

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Χειμερινό Εξάμηνο 2025 – 2026

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Εμβαδόν χωρίου

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Θεμελιώδη Θεωρήματα Ολοκληρωτικού
Λογισμού

Περιεχόμενα

1. Εμβαδόν χωρίου Ω .

2. Ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ όπου f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

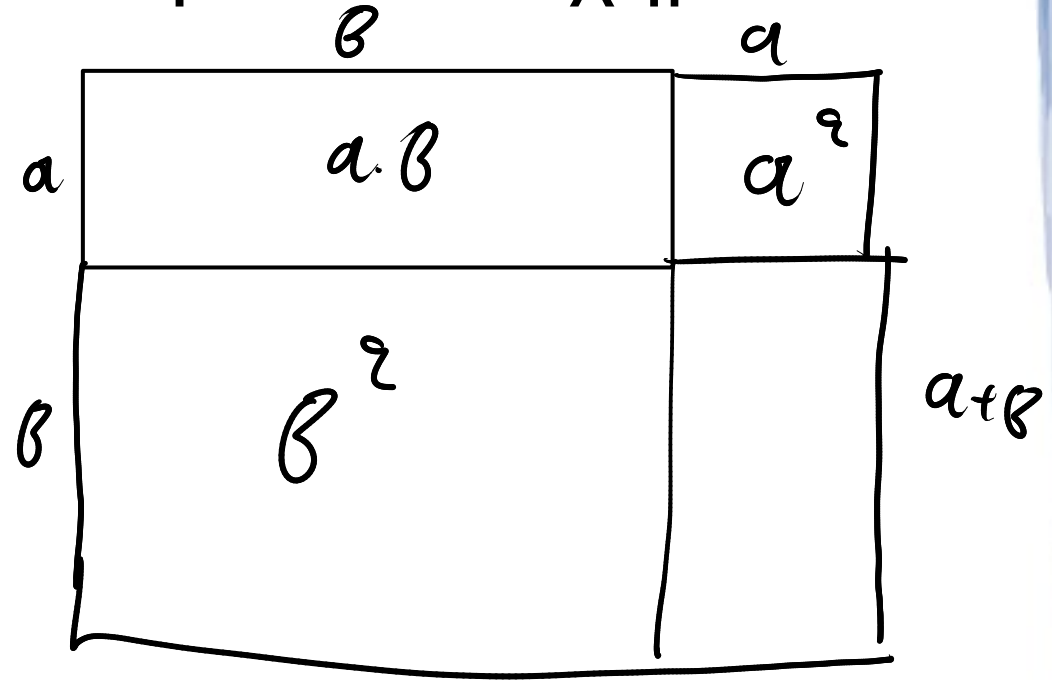
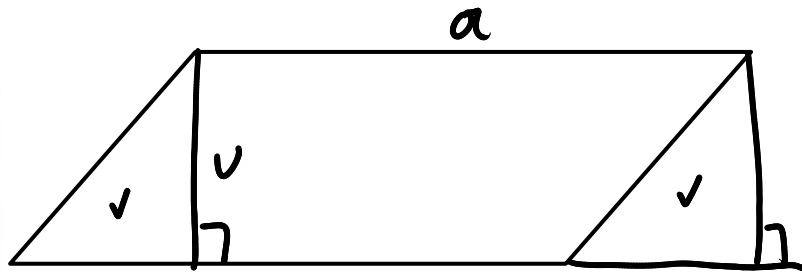
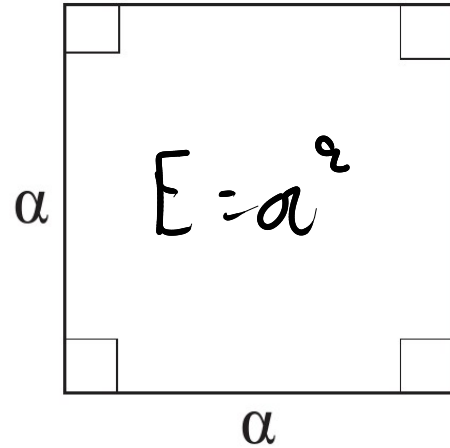
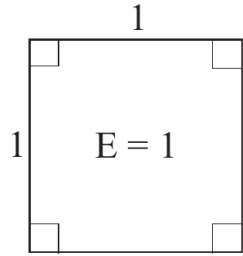
3. Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in [\alpha, \beta]$

4. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F'(x) = f(x)$.

5. Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα
του Ολοκληρωτικού Λογισμού $\left(\int_{\alpha}^x f(x) dx \right)' = f(x)$

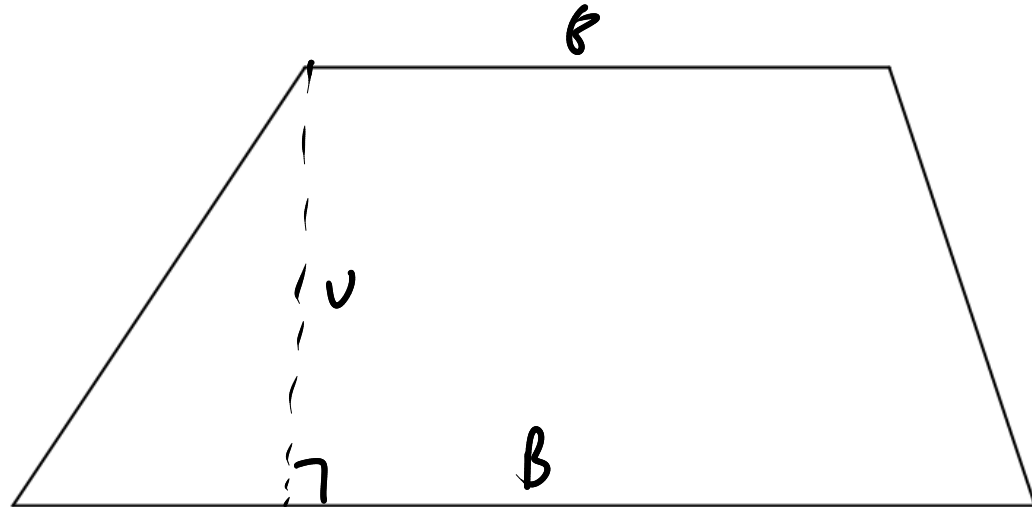
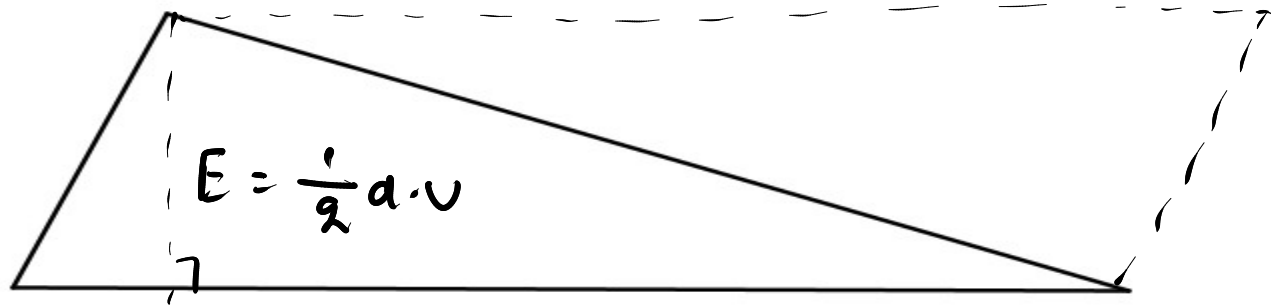
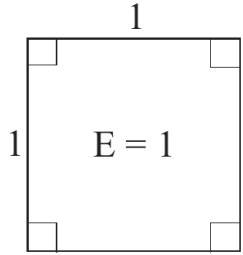
6. Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα
του Ολοκληρωτικού Λογισμού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Εμβαδόν επίπεδων πολυγωνικών σχημάτων



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

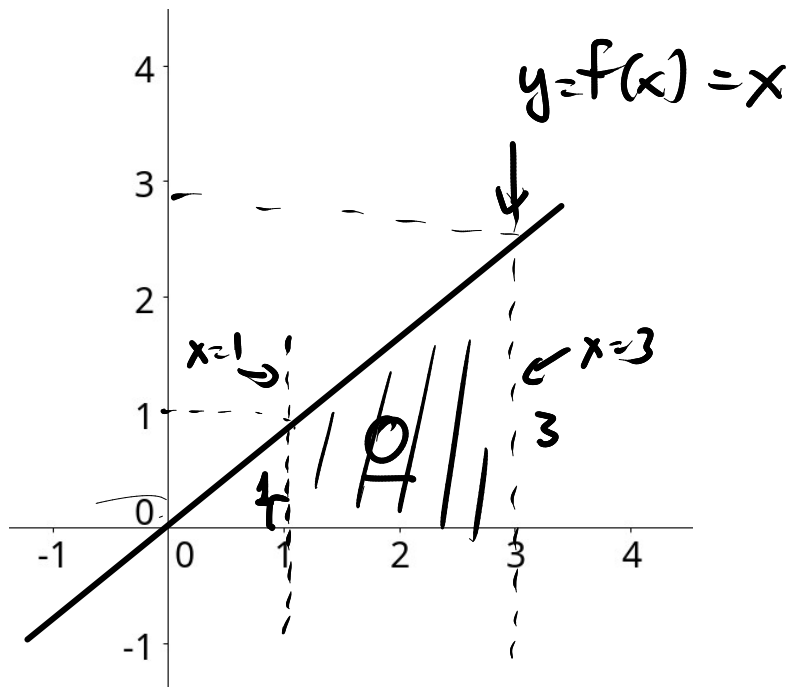
Εμβαδόν επίπεδων πολυγωνικών σχημάτων



$$E = \frac{a+b}{2} \cdot v$$

Εμβαδόν χωρίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την $y = f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.



$$E(\Omega) = \frac{b + B}{2} \cdot v$$

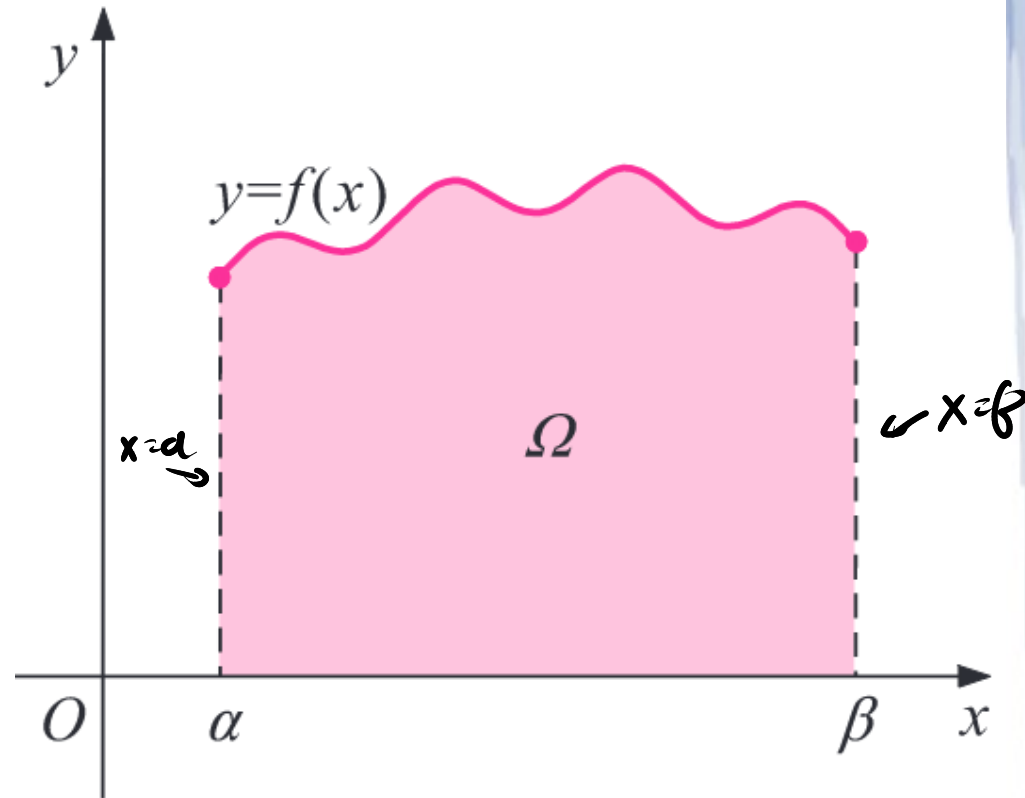
$$= \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4 \text{ τ.μ.}$$

Εμβαδόν χωρίου (άθροισμα Riemann)

Έστω μία συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και μη αρνητική ($f(x) \geq 0$) για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Αναζητούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται:

- α) Από τη γραφική παράσταση της f .
- β) Τον άξονα των x
- γ) Τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Άθροισμα Riemann

Χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (\beta - \alpha)/n$.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta.$$

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

$$\text{Έστω, } S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

Το S_n είναι μία εκτίμηση του $E(\Omega)$.

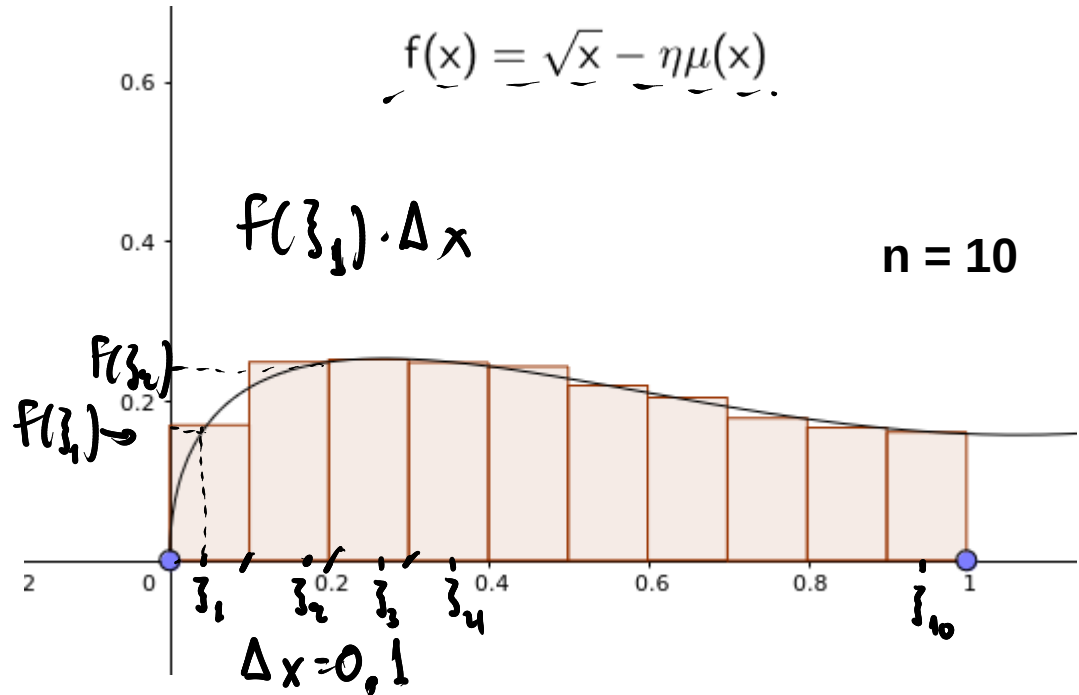
Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$,

τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν $E(\Omega)$** του χωρίου Ω .



Άθροισμα Riemann

Χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (\beta - \alpha)/n$.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta.$$

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

$$\text{Έστω, } \mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{f}(\xi_k) \Delta x$$

Το $\mathbf{S}_n$ είναι μία εκτίμηση του $E(\Omega)$.

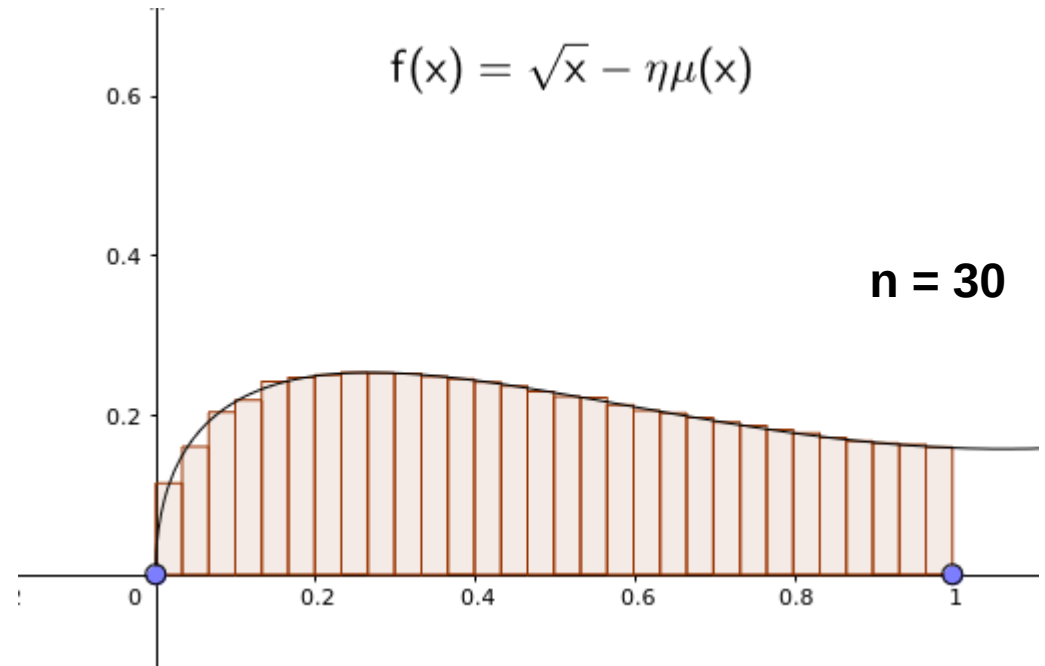
Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$,

τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{f}(\xi_k) \Delta x$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν $E(\Omega)$** του χωρίου Ω .



Άθροισμα Riemann

Χωρίζουμε το $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (\beta - \alpha)/n$.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta.$$

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$,
 $k = 1, 2, \dots, n-1$, και σχηματίζουμε το
ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

$$\text{Έστω, } S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

Το S_n είναι μία εκτίμηση του $E(\Omega)$.

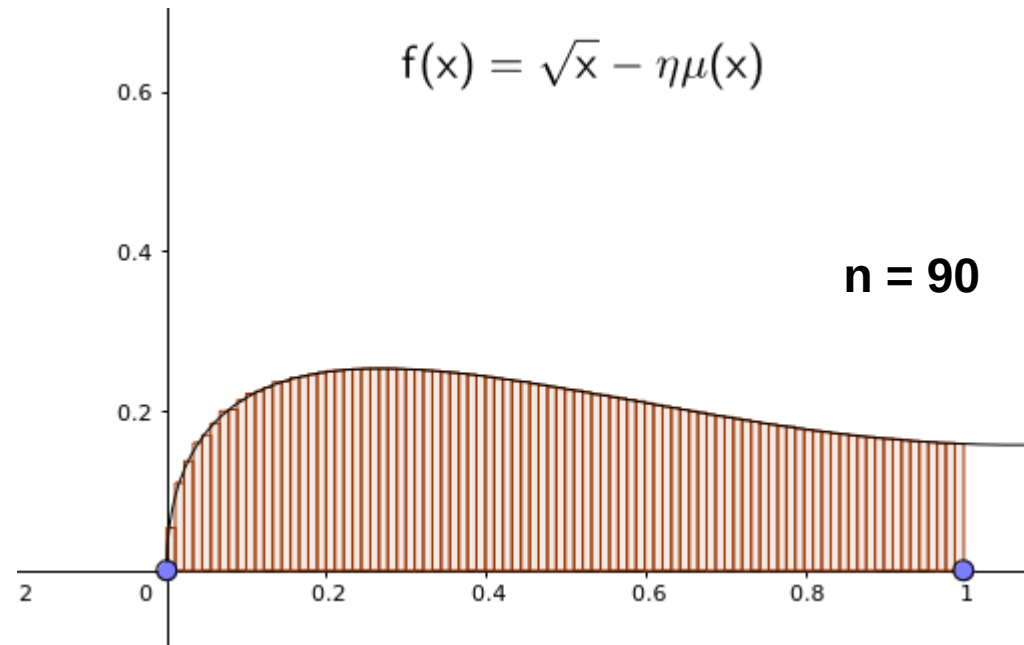
Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$,

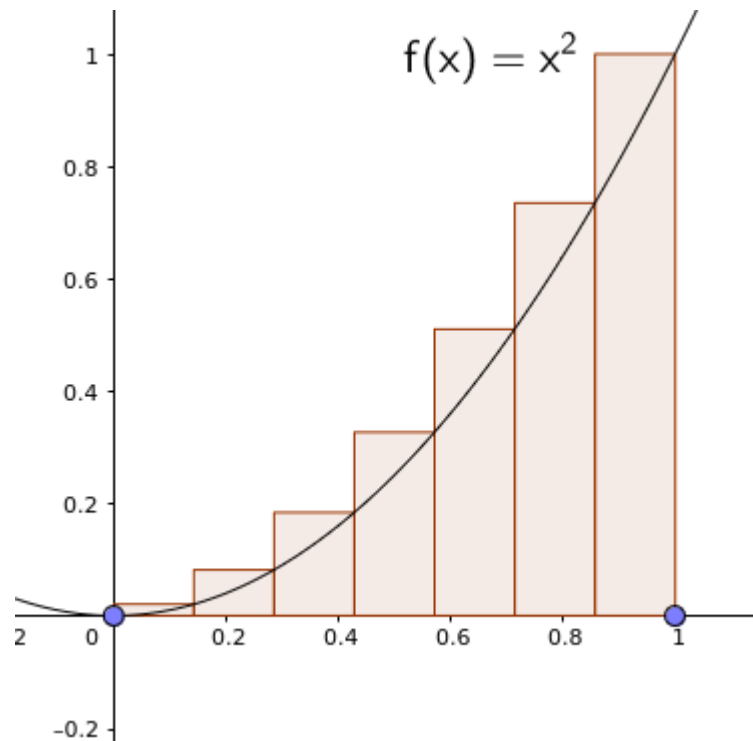
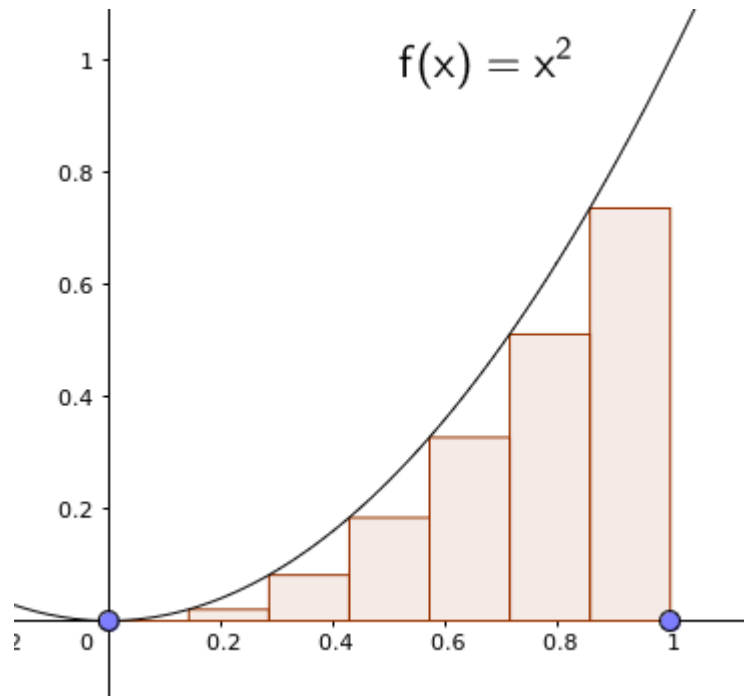
τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν $E(\Omega)$** του χωρίου Ω .

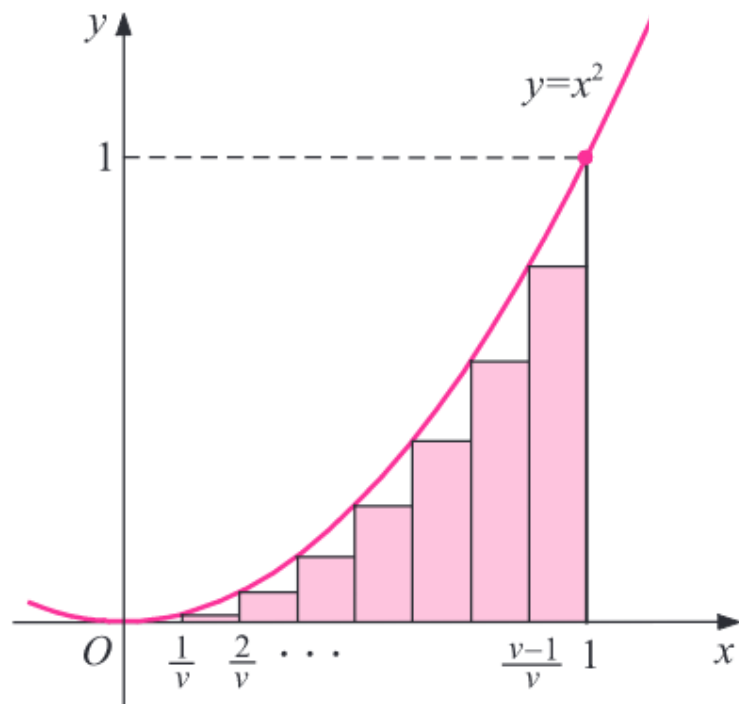


Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου



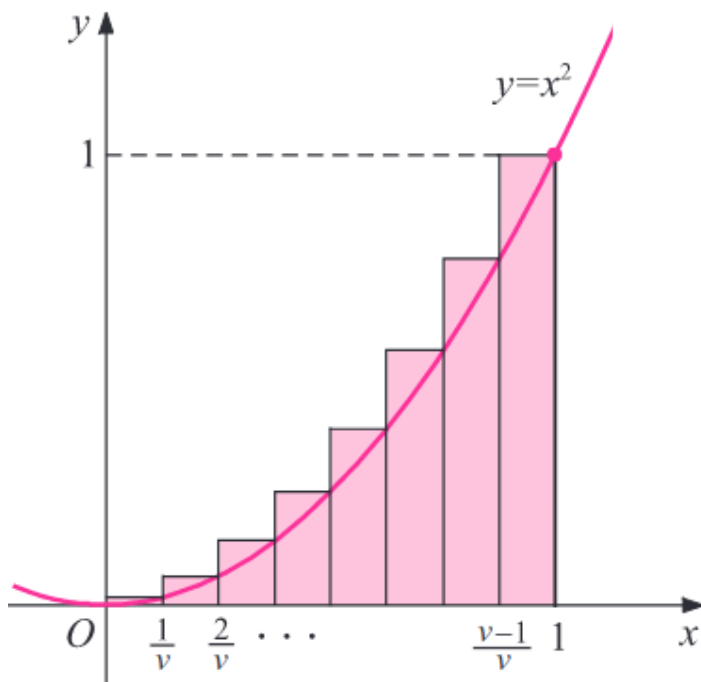
Όταν το άθροισμα Riemann συγκλίνει τότε είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k .
Ο υπολογισμός του ορίου είναι πιο εύκολος όταν τα σημεία ξ_k επιλέγονται να είναι
(α) τα ακραία σημεία κάθε διαστήματος διαμέρισης (αριστερό ή δεξί)
(β) τα σημεία του διαστήματος όπου η συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου



$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= f(0)\frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right)\frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] \\ &= \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}.\end{aligned}$$

Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου



$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right)\frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right)\frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right)\frac{1}{v}$$

$$= \frac{1}{v} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}.$$

Παρατήρηση

Προσέξτε πως μέχρι το σημείο αυτό δεν έχει γίνει αναφορά στην έννοια του ολοκληρώματος.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$. Με τα σημεία

$a = x_1, x_2, \dots, x_n = b$ χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (b - a) / n$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ σε κάθε υποδιάστημα και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο του S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$, υπάρχει

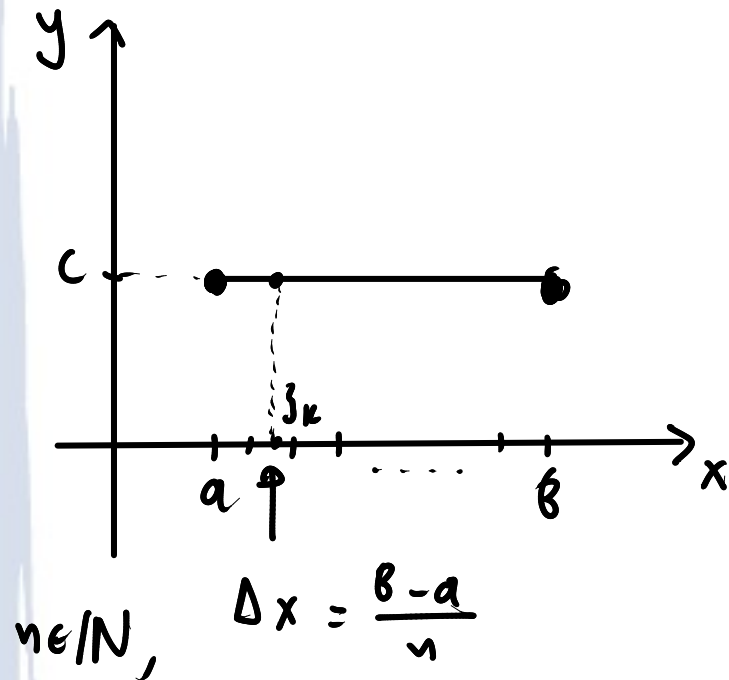
και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων τιμών ξ_k . Την τιμή του ορίου αυτού την ονομάζουμε **ορισμένο ολοκλήρωμα** της $f(x)$

στο $[a,b]$ και τη συμβολίζουμε με $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x$.

Έστω $\alpha < \beta$ και $c \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c \, dx = c(\beta - \alpha)$.

$f(x) = c$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x$$



$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n c \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} =$$

$$= c \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} + c \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} + \dots + c \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} =$$

n φορές

$$= n \cdot c \cdot \frac{\beta - \alpha}{n} = c(\beta - \alpha).$$

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

$$1. \int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx, \quad a, \beta, \gamma \in \Delta_f$$

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_\beta^a f(x)dx = -\int_a^\beta f(x)dx \quad \leftarrow \text{ορισμός}$$

$$4. \int_a^\beta (\kappa f(x) + \lambda g(x))dx = \kappa \int_a^\beta f(x)dx + \lambda \int_a^\beta g(x)dx, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$5. \text{Αν } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, \beta] \quad \text{τότε } \int_a^\beta f(x)dx \geq 0$$

$$6. \text{Αν } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, \beta] \quad \text{τότε } \int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$$

$$7. \left| \int_a^\beta f(x)dx \right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$$

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Εμβαδόν

Ορισμένο Ολοκλήρωμα $\neq$ Εμβαδόν

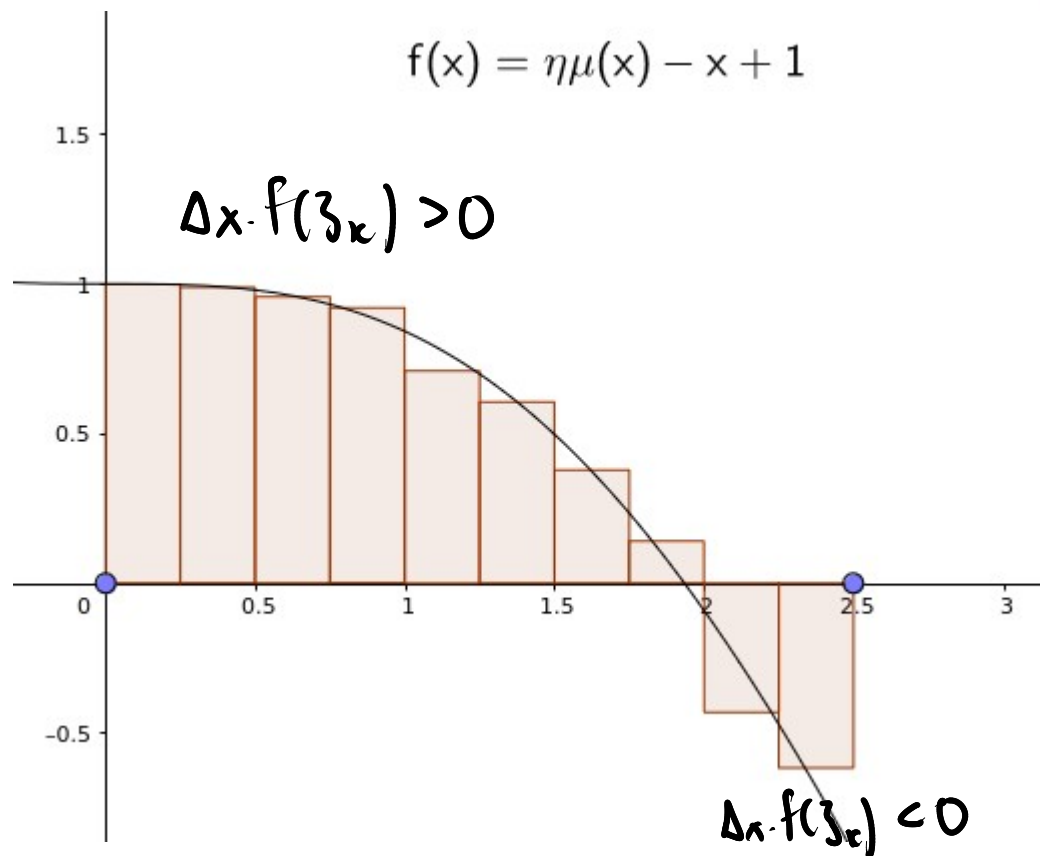
Όταν η συνάρτηση παίρνει και αρνητικές τιμές, τα γινόμενα

$$\Delta x \cdot f(\xi_k)$$

δεν εκφράζουν εμβαδόν ορθογωνίου.

Στην περίπτωση αυτή το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν είναι εμβαδόν...

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x$$

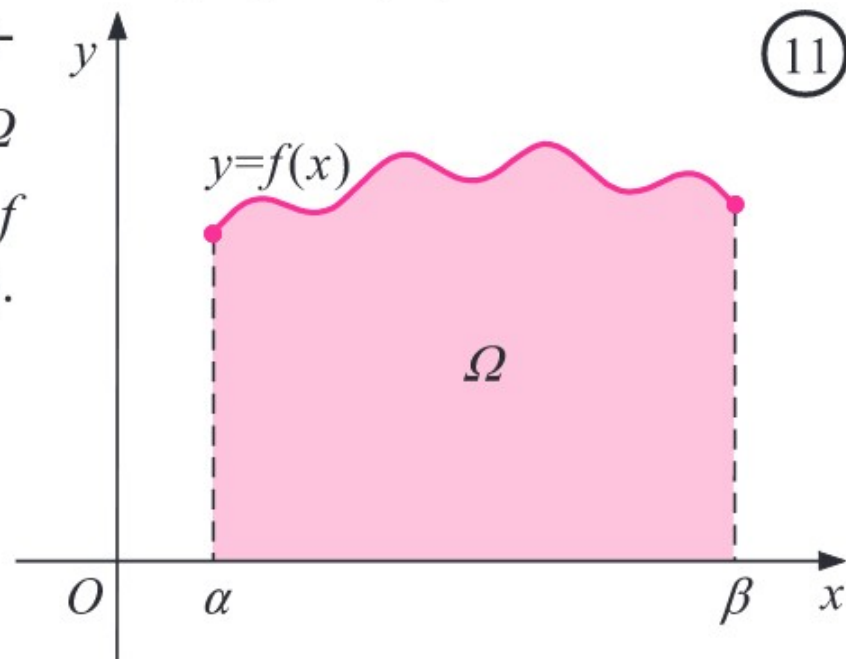


Ορισμένο Ολοκλήρωμα = Εμβαδόν

... όμως, όταν η f είναι **μη αρνητική** στο $[\alpha, \beta]$, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα **είναι εμβαδόν**.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

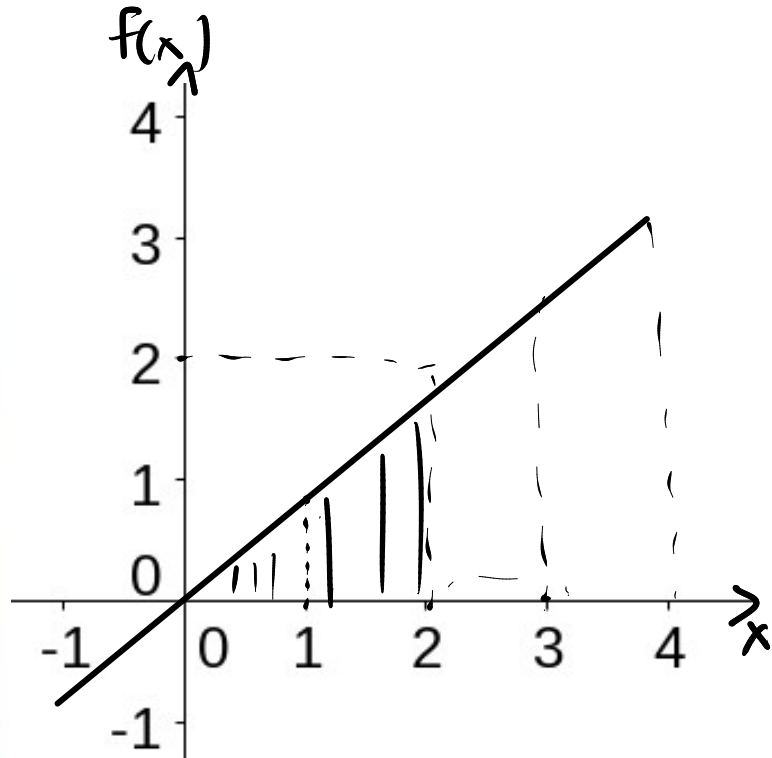
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega).$$



Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in [\alpha, \beta]$

Όπου $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και φραγμένη.

Έστω $f(x) = x$. Να σχεδιαστεί η $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.



$$F(0) = \int_0^0 t dt = 0$$

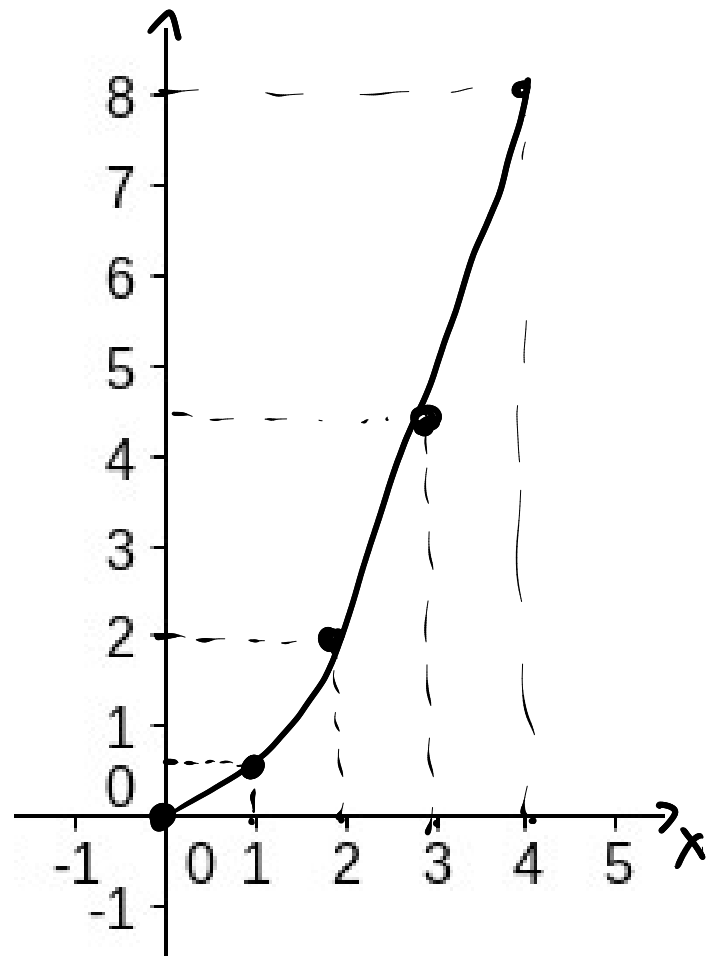
$$F(1) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = \int_0^2 t dt = 2$$

$$F(3) = \int_0^3 t dt = \frac{9}{2}$$

$$F(4) = \int_0^4 t dt = 8$$

$F(x)$



x	0	1	2	3	4
F(x)					

Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_x^{x+h} m_h dt \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{x+h} M_h dt.$$

$$m_h \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq M_h$$

$m_h = \min\{f(t), t \in [x, x+h]\}$
 $M_h = \max\{f(t), t \in [x, x+h]\}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x)$$


$$F'(x) = f(x).$$


$$F(x) = \int f(x) dx$$

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Είναι θεμελιώδες γιατί ενοποιεί με ακρίβεια δύο φαινομενικά πολύ διαφορετικά μέρη της μαθηματικής ανάλυσης, τη διαφοροποίηση και την ολοκλήρωση. Το 1^ο Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού δηλώνει πως ο ρυθμός μεταβολής του ολοκληρώματος στο διάστημα $[a, x]$ είναι ίσος με την τιμή της συνάρτησης στο x .

Άσκηση 19 Θ.Θ.Ο.Λ. $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$

Αν $F(x) = \int_{-5}^x (t^2 + \sin t) dt$, $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k^2 + \sin t_k) \big|_{t=t_{k-1}} \cdot \Delta x$ $\left| F(-5) = \int_{-5}^{-5} (t^2 + \sin t) dt = 0 \right.$

(α) Να βρεθεί η $F'(x)$ με εφαρμογή του 1^{ου} Θ.Θ.Ο.Λ.

(β) Να βρεθεί η $F(x)$ ως παράγουσα της $F'(x)$. Στη συνέχεια, βρείτε την σταθερά.

(γ) Να βρεθεί το $\int_{-5}^5 (t^2 + \sin t) dt$.

Λύση

Τελικά: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + \cos 5 + \frac{125}{3}$

(γ) $\int_{-5}^5 (t^2 + \sin t) dt = F(5) = \frac{125}{3}$

(α) $F'(x) = x^2 + \sin x$

(β) $F(x) = \int x^2 + \sin x dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + C$, $\left. \begin{array}{l} \text{για } x=5 \\ \text{και } F(5)=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(-5)^3}{3} - \cos(-5) + C = 0 \Leftrightarrow C = \cos 5 + \frac{125}{3}$
 Απο $F(x) = \int_{-5}^x (t^2 + \sin t) dt \Rightarrow F(-5) = 0$

$$1^{\circ} \text{ Θ.Ο.Ο.Λ} : \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

Άσκηση

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ ως προς τη μονοτονία.

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

Ασκήσεις

Υπολογίστε τα παρακάτω:

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_4^x e^{t^2} dt \right) = e^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^1 \cos(t^3) dt \right) = \frac{d}{dx} \left(- \int_1^x \cos(t^3) dt \right) = -\cos(x^3)$$

Πόρισμα

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x))g'(x) \quad \Bigg| \quad \left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = (F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Απόδειξη

$$\int_a^{g(x)} f(t) dt = F(g(x)), \text{ οπώ } F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ και } F'(x) = f(x)$$

Άσκηση

Υπολογίστε το:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t dt = \sin(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \sin(x^2)$$

Η συνάρτηση F ως μια παράγουσα της f

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής. Σε προηγούμενα μαθήματα, συμβολίσαμε το σύνολο όλων των παραγουσών της f ως το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x) dx$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x)$, δηλαδή ότι η $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μία παράγουσα της f .

Καθώς όλες οι παράγουσες διαφέρουν κατά μία σταθερά, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα παραπάνω σύμβολα σε μία σχέση ως εξής:

$$\int f(x) dx = \int_{\alpha}^x f(t) dt + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $\underline{G}$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt \quad F'(x) = f(x) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = F(\beta)$$
$$F(x) = G(x) + C$$

Είναι θεμελιώδες γιατί ενοποιεί με ακρίβεια δύο φαινομενικά πολύ διαφορετικά μέρη της μαθηματικής ανάλυσης, τη διαφοροποίηση και την ολοκλήρωση.

Το 2^ο Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού προσφέρει τη δυνατότητα εύκολου υπολογισμού ενός ολοκληρώματος.

Μία απόδειξη για τα θεμελιώδη θεωρήματα μπορεί να βρεθεί εδώ:

<https://mathscholar.org/2019/02/simple-proofs-the-fundamental-theorem-of-calculus/>

Απόδειξη 2ου Θ.Θ.Ο.Λ.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_a^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_a^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$

$$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ασκήσεις

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 t \, dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2.$$

$$\underline{\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)}$$

$$\int_0^1 e^x \, dx = \left. e^x \right|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

$$\int_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{t^4 + 1} \right) dt = \left. \frac{t^2}{t^4 + 1} \right|_0^2 = \frac{2^2}{2^4 + 1} - \frac{0^2}{0^4 + 1} = \frac{4}{17}.$$

Ασκήσεις

$$\int_1^4 1 \, dx = x \Big|_1^4 = 4 - 1 = 3.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^0) = \frac{1}{2} (e^4 - 1).$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3} (\cos(3\pi) - \cos 0) = -\frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{2}{3}.$$

Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} (e^{2x} - 2\cos x) dx &= \left. \frac{1}{2} e^{2x} - 2\sin x \right|_0^{\pi/2} = \left(\frac{1}{2} e^{\pi} - 2\sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - 2\sin 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{\pi} - 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{\pi} - \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx &= \int_1^8 x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} \bigg|_1^8 = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \bigg|_1^8 \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(8^{\frac{5}{3}} - 1^{\frac{5}{3}} \right) = \frac{3}{5} (32 - 1) = \frac{93}{5}.\end{aligned}$$

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8} \right)^5 = 2^5 = 32$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x) dx &= \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.\end{aligned}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\downarrow$$
$$u(x) \cdot v(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x \cos x}_{(\sin x)'} dx = x \cdot \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cancel{(x)}' dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 - \left[-\cos x \right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x) dx &= \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e (x)' \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x \Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - (e - 1) = e - e + 1 = 1.\end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση Ι: $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$

Θέτουμε $\varphi(x) = u \Rightarrow \varphi'(x) dx = du$ και $\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$

Προϋποθέσεις

- f συνεχής στο $[\varphi(a), \varphi(b)]$
- φ είναι συνεχής και με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$.

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx \\ &= (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du, \end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση I: $\int_{\alpha}^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f(u) du$

$$\int_0^2 x \cos(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{(x^2 + 1)' \cos(x^2 + 1)}_{du} dx \xrightarrow{u = x^2 + 1} \frac{1}{2} \int_1^5 \cos u du =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Για } x=0 : u=0^2+1=1 \\ \text{Για } x=2 : u=2^2+1=5 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{u=1}^{u=5} = \frac{1}{2} (\sin 5 - \sin 1).$$

$$\cos t \cdot \cos t = \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση II: $\int_{\alpha}^b f(x) dx$

Θέτουμε $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) dt$ και $\int_{\alpha}^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left. \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Θέτω $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \text{ για } t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Για $x=0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0$

Για $x=1 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$$\theta \text{ έρω } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt \text{ και } \sin t = \frac{x}{2} \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}.$$

Ασκήσεις

$$\text{Για } x=0 : t = \arcsin 0 = 0$$

$$\text{Για } x=1 : t = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t|$$

$$= 2\cos t, \text{ για } t \in [0, \frac{\pi}{6}].$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin t}{\cancel{2\cos t}} \cdot \cancel{2\cos t} dt$$

$$= 2[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{6}} = -2\left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos 0\right) =$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \int_0^1 x^2 (-e^{-x})' dx = -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1} - 2 \int_0^1 x (e^{-x})' dx = -e^{-1} - 2 x e^{-x} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1} - 2e^{-1} + 2(-e^{-x}) \Big|_0^1 = -3e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = 2 - \frac{5}{e}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x \cos 2x) \, dx = \dots$$

Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int_e^1 x \ln x \, dx &= \int_e^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_e^1 - \int_e^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\&= \frac{1^2}{2} \cdot \ln 1 - \frac{e^2}{2} \cdot \ln e - \frac{x^2}{4} \Big|_e^1 = -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4} = \\&= -\frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

$$\text{Θέτω } t = \sqrt{3-2x} \Rightarrow t^2 = 3-2x (\Rightarrow x = \frac{1}{2}(3-t^2) \Rightarrow dx = -t dt.$$

Ασκήσεις

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow t=1.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x}} dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{3-t^2}{t} (-t dt) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^1 (t^2 - 3) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - 3t \right) \Big|_{\sqrt{3}}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - 3 \right) - \left(\frac{\sqrt{3}^3}{3} - 3\sqrt{3} \right) \right] = -\frac{4}{3} + \sqrt{3}.$$

$$-x^2 + x = \underbrace{-x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$$

Ασκήσεις

$$\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cancel{\cos t}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{\cos t} dt = \frac{\pi}{6}.$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt \quad \text{και} \quad \sin t = 2x - 1 \Rightarrow t = \arcsin(2x - 1)$$

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 t} = \frac{1}{2} |\cos t| = \frac{1}{2} \cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{6}].$$

$$\text{Για } x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0$$

$$\text{Για } x = \frac{3}{4} \Rightarrow t = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Ενδιαφέρον:

$$x = \sin^2 t \Rightarrow dx = 2 \sin t \cos t dt$$

$$\sin t = \sqrt{x} \Rightarrow t = \arcsin \sqrt{x}$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx = \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \cdot \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \dots$$

Ασκήσεις

Ναδειχθεί ότι $\frac{1}{e^4} \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e}$.

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -x^2 \leq -1$$

$$\stackrel{e^x \nearrow}{\Rightarrow} e^{-4} \leq e^{-x^2} \leq e^{-1} \Rightarrow \int_1^2 e^{-4} dx \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \int_1^2 e^{-1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^4} \leq \int_1^2 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e}.$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$f: \text{άρτια} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) \, dx$$

$$f: \text{περιττή} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx = 0$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Άσκηση: Αποδείξτε ότι αν f : άρτια $\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ άρτια, αν A συμμετρικό ως προς το 0 και
 $\forall x \in A : f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

$$\int_{-\alpha}^0 f(x) dx \xrightarrow[\frac{dx = -dt}{t = -x}]{\substack{t = -x \\ x = -t}} \int_{\alpha}^0 f(-t)(-dt) = - \int_{\alpha}^0 f(t) dt = \int_0^{\alpha} f(t) dt.$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

Άσκηση: Αποδείξτε ότι αν f : περιττή $\Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-1}^1 \sin x \cos^4 x \, dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-1}^1 x^3 \cos^3 x \, dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-2}^2 \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

Ασκήσεις

Ασκήσεις

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin^2(x) \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \cosh x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$