

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις
Υπερβολικές Συναρτήσεις
Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2025 – 2026

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Οι διαφάνειες θα είναι διαθέσιμες για λήψη, πριν την κάθε διάλεξη, σε μορφή pdf από το eclass.

Για το πρώτο μάθημα:



<https://utopia.duth.gr/epdiaman/files/logismos/hyperbolic.pdf>

Κάθε Πέμπτη
11:00 – 12:00

Αμφιθέατρο Α2

Μία ώρα επιπλέον...

Συναρτήσεις

Δυνάμεις

$$x^a, a \in \mathbb{R}.$$

Πολυωνυμικές

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots \alpha_1 x + \alpha_0$$

Ρητές

$$P(x) / Q(x)$$

Εκθετική

$$y = e^x$$

Λογάριθμος

$$y = \ln x$$

Τριγωνομετρικές

$$\sin(\underline{\eta\mu}), \cos(\underline{\sigma\upsilon\nu}), \tan(\underline{\epsilon\phi}), \cot(\underline{\sigma\phi})$$

Γραμμικοί συνδυασμοί και συνθέσεις των παραπάνω.

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε επιπλέον:

(α) Τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

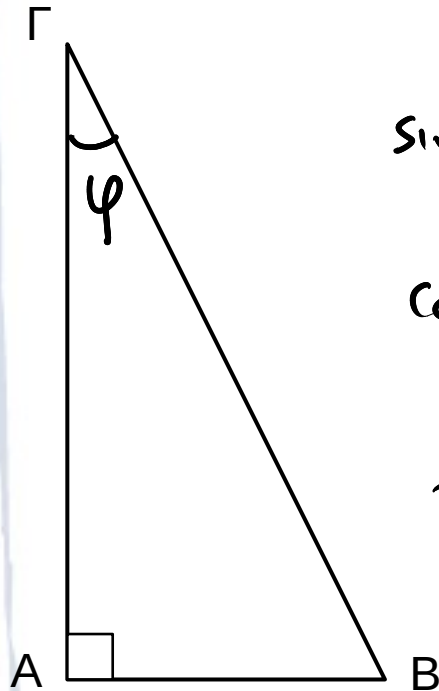
(β) Τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Β' Γυμνασίου:

Ορισμοί σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών.



$$\sin \psi = \frac{AB}{BG}$$

$$\cos \psi = \frac{AG}{BG}$$

$$\tan \psi = \frac{AB}{AG}$$

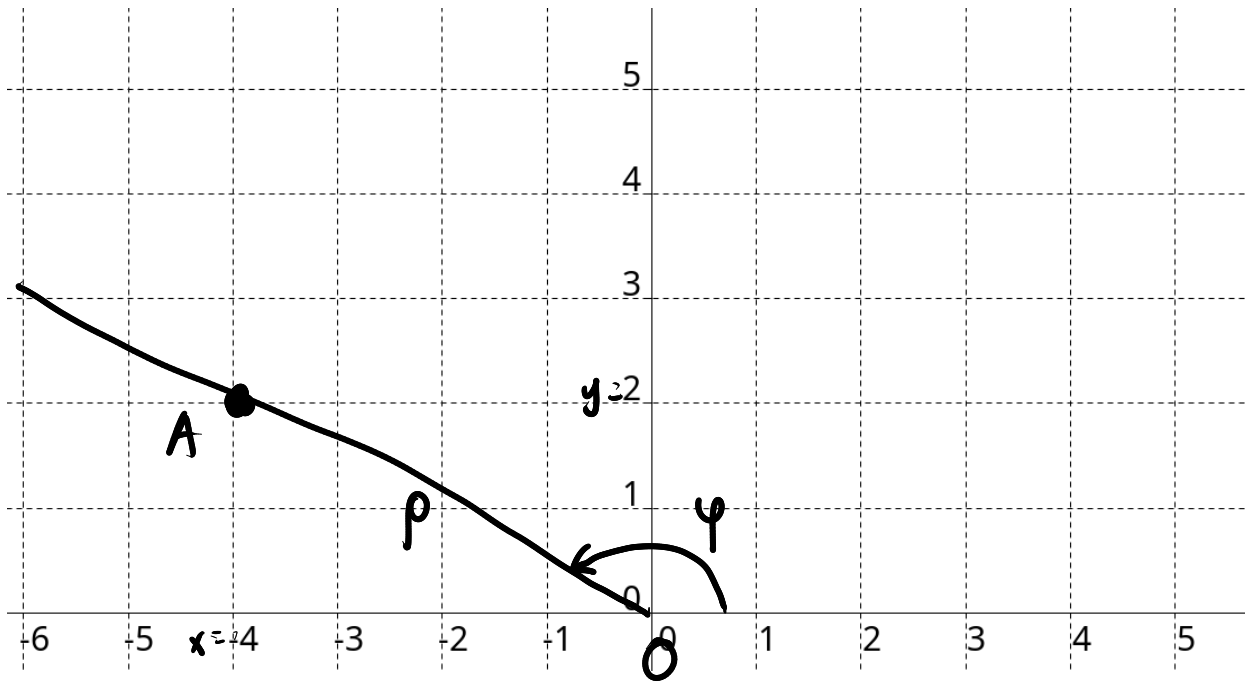
$$\cot \psi = \frac{AG}{AB}$$

Γωνία	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Γ' Γυμνασίου:

- Επέκταση σε γωνίες $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$. Οι αριθμοί ορίζονται με τη βοήθεια της τετμημένης x και της τεταγμένης y . Οι αριθμοί μπορεί να είναι αρνητικοί.



$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\cot \varphi = \frac{x}{y}$$

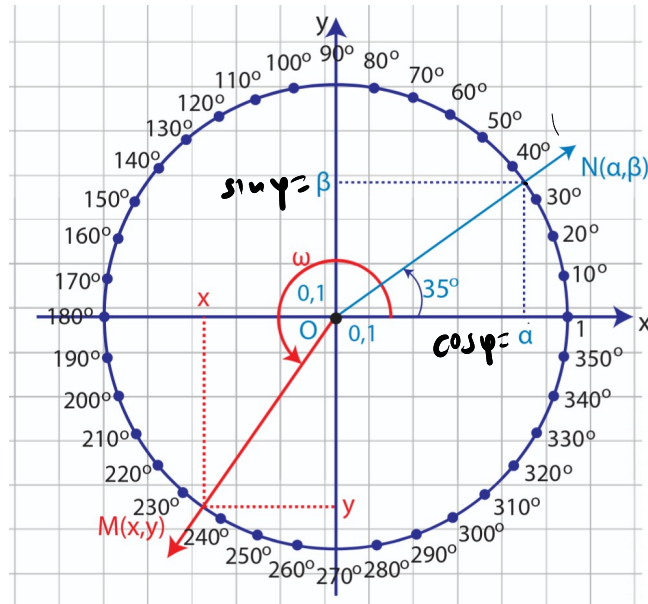
Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Β' Λυκείου:

- Επέκταση σε γωνίες $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$. Επέκταση σε γωνίες $\varphi \in \mathbb{R}$.
- Ο τριγωνομετρικός κύκλος. Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης.
- Τριγωνομετρικές εξισώσεις. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

$$\pi = \frac{\Delta}{\eta \epsilon \rho.} = \frac{2\rho}{\eta \epsilon \rho.}$$

$$\eta \epsilon \rho. = 2\rho.$$



sin: <https://www.geogebra.org/m/Qx574M8Q>

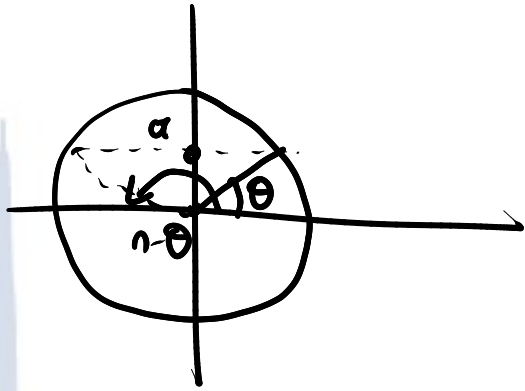
cos: <https://www.geogebra.org/m/xbuUACXV>

tan: <https://www.geogebra.org/m/wVBAmARk>

$$30^\circ \sim \frac{\pi}{6} \quad 45^\circ \sim \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x = \alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \theta, \quad \text{όπου} \quad \cos \theta = \alpha$$



$$\tan x = \alpha \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha, \quad \text{όπου} \quad \tan \theta = \alpha$$

$$\cot x = \alpha \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha, \quad \text{όπου} \quad \cot \theta = \alpha$$

Η τριγωνομετρία στη σχολική ύλη

Γ' Λυκείου:

- Παραγωγή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αντίστροφες τριγωνομετρικές απεικονίσεις

Ονομασία και συμβολισμός αντίστροφων απεικονίσεων:

- Ημίτονο $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$,
- Αντίστροφο ημίτονο $\arcsin$ ή $\sin^{-1}$, με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.
- Συνημίτονο $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$
- Αντίστροφο συνημίτονο $\arccos$ ή $\cos^{-1}$, με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.
- Εφαπτομένη $\tan: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Αντίστροφη εφαπτομένη $\arctan$ ή $\tan^{-1}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Συνεφαπτομένη $\cot: \mathbb{R} - [k\pi, k \in \mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Αντίστροφη συνεφαπτομένη arccot ή $\cot^{-1}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές απεικονίσεις

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \vee \quad 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arctan \sqrt{3} = k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arccos \frac{1}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές απεικονίσεις

Υπολογίζουμε:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} =$$

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\tan^{-1}1 =$$

$$\cot^{-1}\sqrt{3} = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές απεικονίσεις

Από τον ορισμό:

$$\text{Για κάθε } x \in [-1, 1]: \quad \sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x.$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}: \quad \tan(\arctan x) = x, \quad \cot(\operatorname{arccot} x) = x.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin(\sin x) = 2k\pi + x \quad \text{ή} \quad 2k\pi + \pi - x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arccos(\cos x) = 2k\pi \pm x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arctan(\tan x) = k\pi + x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{arccot}(\cot x) = k\pi + x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η περιοδικότητα της $\sin$, κληρονομεί στην $\arcsin$ άπειρες τιμές:

$$\sin(y + 2k\pi) = x \leftrightarrow \arcsin(x) = 2k\pi + y, \text{ ή } 2k\pi + \pi - y, k \in \mathbb{Z}.$$

Για να γίνει συνάρτηση η $\arcsin(x)$, αρκεί να την περιορίσουμε σε κατάλληλο διάστημα. Επιλέγουμε το $[-\pi/2, \pi/2]$ στο οποίο:

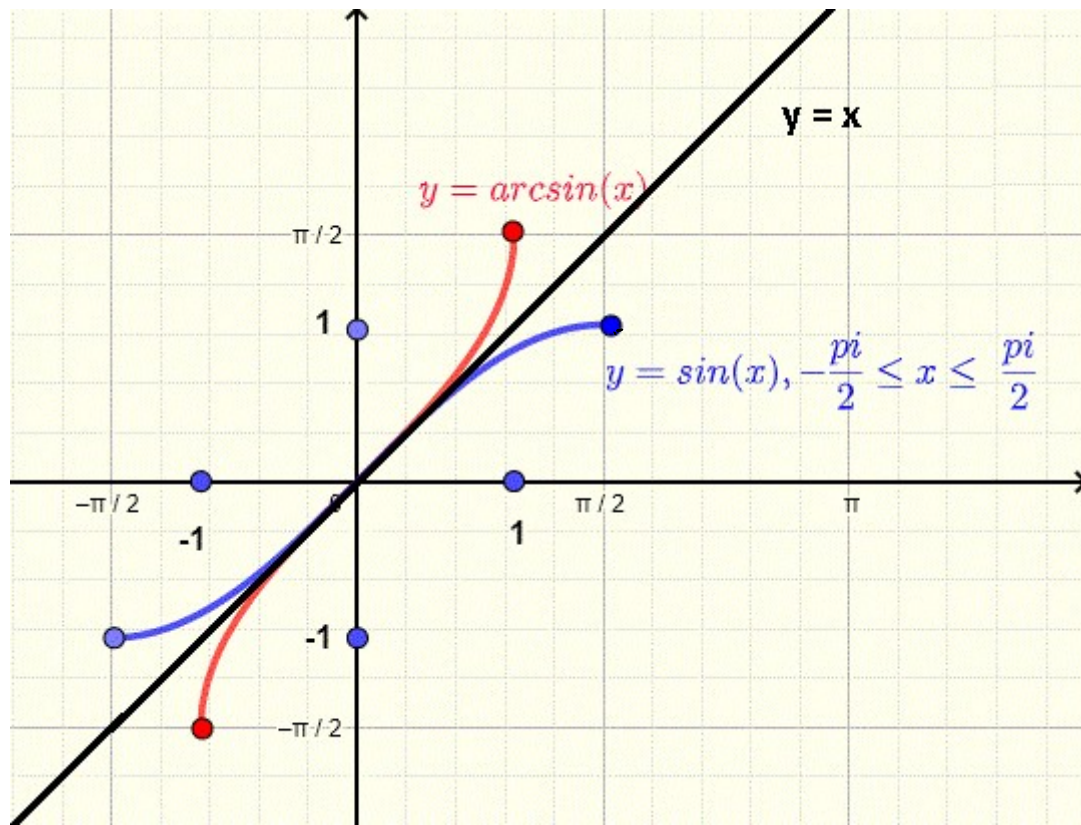
- α) Η $\sin$ είναι αύξουσα (άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση).
- β) Σε αυτό καλύπτεται το πλήρες διάστημα τιμών $[-1, 1]$ της $\sin$.

Άρα, ο περιορισμός του $\arcsin(x)$ στο εύρος $-\pi/2 \leq \arcsin(x) \leq \pi/2$ διασφαλίζει ότι κάθε τιμή του $x \in [-1, 1]$ αντιστοιχεί ακριβώς σε μία γωνία θ , καθιστώντας τη συνάρτηση αντίστροφου ημιτόνου καλά ορισμένη και συνεχή.

Σημείωση: Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέψιμη και συνεχής συνάρτηση τότε η f^{-1} είναι συνεχής.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$.



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Επιλέγουμε:

$$\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos(x) \in [0, \pi],$$

$$\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2),$$

$$\operatorname{arccot}(x) \in (0, \pi).$$

Δηλαδή, τελικά:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2),$$

$$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

↓
 $\sin(\theta) = \alpha$

$\leftrightarrow$

$$\theta = 2\kappa\pi + \arcsin(\alpha) \text{ ή } \theta = 2\kappa\pi + \pi - \arcsin(\alpha)$$

$$\cos(\theta) = \alpha$$

$\leftrightarrow$

$$\theta = 2\kappa\pi \pm \arccos(\alpha)$$

$$\tan(\theta) = \alpha$$

$\leftrightarrow$

$$\theta = \kappa\pi + \arctan(\alpha)$$

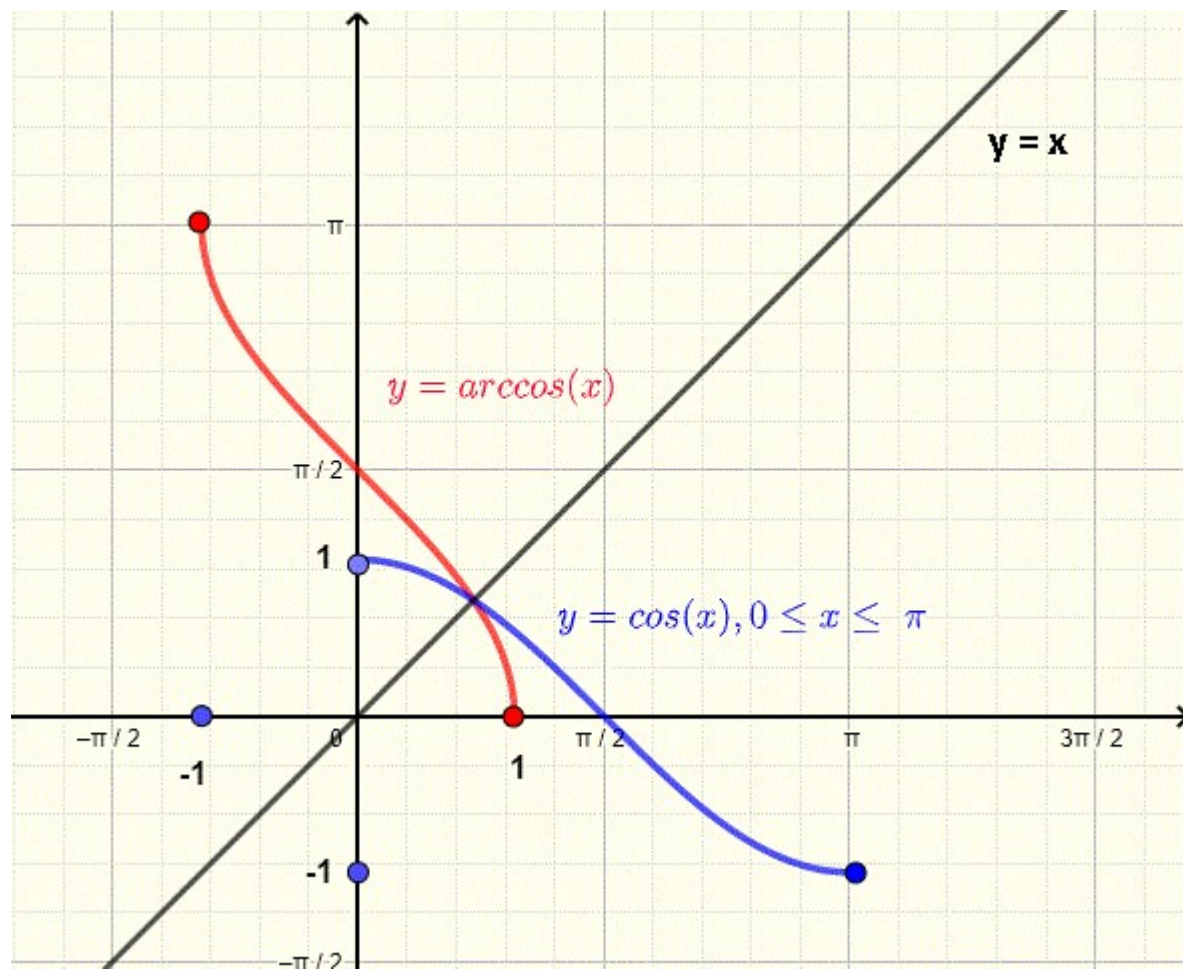
$$\cot(\theta) = \alpha$$

$\leftrightarrow$

$$\theta = \kappa\pi + \operatorname{arccot}(\alpha)$$

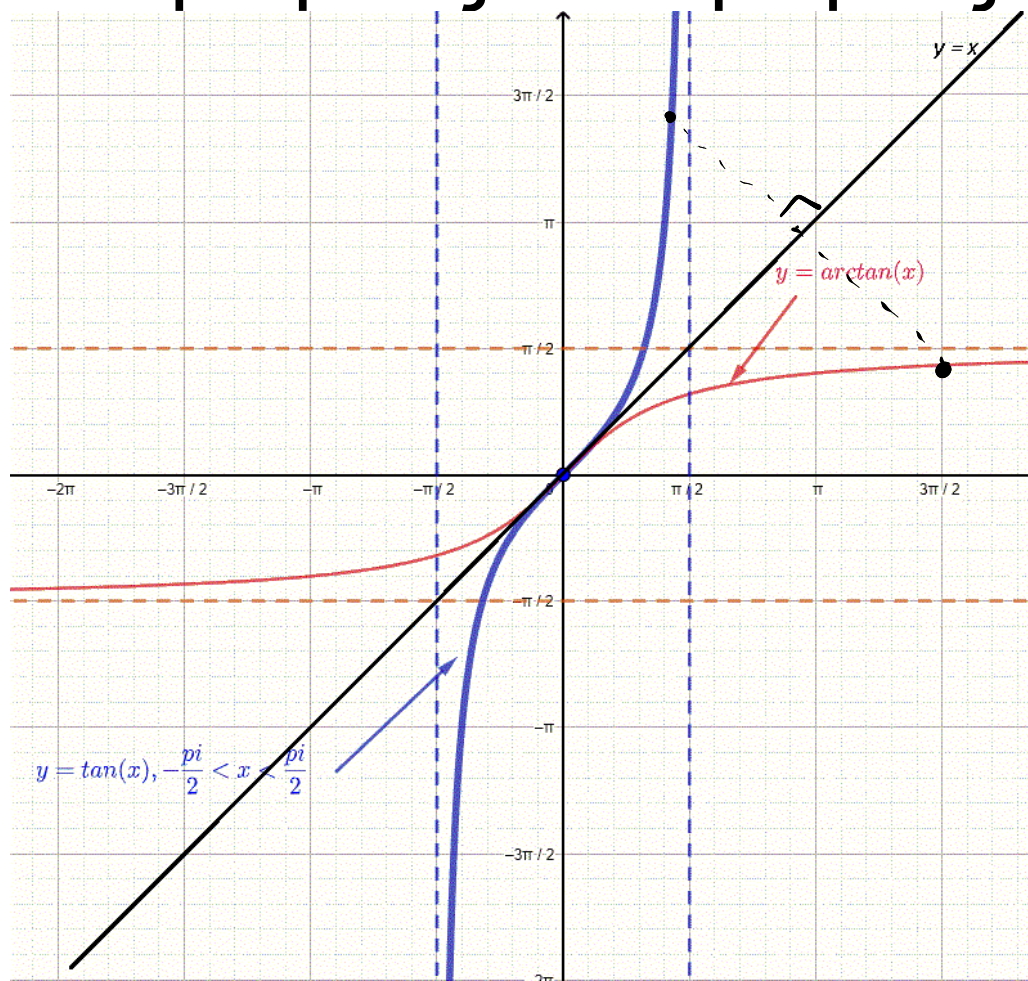
Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.



Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$.



Ασκήσεις

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

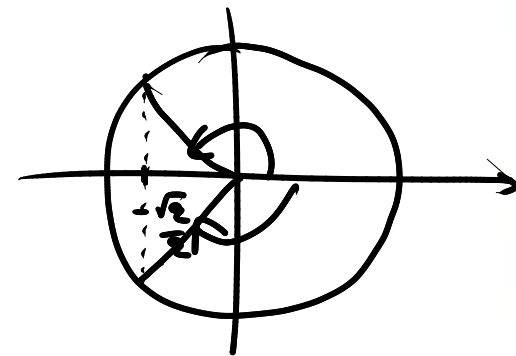
1. Να υπολογιστούν οι τιμές:

$$\arcsin(\cos(\pi/4)) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos(\sin(\pi/6)) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(\sin(5\pi/4)) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$[0, \pi]$$



Ασκήσεις

2. Η γωνία θ σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δίνεται από τον τύπο

$$\theta = \arctan(3/4).$$

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου αν η μία από τις πλευρές της θ είναι 4.

Ασκήσεις

$$\arcsin x = \theta : \text{Αξονα 2η}$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(x) = y & (\Leftrightarrow) & x = f(y) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \arcsin & & \sin \end{array}$$

3. Να δείξετε ότι:

y

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2, x \in [-1, 1]$$

Υπόδειξη

Ξεκινήστε θέτοντας $\arcsin(x) = y$.

$$f^{-1}(f(\frac{\pi}{2} - y))$$

$$\arcsin x = y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



$$x = \sin y = \cos(\frac{\pi}{2} - y) \Leftrightarrow \arccos x = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - y)) = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\text{Άρα, } \arcsin x + \arccos x = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}.$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ισχύει ότι: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Πράγματι, αν $y(x) = \arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$, τότε

$\sin y(x) = x$ και $\cos y(x) \cdot y'(x) = 1$, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Παρατηρήσεις

1. Οι τιμές $(\arcsin(\pm 1))'$ δεν υπάρχουν, γεγονός που αντιστοιχεί στη γεωμετρική παρατήρηση πως η εφαπτομένη της $y = \sin x$ στο $\pm\pi/2$ είναι παράλληλη στον x -αξονα, άρα η εφαπτομένη της $\arcsin x$, στο ± 1 , θα είναι κάθετη στον x -αξονα.

2. Η απόδειξη προκύπτει και ως εφαρμογή του θεωρήματος της Γ Λυκείου:

Αν f είναι 1-1 και παραγωγίσιμη με $f'(x_0) \neq 0$, τότε $[f^{-1}(y_0)]' = 1/f'(x_0)$, με $y_0 = f(x_0)$.

Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ανάλογα, αποδεικνύεται ότι:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Απόδειξη για την $\arctan$

Αν $y(x) = \arctan x$, $x \in (-\infty, \infty)$, τότε $\tan y(x) = x$ και $(1 + \tan^2 y(x)) \cdot y'(x) = 1$, από όπου παίρνουμε

$$y'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 y(x)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Ασκήσεις

4. Να βρεθεί η παράγωγος:

$$\frac{d}{dx} \arcsin(2x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \cdot (2x^2)' = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}} .$$

Ασκήσεις

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$$

5. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/2 - \arccos(x)}{x} \quad \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0/0} \quad \underset{\text{DLH}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{1} = 1.$$

Ασκήσεις

$$\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} (\arctan x)' dx = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} . \end{aligned}$$

Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

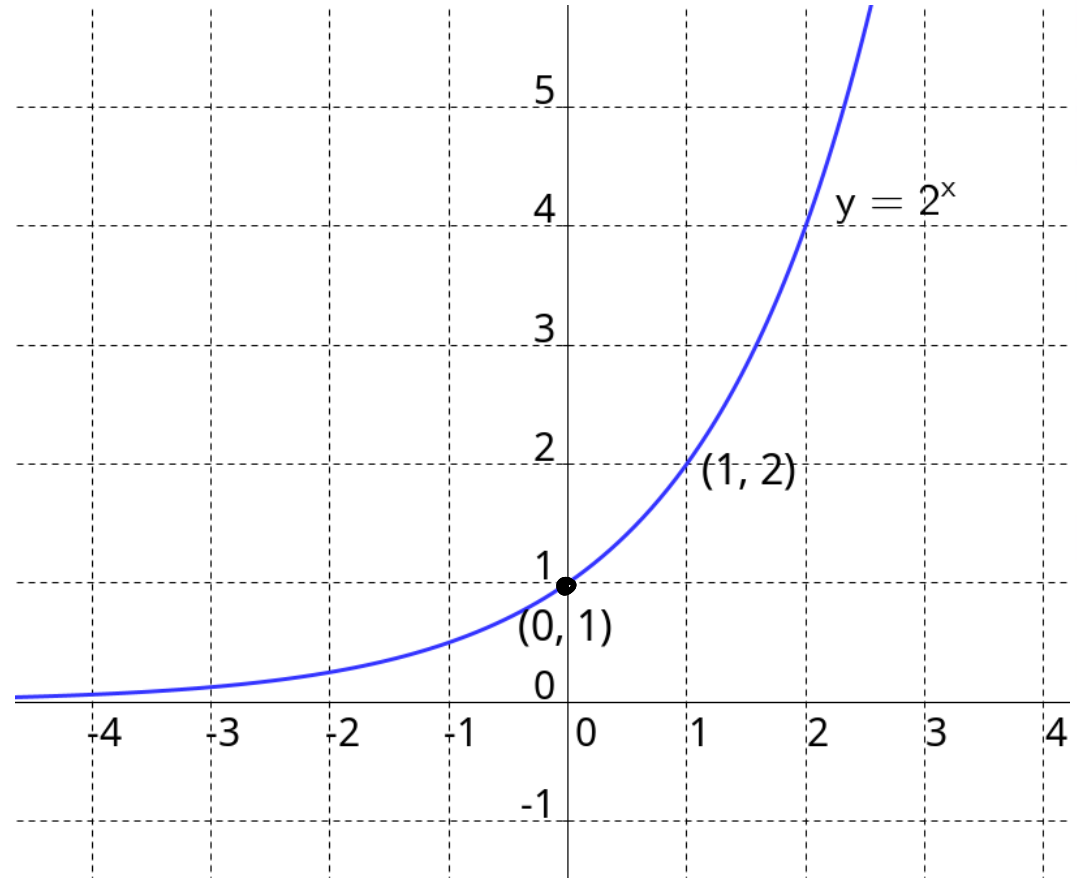
Εκθετική Συνάρτηση $y = 2^x$

$$2^0 = 1, 2^x 2^y = 2^{x+y}, \frac{2^x}{2^y} = 2^{x-y}$$

$$f(x) = 2^x: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \text{ αύξουσα.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$



Εκθετική Συνάρτηση $y = e^x$

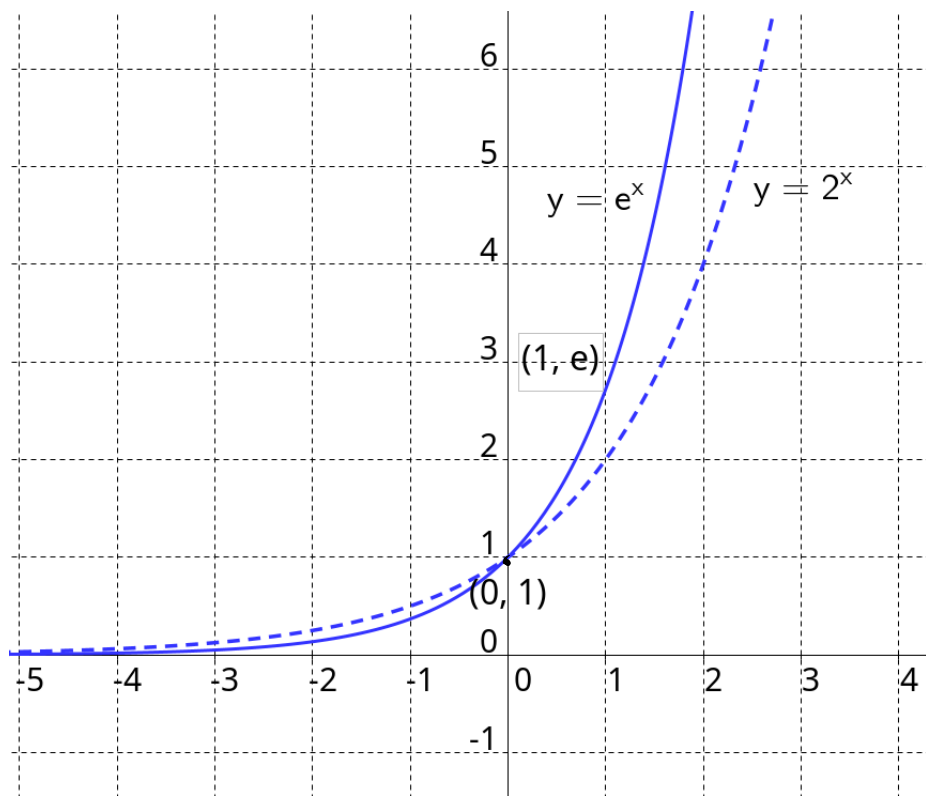
Ορισμός αριθμού e : $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828$

$$e^0 = 1, e^x e^y = e^{x+y}, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$f(x) = e^x: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ αύξουσα.

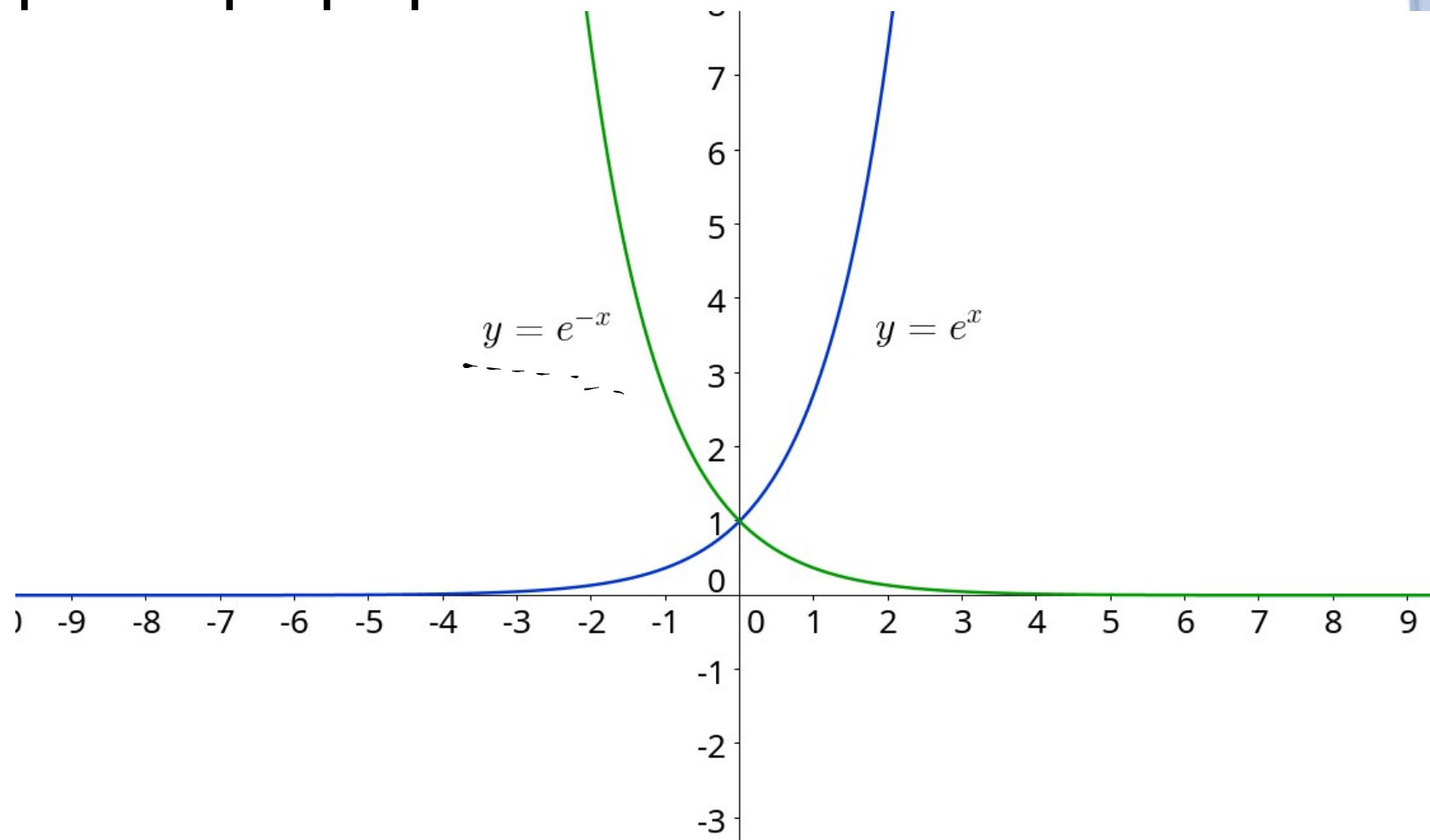
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Εκθετική Συνάρτηση

$$e \approx 2.71828$$



Λογαριθμική Συνάρτηση

Ορισμός: $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$

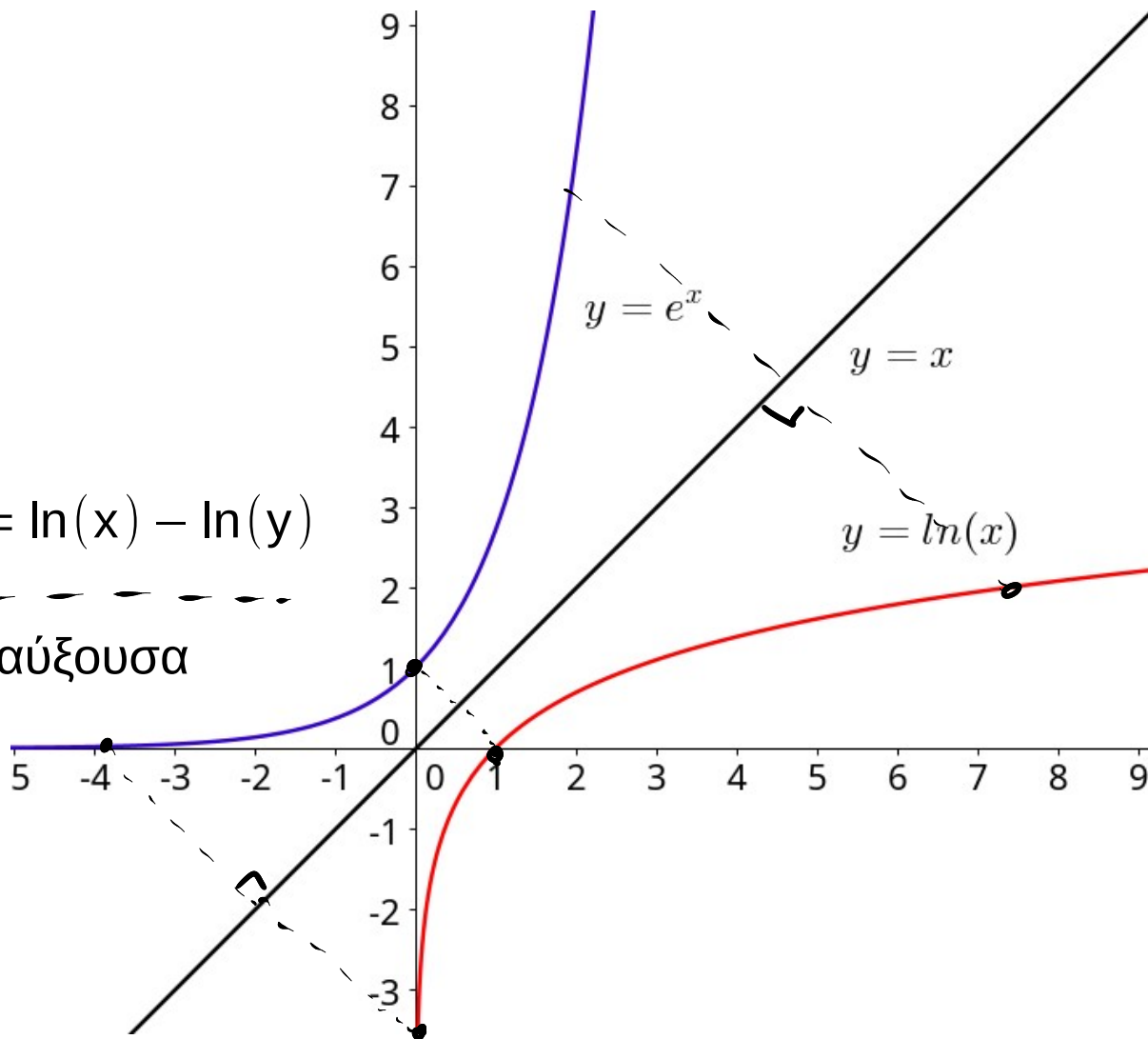
$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$y = e^x$: αύξουσα $\Leftrightarrow y = \ln(x)$: αύξουσα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



$$\log_2 x = y \iff 2^y = x \quad | \quad \log_e x = \ln x$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

1

$$\frac{4}{2} = 2$$

2

$$\frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

3

Πρόταση

Είναι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad \cdot \quad \kappa \ln a = \ln a^{\kappa}$$

Απόδειξη

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{nx \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)' = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Πρόταση

Είναι $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

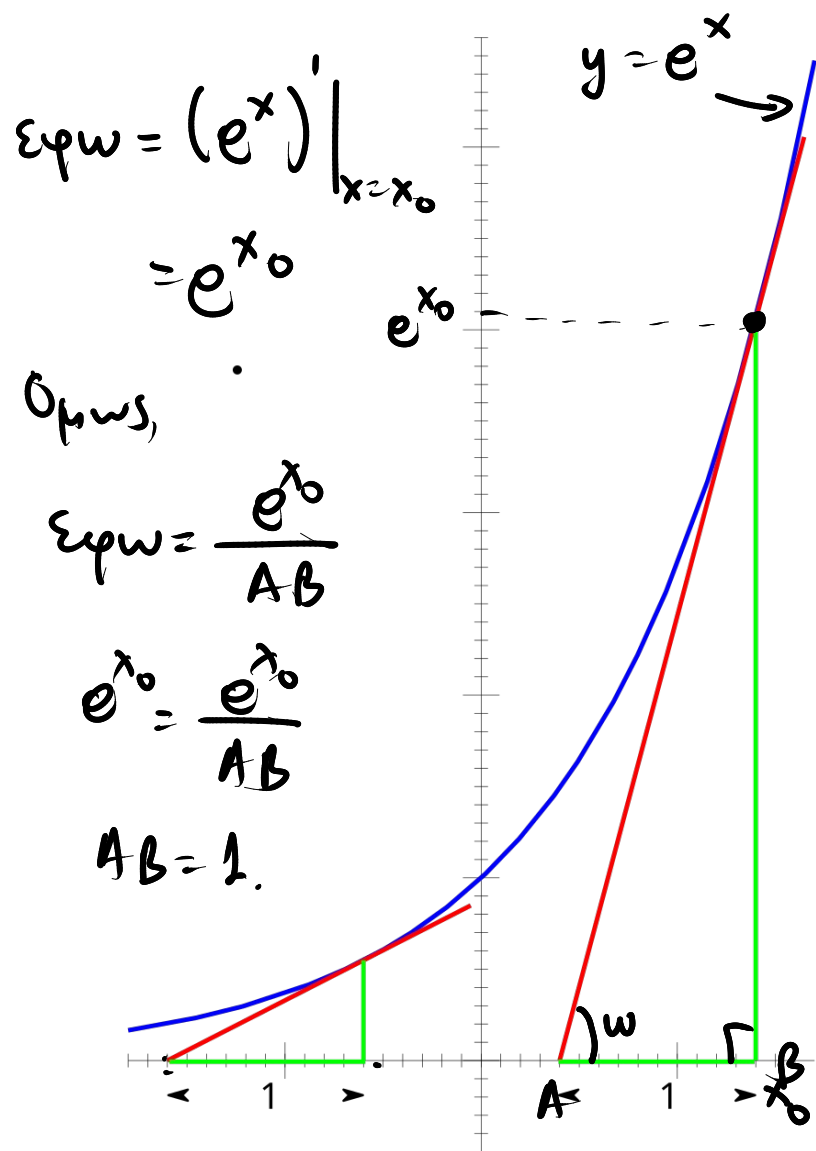
Απόδειξη

$$\begin{aligned} e^x = y &\Leftrightarrow x = \ln(y(x)) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} \ln(y(x)) \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{y(x)} \frac{d}{dx} y(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} y(x) = y(x). \end{aligned}$$

Σημείωση

Μία ακόμα απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:

<https://math.stackexchange.com/a/199656/664787>



Υπερβολικές Συναρτήσεις

Υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Υπερβολικό συνημίτονο

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Υπερβολική εφαπτομένη

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Υπερβολική συνεφαπτομένη

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Ιδιότητες

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\sinh(-x) = -\sinh x$

Δραστηριότητες

- (α) Αποδείξτε τις ιδιότητες 1, 2, 3.
- (β) Να εκφραστούν τα e^x , e^{-x} συναρτήσει των $\sinh x$, $\cosh x$.
- (γ) Να δείξετε ότι $\cosh x \geq 1$.
- (δ) Να λυθεί η ανίσωση $\cos x \geq \cosh x$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \\ &= \frac{e^{2x} + 2\cancel{e^x e^{-x}} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2\cancel{e^x e^{-x}} + e^{-2x})}{4} = \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

$$\bullet \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

$$\bullet \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

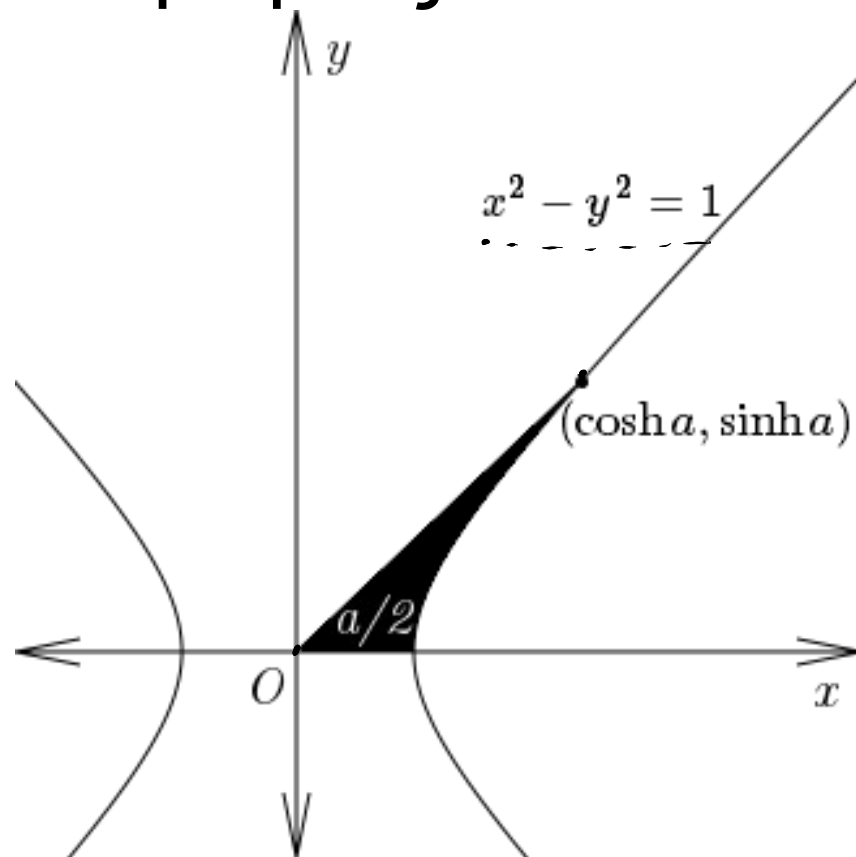
Υπερβολικές Συναρτήσεις

Η ονομασία “Υπερβολικές” οφείλεται στη στενή τους σχέση με την μοναδιαία υπερβολή.

Πιο συγκεκριμένα, οι αριθμοί $\cosh a$, $\sinh a$ μπορούν να θεωρηθούν ως οι συντεταγμένες των σημείων του δεξιού κλάδου της μοναδιαίας υπερβολής

$$x^2 - y^2 = 1,$$

που αντιστοιχούν στη “επίκεντρη” γωνία $a/2$.

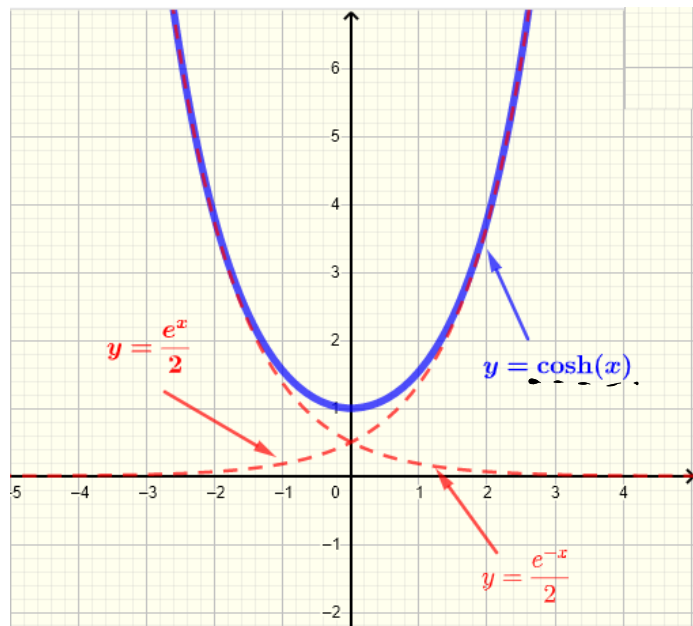


Πηγή διαγράμματος (και απόδειξη): <http://tediousderivations.blogspot.com/2013/08/hyperbolic-functions.html>

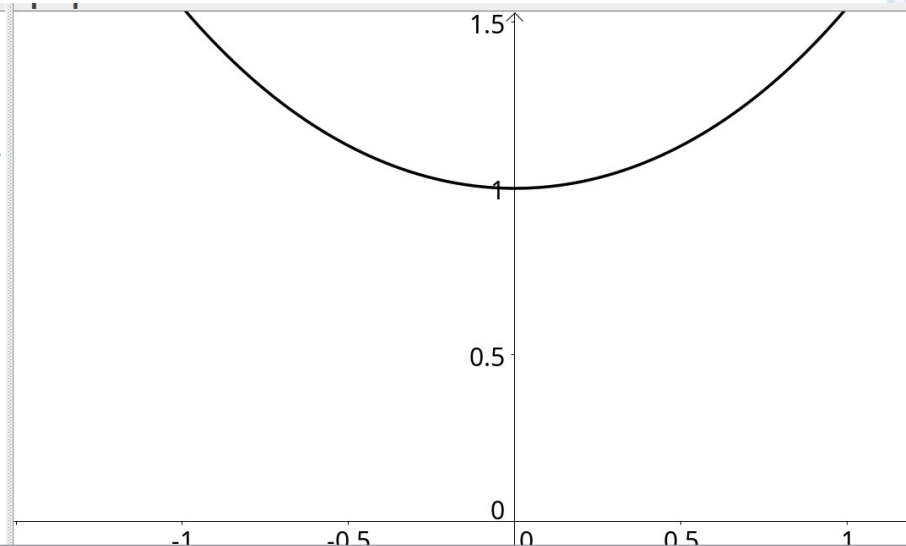
Χρήσιμος σύνδεσμος: <https://math.stackexchange.com/a/455625/664787>

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh$), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.



Ελεύθερα αντικείμενα
• $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Εξαρτημένα αντικείμενα



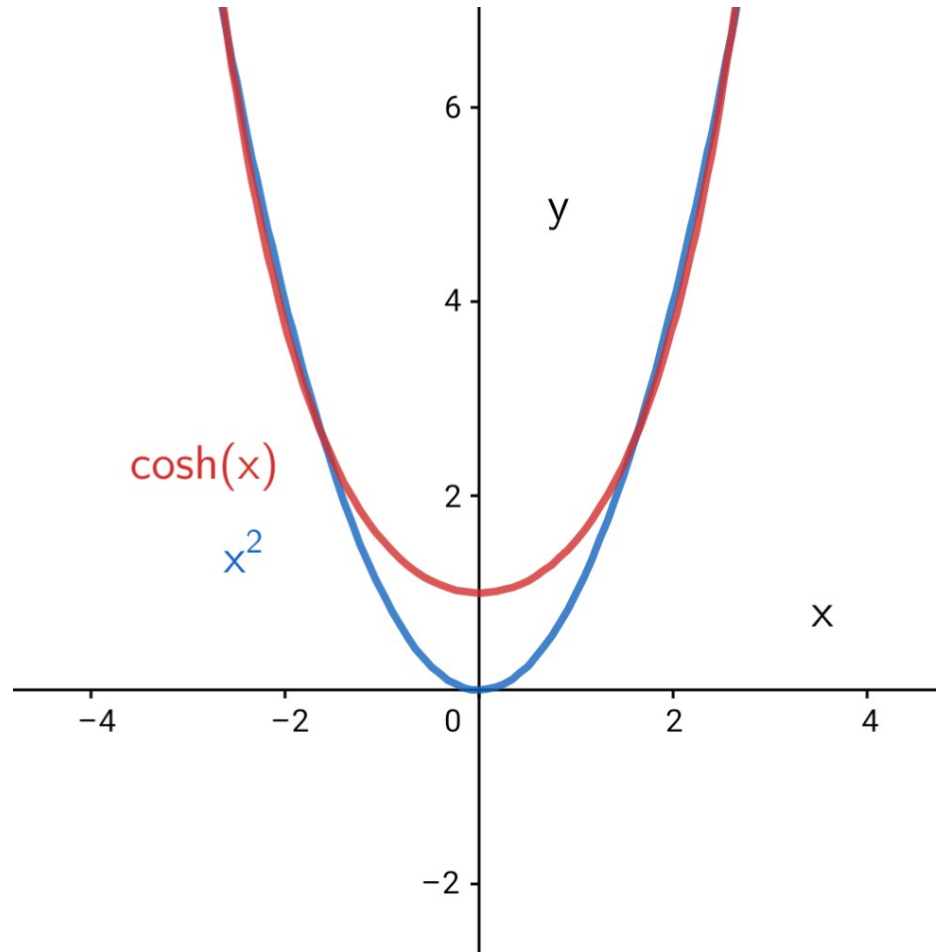
Υπερβολικές Συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν εφαρμογή στη Φυσική. Το υπερβολικό συνημίτονο ($\cosh$), περιγράφει την αλυσοειδής καμπύλη (catenary curve), δηλαδή την καμπύλη που σχηματίζεται από ένα σχοινί ή αλυσίδα που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία και σχηματίζει σχήμα U.



Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\cosh(x) \neq x^2$$



Υπερβολικές (Τριγωνομετρικές) Συναρτήσεις

- $\cosh x = \cosh(-x)$
 - $\sinh x = -\sinh(-x)$
 - $\tanh x = -\tanh(-x)$
 - $\coth x = -\coth(-x)$
 - $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
 - $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
 - $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
 - $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
 - $\sinh^2 x = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}$
 - $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
 - $\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$

Η ονομασία “Τριγωνομετρικές” οφείλεται στη ομοιότητα των σχέσεων που τις συνδέουν με αυτές που συνδέουν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι: $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$, $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad \frac{d}{dx} \coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{(\sinh x)' \cdot \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh(x) = 2$.

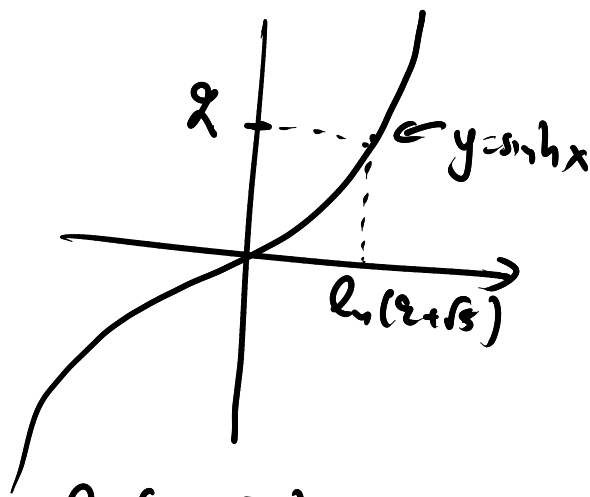
$$\sinh x = 2 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20 > 0$$

$$e^{x_{1,2}} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{Όμως } e^x > 0, \text{ άρα } e^x = 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{5})$$



$$A = \mathbb{R}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

Άσκηση 3

$$\sinh x + \cosh x = e^x.$$

Να λυθεί η εξίσωση $\sinh(x) + \cosh(x) = 5$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh 0 = 0$$

Άσκηση 4

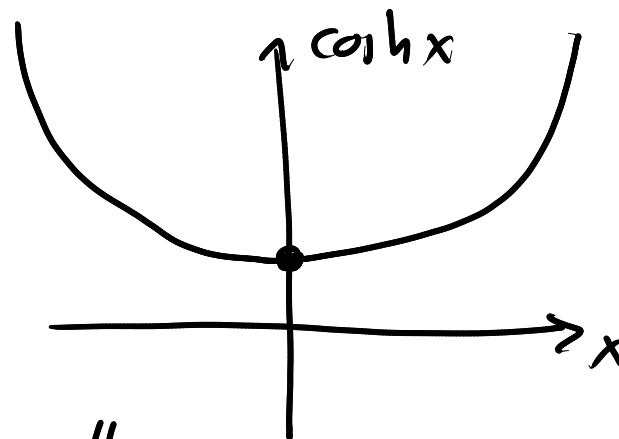
Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}$.

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(\cosh x)'$	$-$	0	$+$
$\cosh x$			

Ελ.: $\cosh 0 = 1$



$$(\cosh x)'' = \cosh x > 0 \Rightarrow \cosh x \text{ : κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

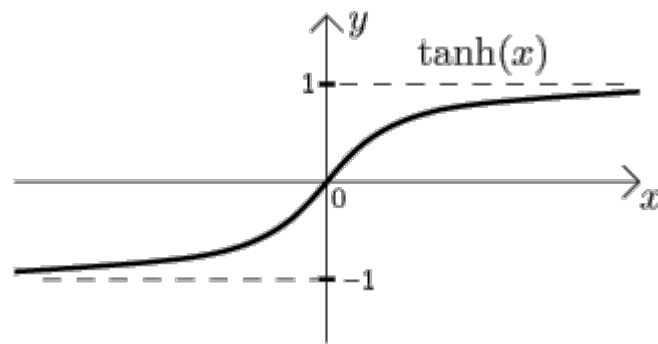
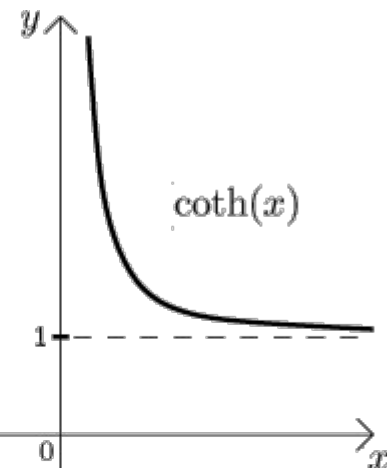
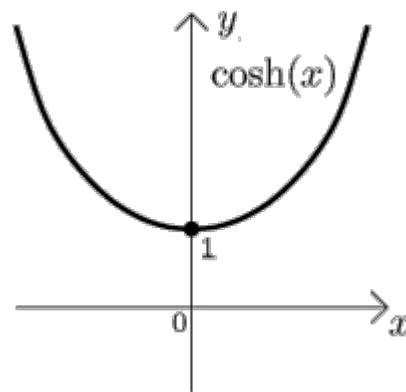
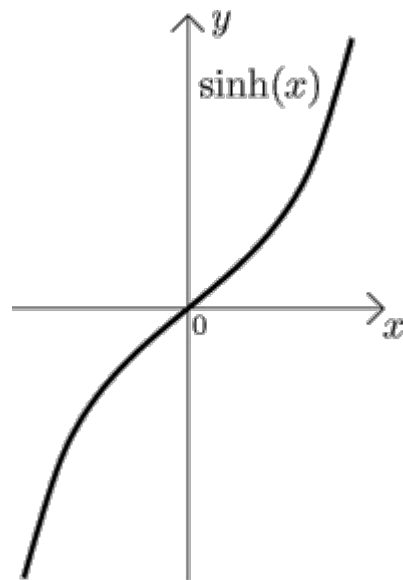
Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

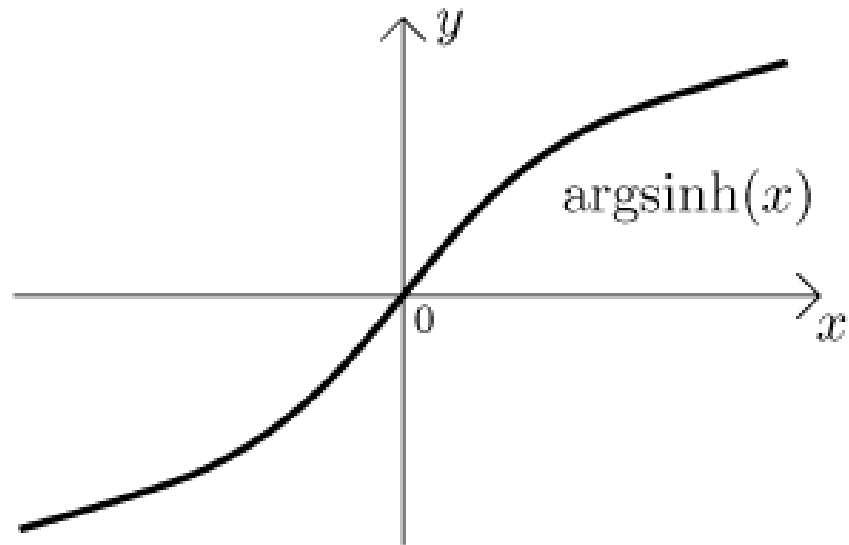
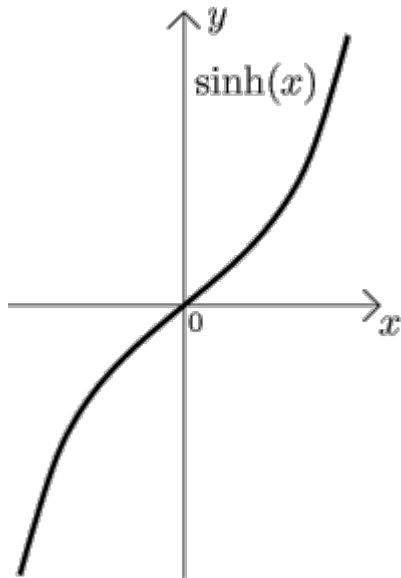
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Άσκηση 5

Ναδειχθεί ότι $\operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

$\sinh x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 1-1 άρα αντιστρέψιμη. $\Rightarrow \operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sinh x = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$

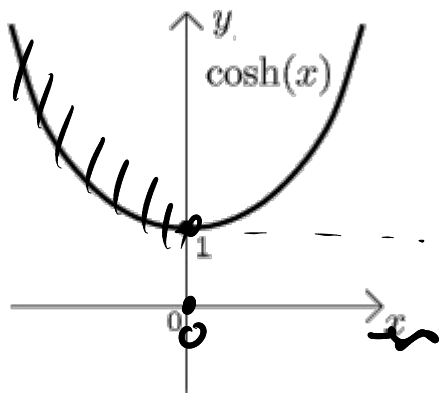
$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4y^2 + 4 > 0$$

$$e^{x_{1,2}} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \stackrel{e^x > 0}{\Rightarrow} e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), y \in \mathbb{R}.$$

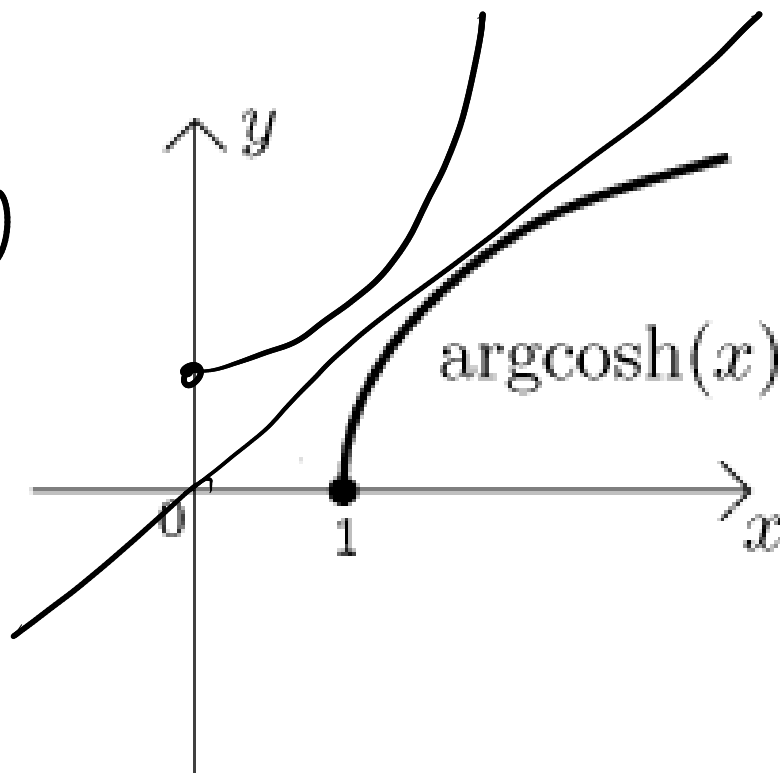
Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x), x \in [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$



$$\operatorname{argcosh} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \in [1, +\infty).$$

$$\cosh x : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Άσκηση 6

Να δειχθεί ότι $\operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$\begin{array}{l} y \geq 1 \\ \cosh x = y \\ x = \operatorname{argcosh} y \end{array} \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \xLeftrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

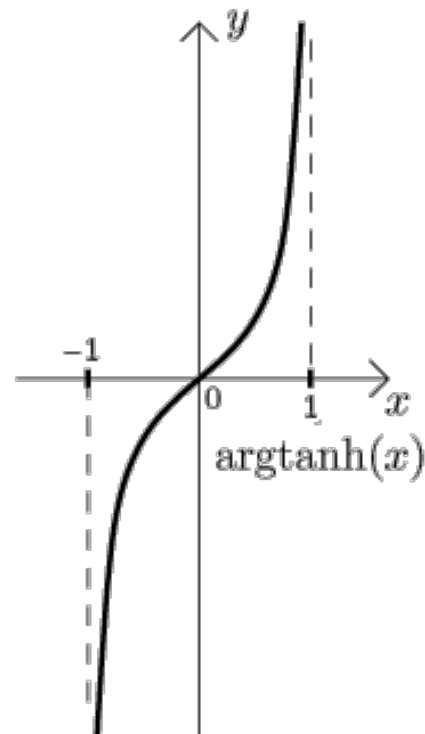
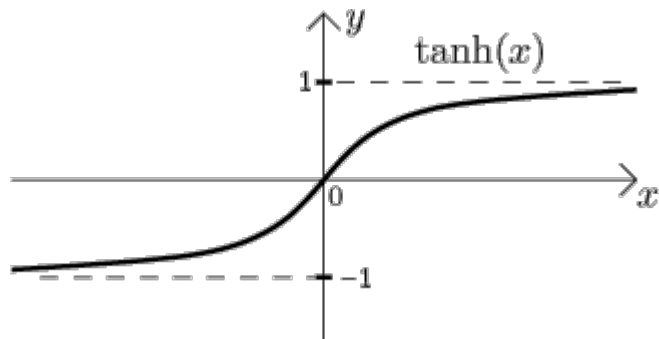
$$\Delta = (-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 \vee y \leq -1. \quad \text{απορρίπτει}$$

$$e^{x_{1,2}} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Όμως, $x \geq 0 \Rightarrow$ το "-" απορρίπτει $\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
 $y \geq 1 \Rightarrow y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1 \nearrow$ $\operatorname{argcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

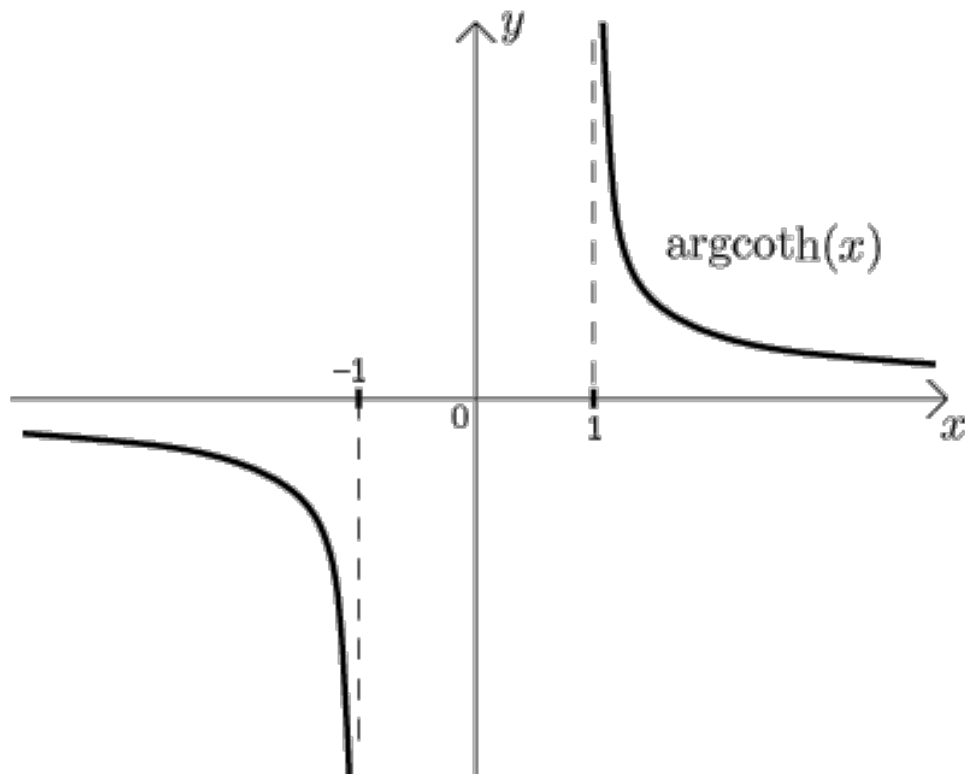
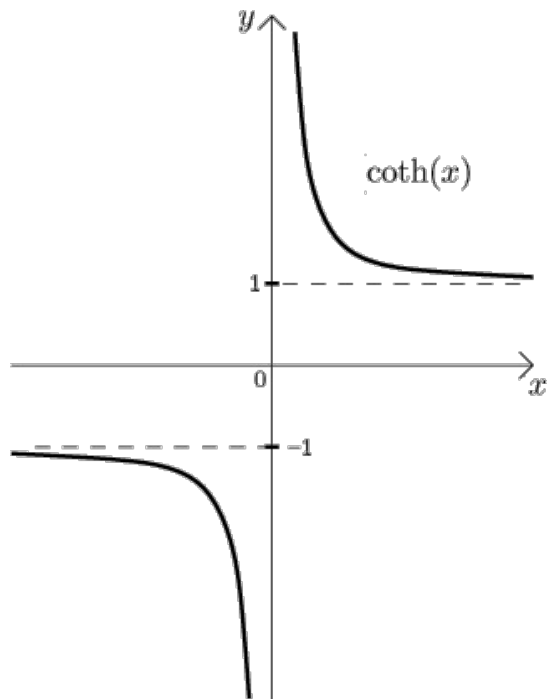
$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad x \in (-1, 1).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2}, |x| < 1.$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{argcoth}(x) = \frac{1}{1 - x^2}, |x| > 1.$$

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}.$$

