $x=x(y)$, $y_1\le y\le y_2$, τότε $L=\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$,

αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, τότε $L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.

Έργο: $W=\int_{x_A}^{x_B} F dx$. **Ολική καταναλωμένη ενέργεια**: $W=\int_a^\beta P(t)dt$, $t\in[a,\beta]$.

$\lim(ca_n) = c\lim a_n,\ c\ \sigma\tau\alpha\theta.$ $\lim(a_n+\beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n\cdot\beta_n) = \lim a_n \cdot \lim\beta_n$ $\lim\frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim\beta_n},\ \lim\beta_n\neq 0$ $\lim {a_n}^k = (\lim a_n)^k$ $\lim\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n},\ \lim a_n \geq 0$ $\lim\lvert a_n\rvert = \lvert\lim a_n\rvert$	$\lim\left(c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0\right) = \lim\left(c_k n^k\right)$ $\lim\frac{c_k n^k + c_{k-1}n^{k-1}+\ldots+c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1}n^{m-1}+\ldots+d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_m}\lim n^{k-m}$

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_1+(n-1)d\right] = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(k-1)d\right] = \frac{\left[2a_1+(n-1)d\right]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}a_1\lambda^{n-1} = a_1\lambda^0+a_1\lambda^1+a_1\lambda^2+\ldots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_1\lambda^{k-1} = a_1\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Για τη *γεωμετρική* σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $\lvert\lambda\rvert<1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,

αν $\lvert\lambda\rvert\geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Αν $r=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ή $r=\lim\sqrt[n]{a_n}>1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert=k$ ή $\lim\sqrt[n]{a_n}=k$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ είναι $R=\frac{1}{k}$.

Για $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x\in(-1,1)$, ισχύει $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ $\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\ldots$