

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις
Υπερβολικές Συναρτήσεις
Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2026 – 2027

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Οι διαφάνειες θα είναι διαθέσιμες για λήψη, πριν την κάθε διάλεξη, σε μορφή pdf από το eclass.

Για το πρώτο μάθημα:



<https://utopia.duth.gr/epdiaman/files/logismos/hyperbolic.pdf>

Κάθε Πέμπτη
11:00 – 12:00

Αμφιθέατρο Α2

Μία ώρα επιπλέον...

Συναρτήσεις

Δυνάμεις

$$x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Πολυωνυμικές

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots \alpha_1 x + \alpha_0$$

Ρητές

$$P(x) / Q(x)$$

Εκθετική

$$y = e^x$$

Λογάριθμος

$$y = \ln x$$

Τριγωνομετρικές

$$\sin(\eta\mu), \cos(\sigma\upsilon\nu), \tan(\epsilon\phi), \cot(\sigma\phi)$$

Γραμμικοί συνδυασμοί και συνθέσεις των παραπάνω.

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε επιπλέον:

(α) Τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

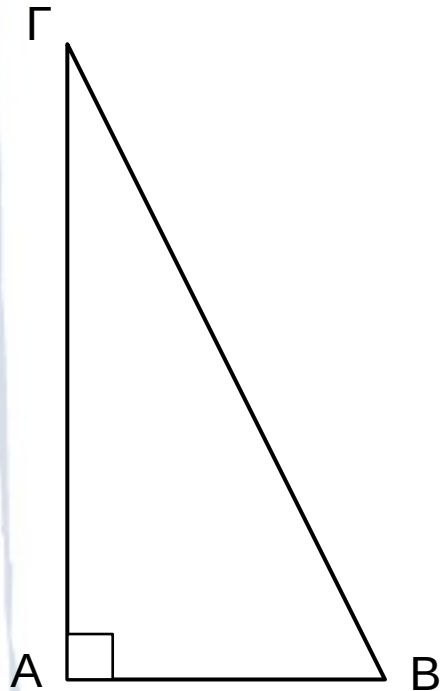
(β) Τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Β' Γυμνασίου:

Ορισμοί σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών.

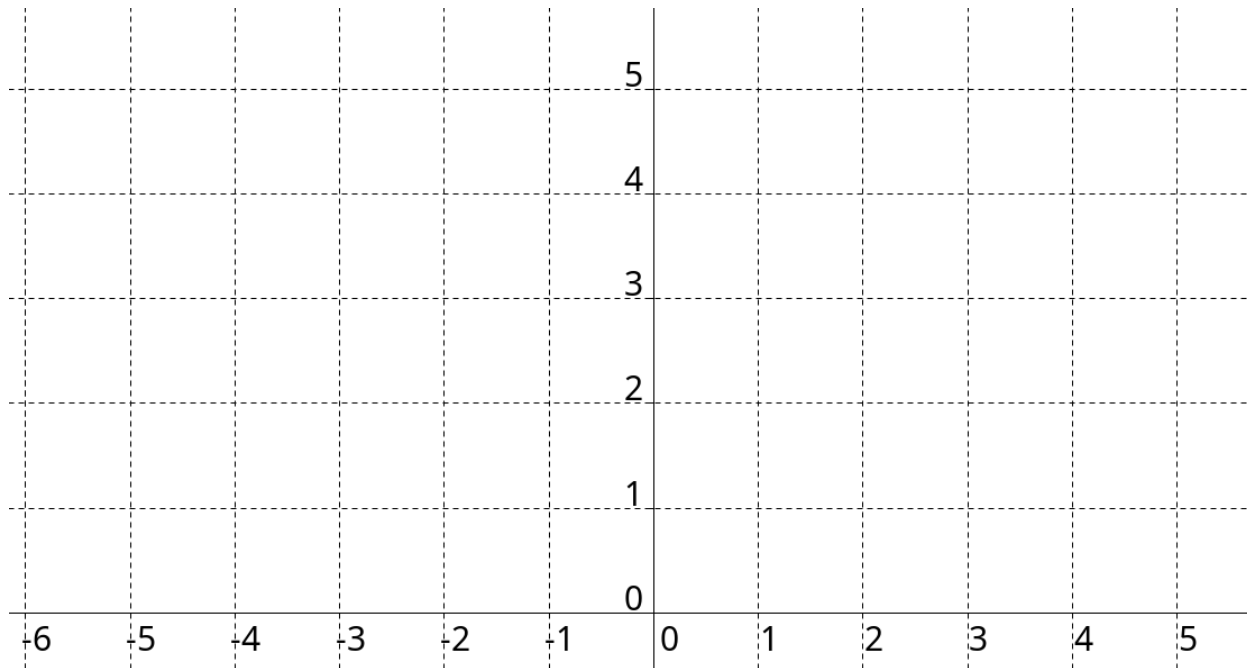


Γωνία	30°	45°	60°
sin			
cos			
tan			
cot			

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Γ' Γυμνασίου:

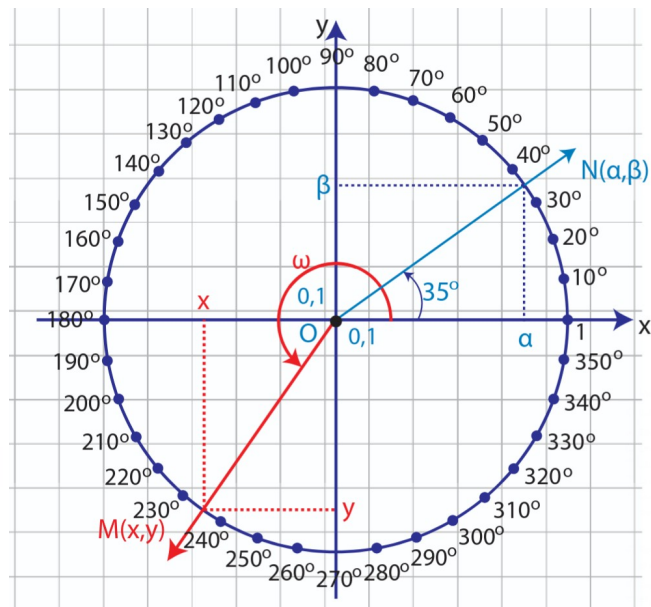
- Επέκταση σε γωνίες $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. Οι αριθμοί ορίζονται με τη βοήθεια της τετμημένης x και της τεταγμένης y . Οι αριθμοί μπορεί να είναι αρνητικοί.



Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Β' Λυκείου:

- Επέκταση σε γωνίες $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$. Επέκταση σε γωνίες $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Ο τριγωνομετρικός κύκλος. Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης.
- Τριγωνομετρικές εξισώσεις. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.



sin: <https://www.geogebra.org/m/Qx574M8Q>

cos: <https://www.geogebra.org/m/xbuUACXV>

tan: <https://www.geogebra.org/m/wVBAmARk>

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Γ' Λυκείου:

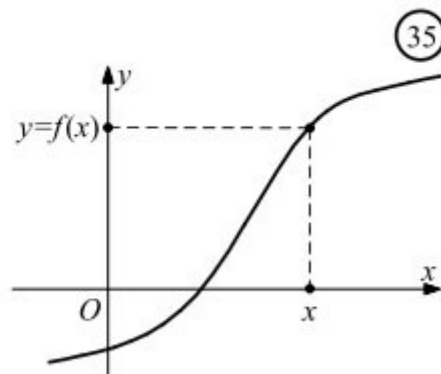
- Παραγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Αντίστροφη συνάρτηση

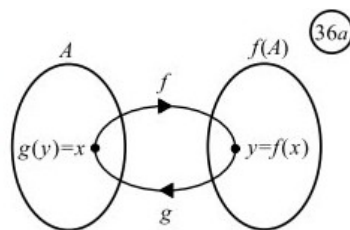
Αντίστροφη συνάρτηση

• Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbf{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g : f(A) \rightarrow \mathbf{R}$$



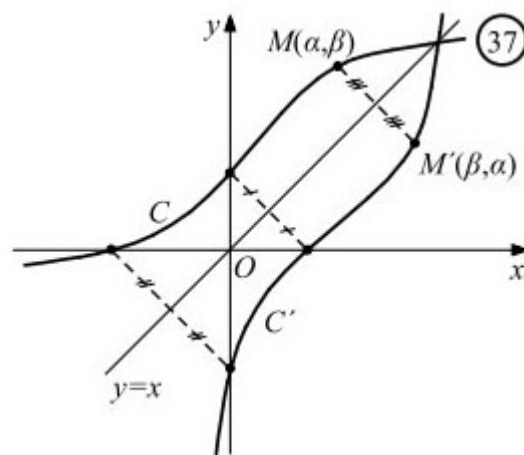
Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε



$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

οπότε

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\arcsin x$

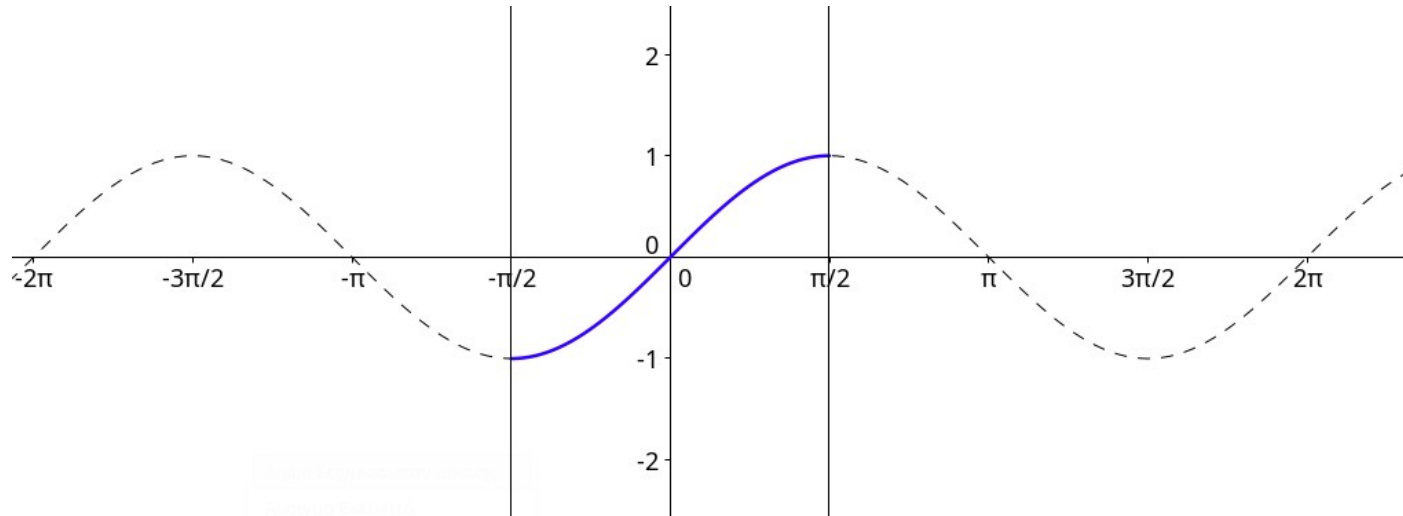
Η συνάρτηση $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ δεν είναι 1 – 1. Ωστόσο, ο περιορισμός της στο $[-\pi/2, \pi/2]$

(α) είναι 1 – 1.

(β) καλύπτει όλο το σύνολο τιμών του $\sin$.

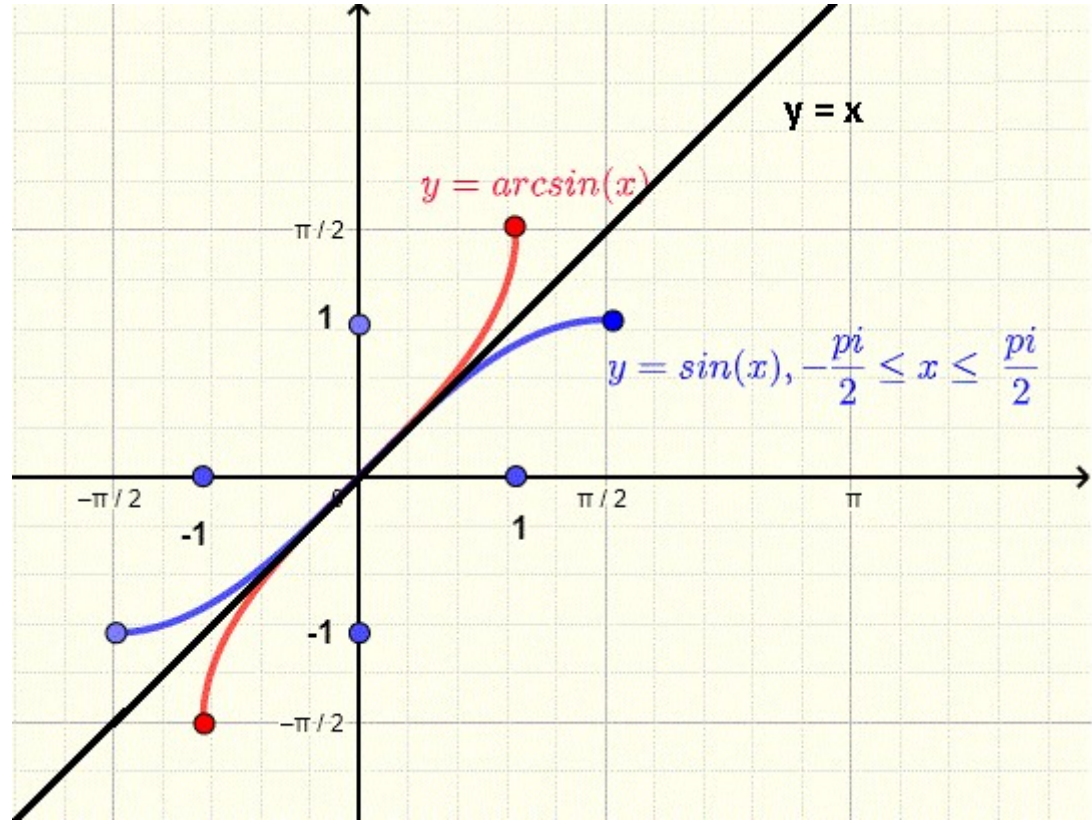
Η αντίστροφη συνάρτηση της $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ ονομάζεται

αντίστροφο ημίτονο και συμβολίζεται **$\arcsin$** ή **$\sin^{-1}$** : **$[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$** .



arcsin x

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$.



arccos x

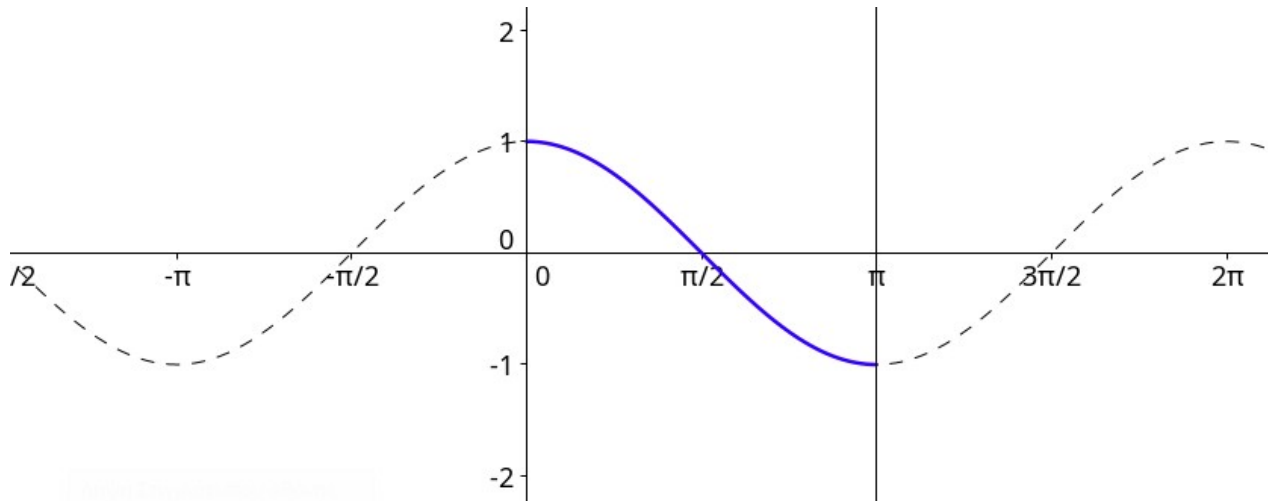
Η συνάρτηση $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ δεν είναι 1-1. Ωστόσο, ο περιορισμός της στο $[0, \pi]$

(α) είναι 1-1.

(β) καλύπτει όλο το σύνολο τιμών του $\sin$.

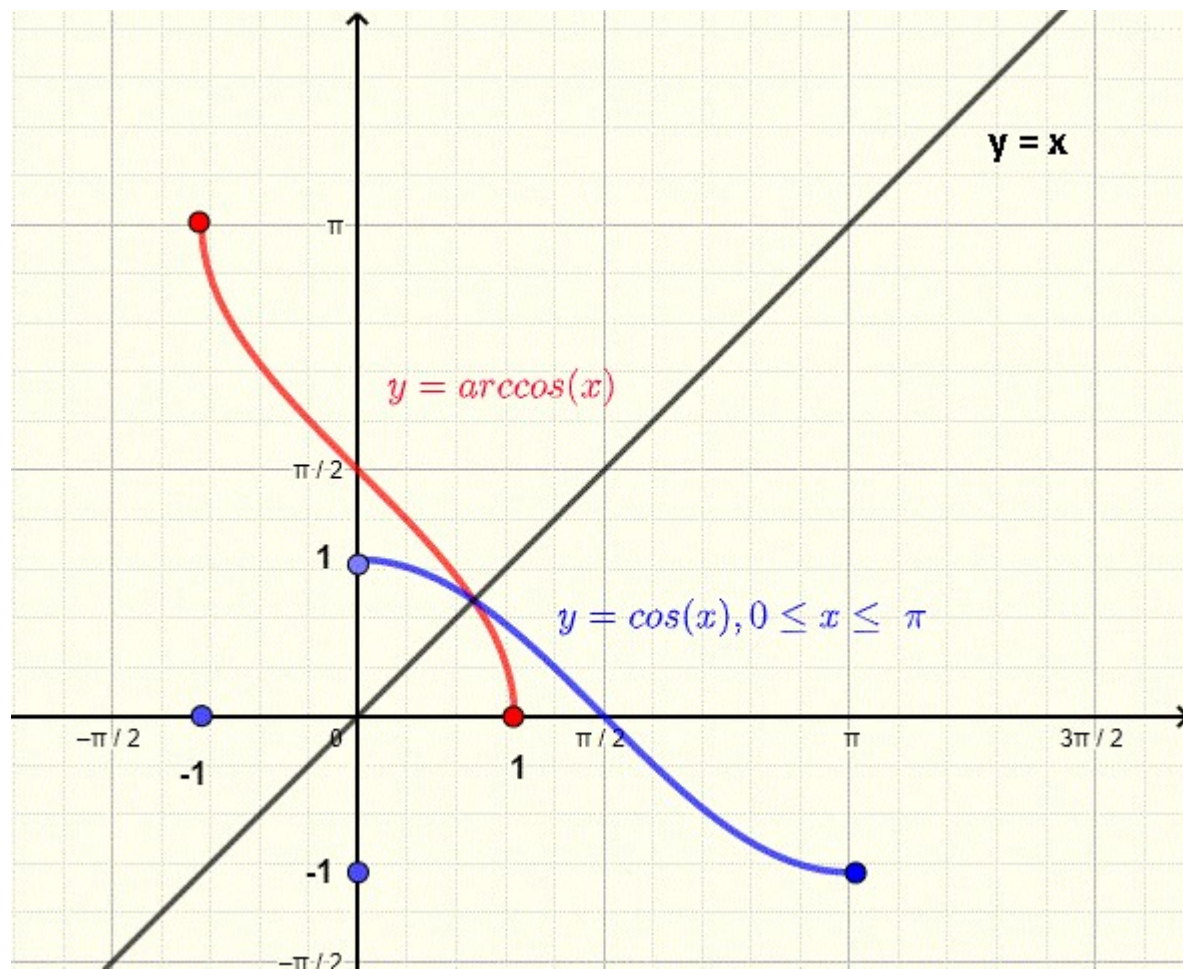
Η αντίστροφη συνάρτηση της $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ονομάζεται

αντίστροφο συνημίτονο και συμβολίζεται **arccos** ή **$\cos^{-1}$** : **$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$** .



arccos x

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.



$\arctan x$

Η συνάρτηση $\tan: \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Ωστόσο, ο περιορισμός της στο $(-\pi/2, \pi/2)$

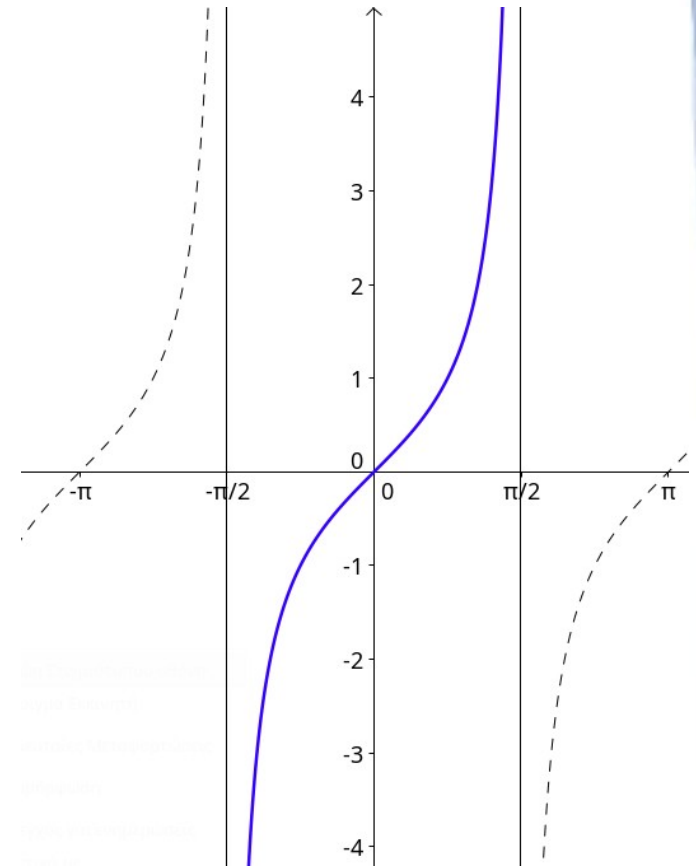
(α) είναι 1-1.

(β) καλύπτει όλο το σύνολο τιμών του $\tan$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$

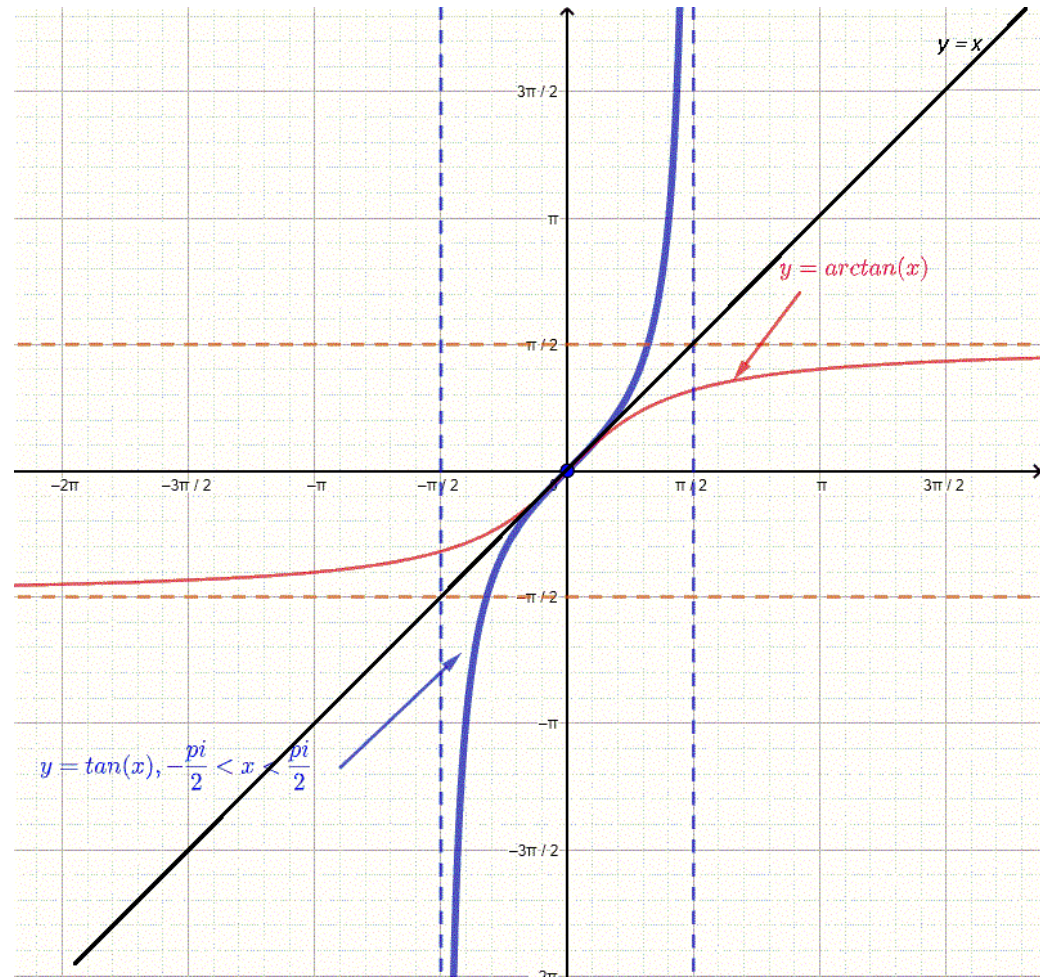
ονομάζεται αντίστροφη εφαπτομένη και συμβολίζεται

$\arctan$ ή $\tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.



arctan x

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.



$\operatorname{arccot} x$

Η συνάρτηση $\cot: \mathbb{R} - \{k\pi + \pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Ωστόσο, ο περιορισμός της στο $(0, \pi)$

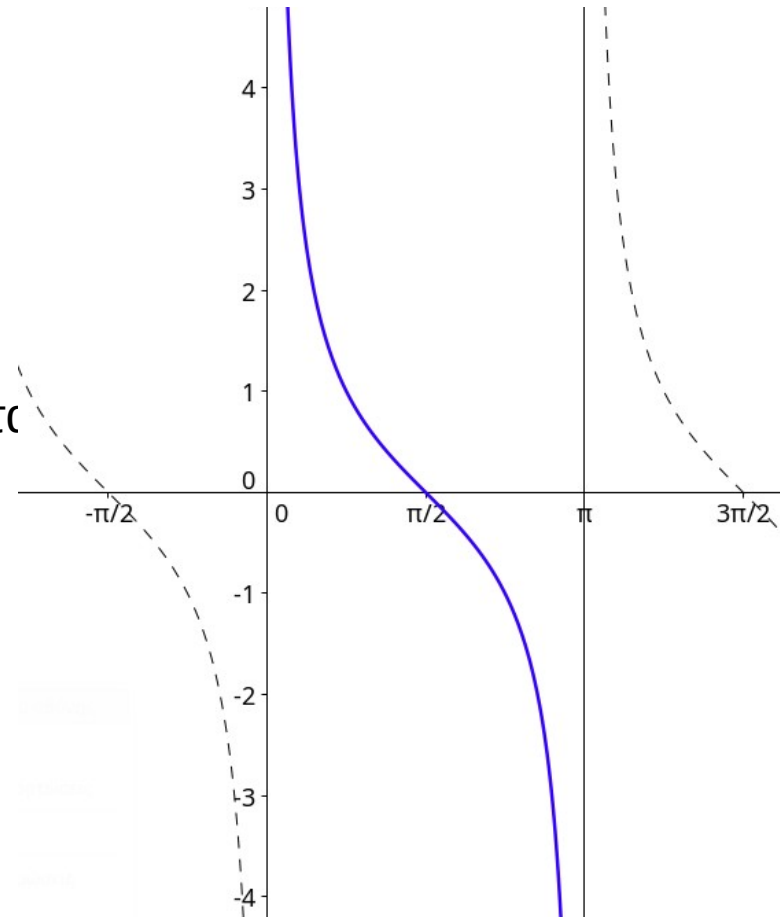
(α) είναι 1-1.

(β) καλύπτει όλο το σύνολο τιμών του $\cot$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται

αντίστροφη συνεφαπτομένη και συμβολίζεται

arccot ή $\cot^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\arctan \sqrt{3} =$$

$$\arccos \frac{1}{2} =$$

$$\operatorname{arccot} \sqrt{3} =$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) =$$

$$\arccos\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\arccos\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ισχύει ότι: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Πράγματι, αν $y(x) = \arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$, τότε

$\sin y(x) = x$ και $\cos y(x) \cdot y'(x) = 1$, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Παρατηρήσεις

1. Οι τιμές $(\arcsin(\pm 1))'$ δεν υπάρχουν, γεγονός που αντιστοιχεί στη γεωμετρική παρατήρηση πως η εφαπτομένη της $y = \sin x$ στο $\pm\pi/2$ είναι παράλληλη στον $x'x$, άρα η εφαπτομένη της $\arcsin x$, στο ± 1 , θα είναι κάθετη στον $x'x$.

2. Η απόδειξη προκύπτει και ως εφαρμογή του θεωρήματος της Γ Λυκείου:

Αν f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη με $f'(x_0) \neq 0$, τότε $[f^{-1}(y_0)]' = 1/f'(x_0)$, με $y_0 = f(x_0)$.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Απόδειξη για την $\arctan$

Αν $y(x) = \arctan x$, $x \in (-\infty, \infty)$, τότε $\tan y(x) = x$ και $(1 + \tan^2 y(x)) \cdot y'(x) = 1$, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y(x)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Ασκήσεις

1. Η γωνία θ σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \arctan(3/4).$$

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου αν η μία από τις πλευρές της θ είναι 4.

Ασκήσεις

2. Να δείξετε ότι:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2, x \in [-1, 1]$$

Υπόδειξη

Ξεκινήστε θέτοντας $\arcsin(x) = y$.

Ασκήσεις

3. Να βρεθεί η παράγωγος:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(2x^2)$$

Ασκήσεις

4. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/2 - \arccos(x)}{x}$$

Ασκήσεις

5. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

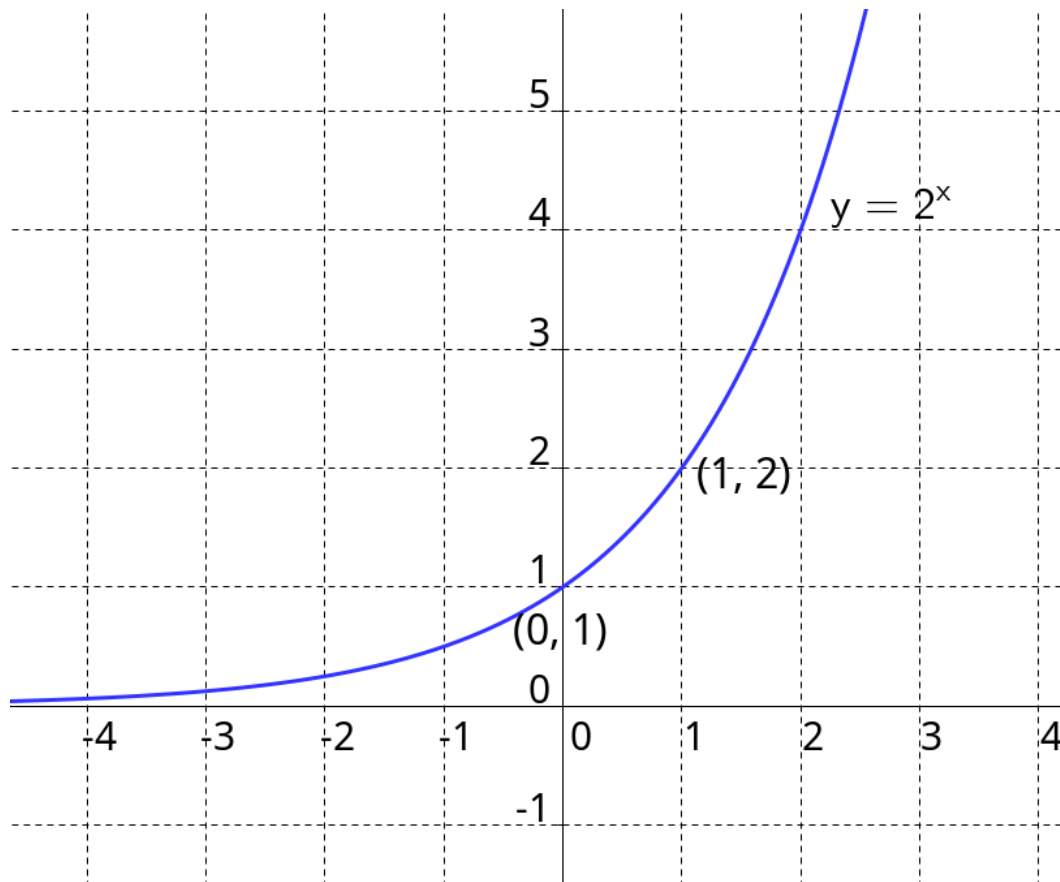
Εκθετική Συνάρτηση $y = 2^x$

$$2^0 = 1, 2^x 2^y = 2^{x+y}, \frac{2^x}{2^y} = 2^{x-y}$$

$$f(x) = 2^x: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \text{ αύξουσα.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$



Εκθετική Συνάρτηση $y = e^x$

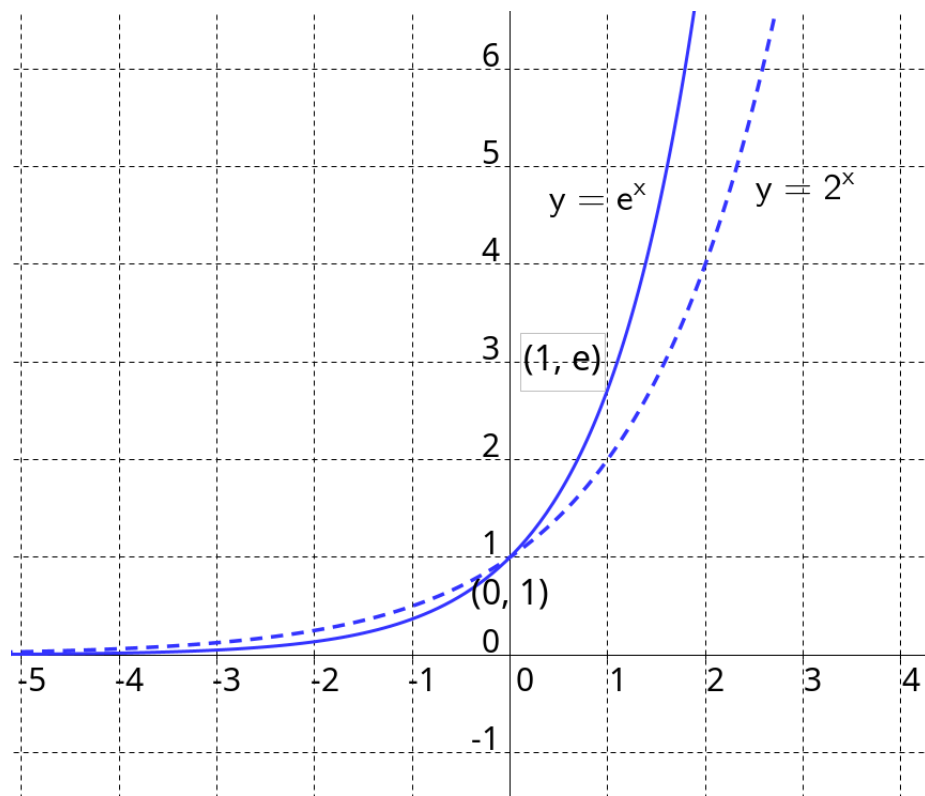
Ορισμός αριθμού e : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$

$$e^0 = 1, e^x e^y = e^{x+y}, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$f(x) = e^x: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ αύξουσα.

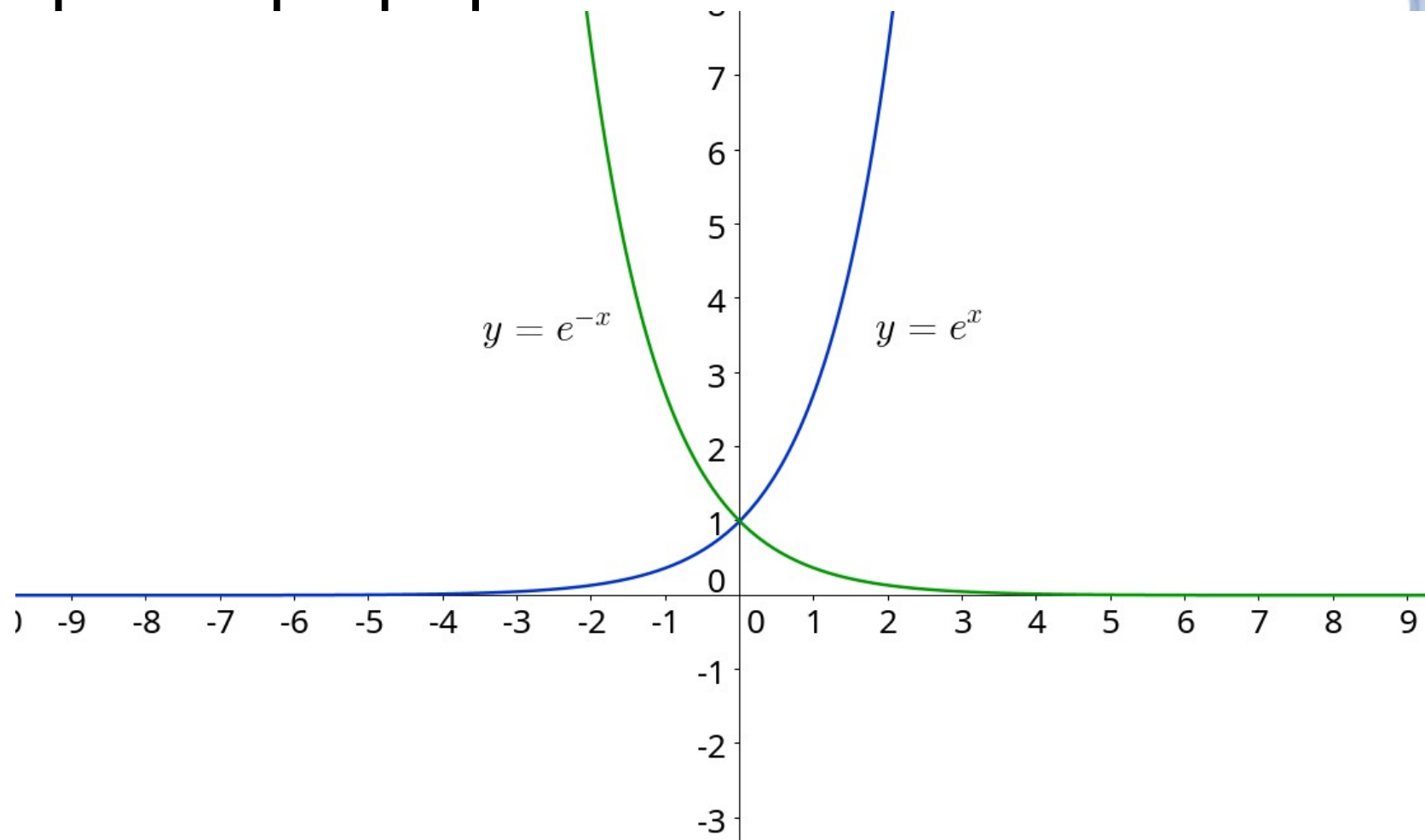
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Εκθετική Συνάρτηση

$$e \approx 2.71828$$



Λογαριθμική Συνάρτηση

Ορισμός: $\ln(x) = y \leftrightarrow x = e^y$

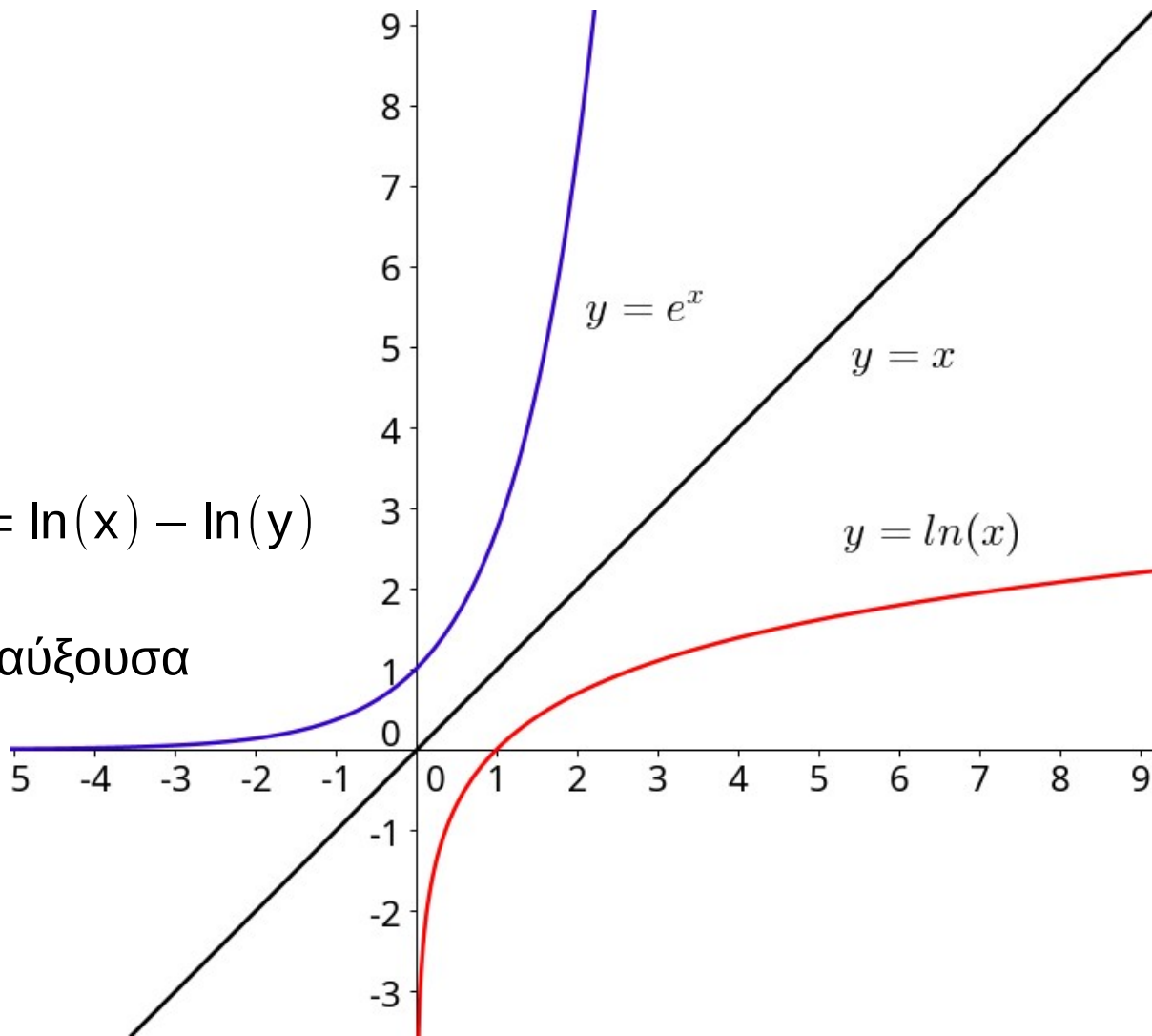
$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$y = e^x$: αύξουσα $\Leftrightarrow y = \ln(x)$: αύξουσα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



Πρόταση

Είναι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Απόδειξη

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{nx \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)' = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Πρόταση

Είναι $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

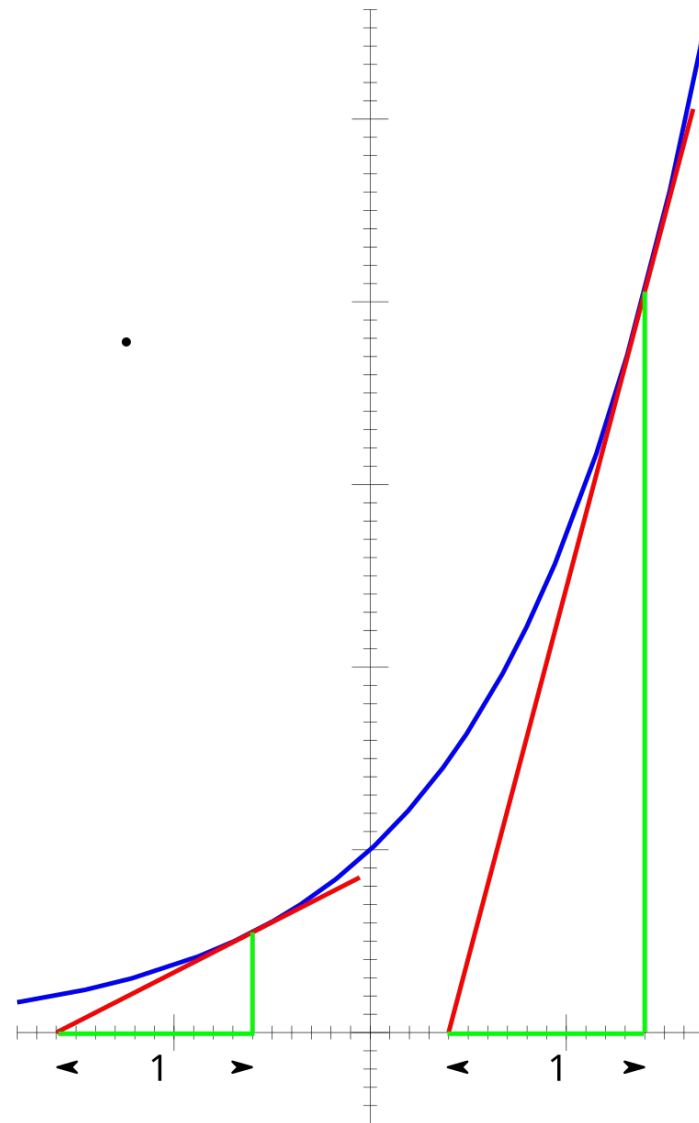
$$e^x = y(x) \Leftrightarrow x = \ln(y(x)) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} \ln(y(x))$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{y(x)} \frac{d}{dx} y(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} y(x) = y(x).$$

Σημείωση

Μία ακόμα απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:

<https://math.stackexchange.com/a/199656/664787>



Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Υπερβολική εφαπτομένη

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Ιδιότητες

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\sinh(-x) = -\sinh x$

Δραστηριότητες

- (α) Αποδείξτε τις ιδιότητες 1, 2, 3.
- (β) Να εκφραστούν τα e^x , e^{-x} συναρτήσει των $\sinh x$, $\cosh x$.
- (γ) Να δείξετε ότι $\cosh x \geq 1$.
- (δ) Να λυθεί η ανίσωση $\cos x \geq \cosh x$.

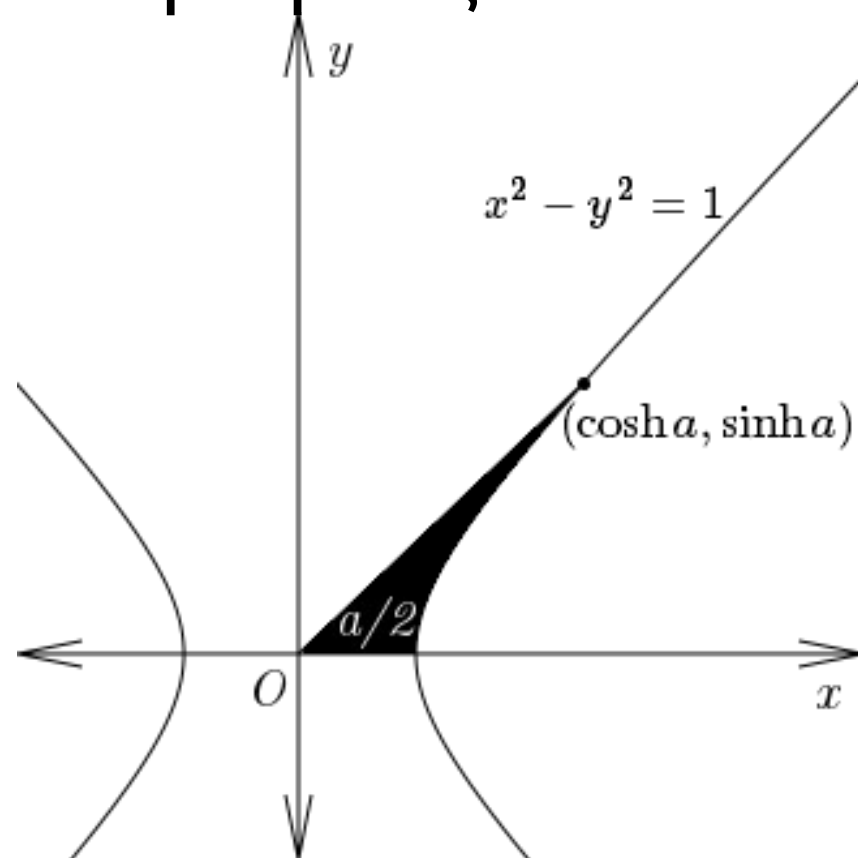
Υπερβολικές Συναρτήσεις

Η ονομασία “Υπερβολικές” οφείλεται στη στενή τους σχέση με την μοναδιαία υπερβολή.

Πιο συγκεκριμένα, οι αριθμοί $\cosh a$, $\sinh a$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες των σημείων του δεξιού κλάδου της μοναδιαίας υπερβολής

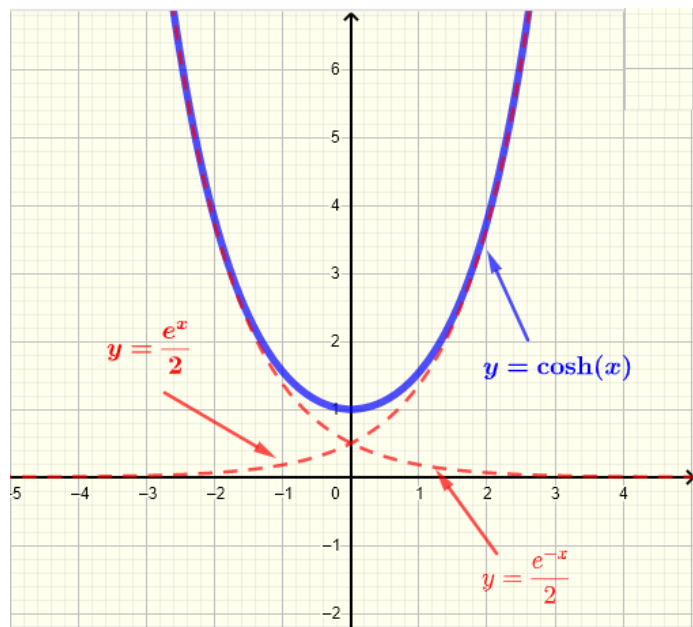
$$x^2 - y^2 = 1,$$

που αντιστοιχούν στη “επίκεντρη” γωνία $a/2$.

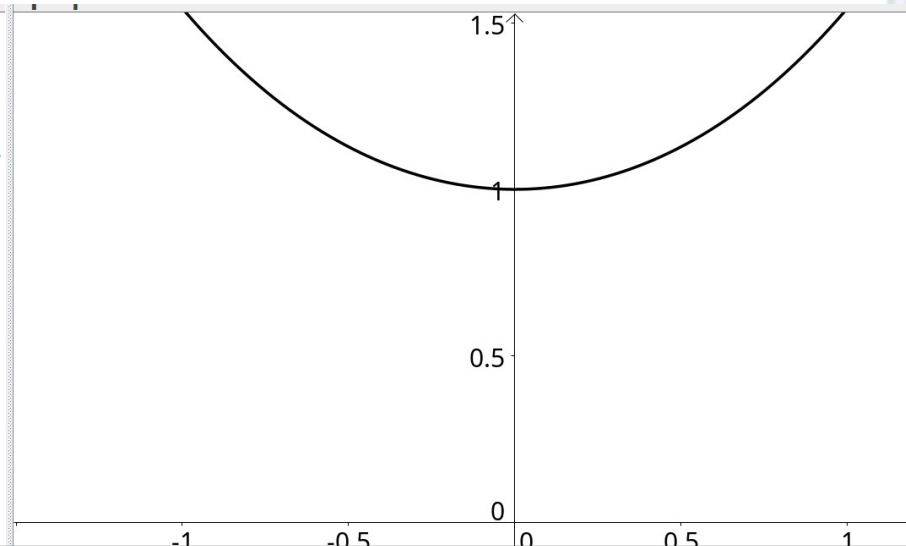


Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh$), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.



Ελεύθερα αντικείμενα
• $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Εξαρτημένα αντικείμενα



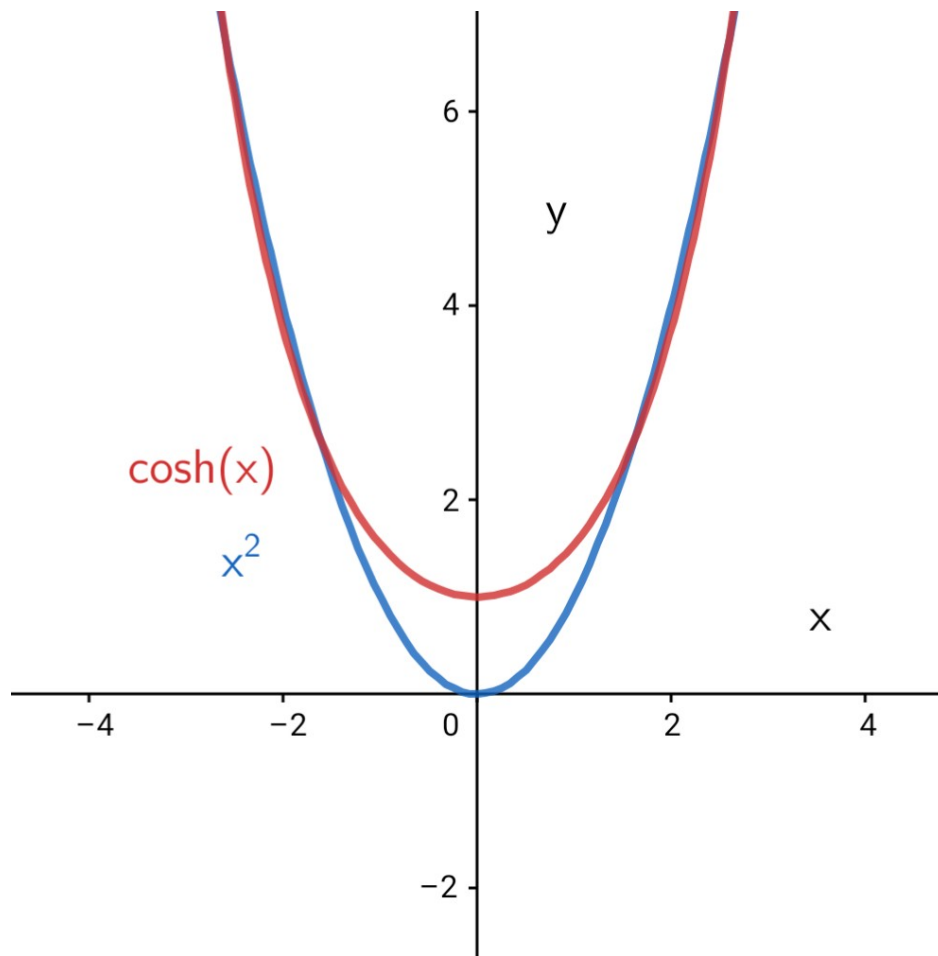
Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh$), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.



Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\cosh(x) \neq x^2$$



Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

- $\cosh x = \cosh(-x)$
- $\sinh x = -\sinh(-x)$
- $\tanh x = -\tanh(-x)$
- $\coth x = -\coth(-x)$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
- $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
- $\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}$
- $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
- $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$

Η ονομασία “Τριγωνομετρικές” οφείλεται στη ομοιότητα των σχέσεων που τις συνδέουν με αυτές που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι: $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$, $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad \frac{d}{dx} \coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh(x) = 2$.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 3

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh(x) + \cosh(x) = 5$.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 4

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \sinh(x)$

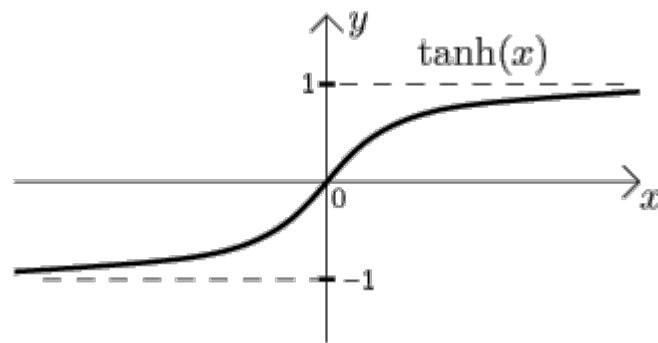
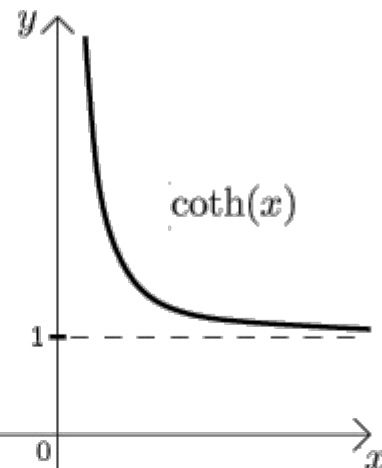
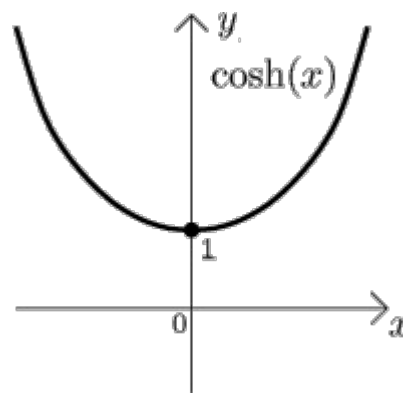
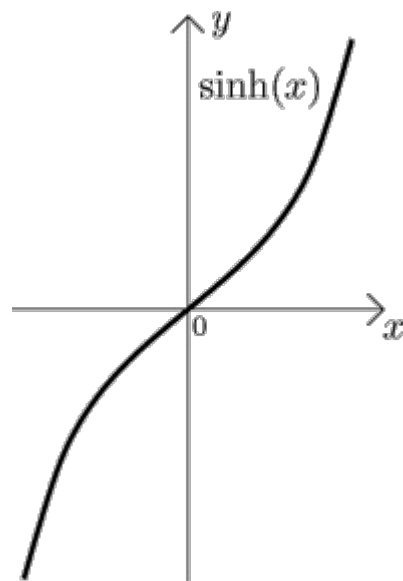
Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

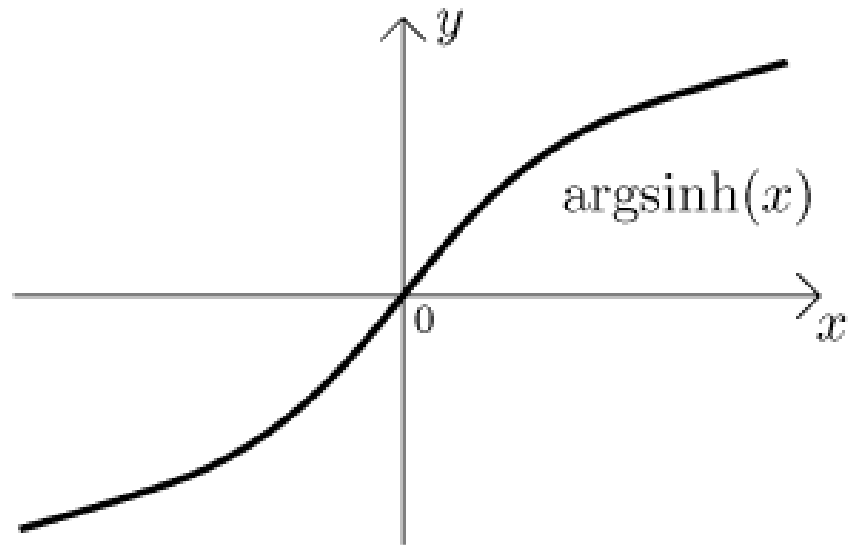
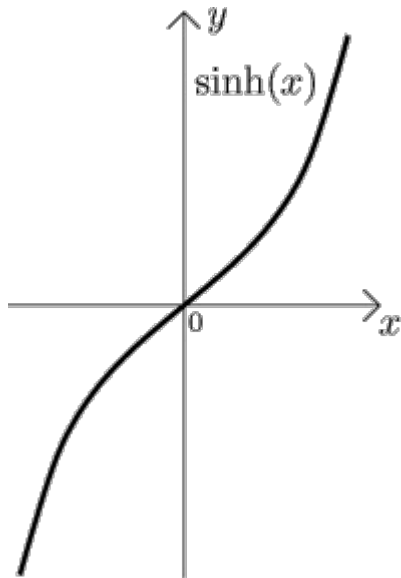
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

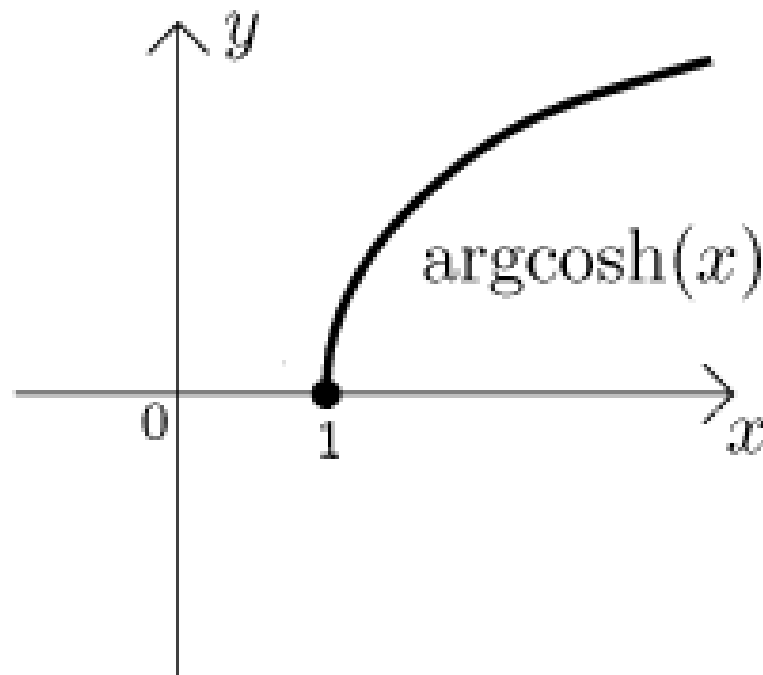
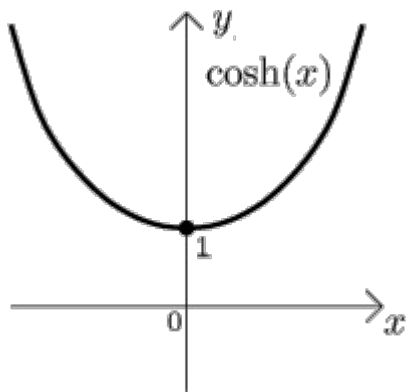
Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Άσκηση 5

Ναδειχθεί ότι $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \in [1, +\infty).$$

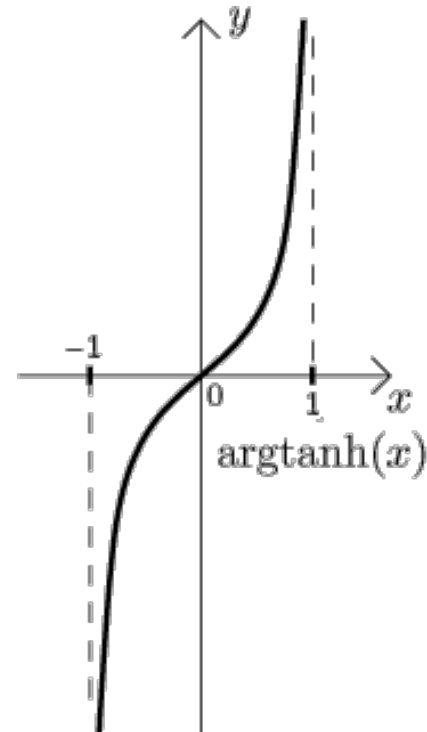
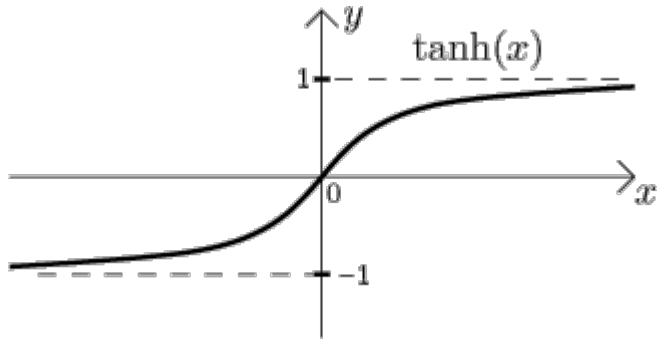
Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Άσκηση 6

Ναδειχθεί ότι $\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, +\infty)$.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

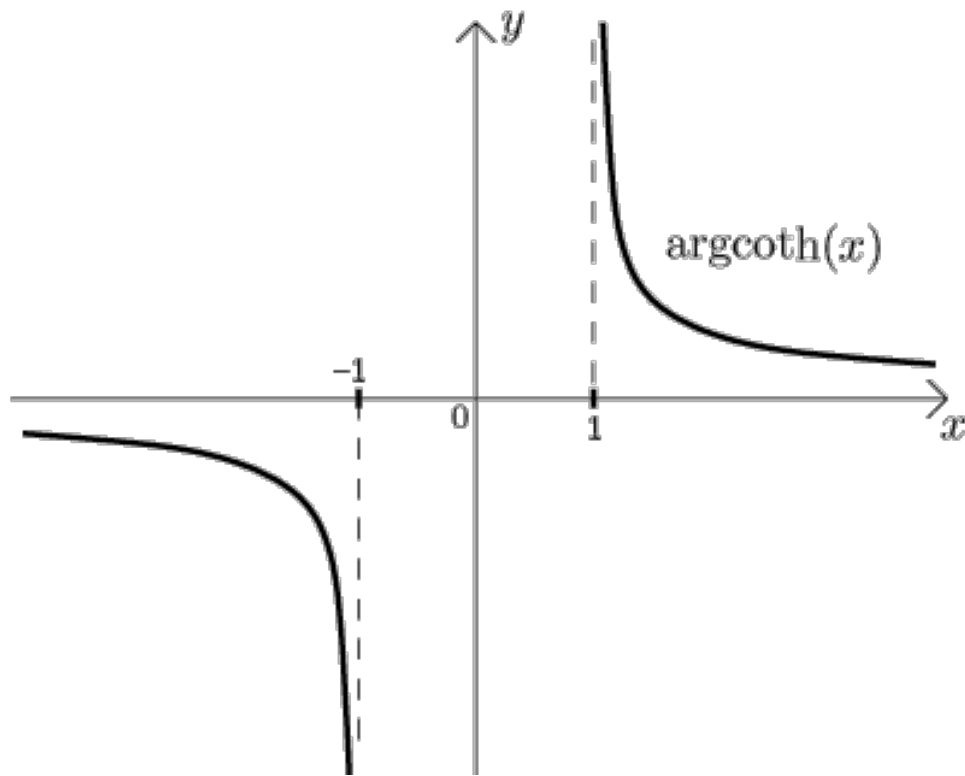
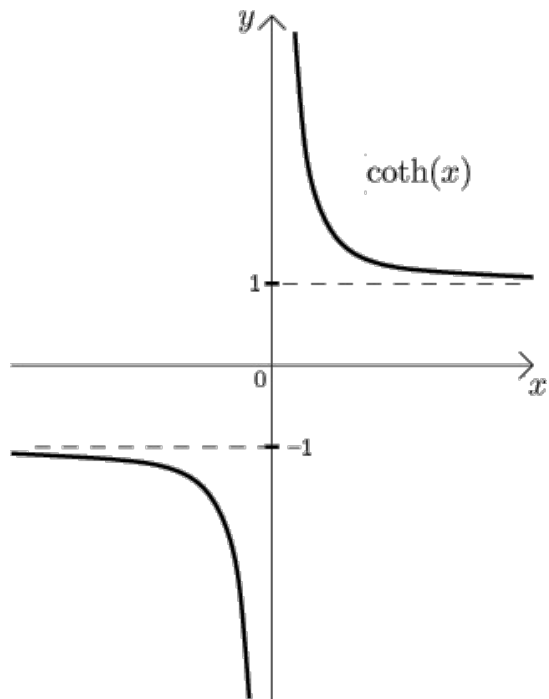
$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2}, |x| < 1.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{1 - x^2}, |x| > 1.$$

