

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αόριστο Ολοκλήρωμα (2ο μέρος)

Χειμερινό Εξάμηνο 2025 – 2026

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0 dx = c, \quad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax + \beta}$, θέτουμε $t = \sqrt[n]{ax + \beta}$,

$$x \geq -1$$

$$\int x \sqrt{x+1} dx = \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int t^4 - t^2 dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C$$

$$t = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx \quad \Bigg| \quad = \frac{2}{5} \sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C.$$

και $x = t^2 - 1$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax + \beta}$,

θέτουμε $t = \sqrt[n]{ax + \beta}$,

$x < 2$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = - \int \frac{(2-t^2)^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (4 - 4t^2 + t^4) dt =$$

$$t = \sqrt{2-x} \quad = -8t + \frac{8}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + C = -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}\sqrt{(2-x)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} + C$$

$$t^2 = 2-x$$

$$x = 2-t^2$$

$$dx = -2t dt$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax + \beta}$, θέτουμε $t = \sqrt[n]{ax + \beta}$,

$$\int x \sqrt[3]{x + 1} dx$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax + \beta}$, θέτουμε $t = \sqrt[n]{ax + \beta}$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4-x}} dx$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x , $\sqrt[n]{ax + \beta}$ και $\sqrt[m]{ax + \beta}$, θέτουμε $t = \sqrt[k]{ax + \beta}$,

$x > 0$ όπου $k = \text{ΕΚΠ των } n, m$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{t^2 - t^4}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = \int \frac{t^2(1-t)(\cancel{t})}{t^2(\cancel{t}+1)} \cdot 6t^5 dt$$

$$= 6 \frac{1}{6} t^6 - 6 \frac{1}{7} t^7 + c = x - \frac{6}{7} \sqrt{x^7} + c.$$

$x = t^2 \wedge t^4 \wedge t^6 \dots$
 $x = t^3 \wedge t^6 \wedge t^9 \wedge \dots$

$\left. \begin{array}{l} x = t^2 \wedge t^4 \wedge t^6 \dots \\ x = t^3 \wedge t^6 \wedge t^9 \wedge \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ε.Κ.Π. (2,3)} \\ x = t^6 \end{array}$

$\Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2, \quad \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3.$

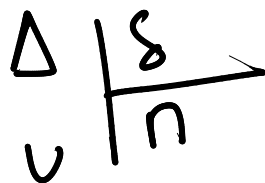
Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Έστω P, Q , δύο μη μηδενικά πολυώνυμα στο R και $Q(x) = \prod_{i=1}^k q_i(x)^{n_i}$ η ανάλυση του Q σε ανάγωγα πολυώνυμα. Υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο b και $\forall q_i, i = 1, \dots, k$, μοναδικά πολυώνυμα $\alpha_{ij}, j = 1, \dots, n_i$ με $\deg \alpha_{ij} < \deg q_i$, τέτοια ώστε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = b(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}(x)}{q_i(x)^j}.$$

Αν $\deg P < \deg Q$, τότε $b = 0$.



Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης, την εκφράζουμε ως άθροισμα απλούστερων (μερικών) κλασμάτων ως εξής:

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρανομαστή, βρίσκουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης αριθμητή διά παρανομαστή και εφαρμόζουμε τη ταυτότητα της διαίρεσης.
- Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή του κλάσματος που προκύπτει.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Στους παράγοντες του παρανομαστή αντιστοιχούμε μερικά κλάσματα ως εξής:
 - Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x - a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{A}{x - a}$, όπου A σταθερά.
 - Σε κάθε παράγοντα $(x - a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\frac{A_1}{x - a}, \frac{A_2}{(x - a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x - a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \dots, A_k$ σταθερές.
 - Σε κάθε δευτεροβάθμιο με αρνητική διακρίνουσα παράγοντα $ax^2 + \beta x + \gamma$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{Ax + B}{ax^2 + \beta x + \gamma}$, όπου A, B σταθερές.
- Απαλείφουμε τους παρανομαστές και βρίσκουμε τις τιμές των σταθερών A, B, A_i από την ισότητα πολυωνύμων που προκύπτει και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα ολοκληρωμάτων.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x - a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα

της μορφής $\frac{A}{x-a}$, όπου A σταθερά.

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\overset{x+1}{A}}{x-1} + \frac{\overset{x-1}{B}}{x+1}$$

$$\text{Άρα, } \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} = \frac{(A+B) \cdot x + A-B}{(x-1) \cdot (x+1)} \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-A=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{και } \int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x - a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{A}{x-a}$, όπου A σταθερά.

$$\left. \begin{array}{l} A+B+\Gamma=0 \\ -5A-4B-3\Gamma=0 \\ 6A+3B+2\Gamma=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

$$\int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 11 & -6 & 1 \\ & 1 & -5 & 6 & \\ 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{\Gamma}{x-3} = \\ &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + \Gamma(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \end{aligned}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = \frac{(A+B+\Gamma)x^2 + (-5A-4B-3\Gamma)x + 6A+3B+2\Gamma}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε παράγοντα $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \dots, A_k$ σταθερές.

$$\int \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+B-A}{(x-1)^2} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow A=1 \\ \rightarrow B-A=0 \\ \rightarrow B=1 \end{array} \right\}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- ο Σε κάθε παράγοντα $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \dots, A_k$ σταθερές.

$$\int \frac{x^2}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+1| - \Gamma \frac{1}{x+1} + C$$

$$\begin{array}{c} (x-1)(x+1) \\ \uparrow \\ x^2(x+1) - (x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} = \dots$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε δευτεροβάθμιο με αρνητική διακρίνουσα παράγοντα

$ax^2 + \beta x + \gamma$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα

της μορφής $\frac{Ax + B}{ax^2 + \beta x + \gamma}$, όπου A, B σταθερές.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} = \frac{Bx^2+(\Gamma-B)x-\Gamma}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (A+\Gamma-B)x + A-\Gamma}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \Rightarrow B=-A \\ A+\Gamma-B=0 \Rightarrow 2A+\Gamma=0 \\ A-\Gamma=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \\ \Gamma = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε δευτεροβάθμιο με αρνητική διακρίνουσα παράγοντα

$ax^2 + \beta x + \gamma$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα

της μορφής $\frac{Ax + B}{ax^2 + \beta x + \gamma}$, όπου A, B σταθερές.

$$(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx \quad \Bigg| \quad \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c. \quad = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$(x^2 - x - 2)' = 2x - 1, \quad x^2 - x - 2: \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} < -1$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

(α) Να αναλυθεί σε απλούστερα κλάσματα η παράσταση: $\frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx = \int (x+1) dx + \int \frac{3x+2}{x^2 - x - 2} dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - x - 2 \\ \hline -x^3 + x^2 + 2x & x+1 \\ \hline x^2 + 2x & \\ -x^2 + x + 2 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

$$x^3 = (x+1) \cdot (x^2 - x - 2) + 3x + 2$$

$$\frac{x \cdot (x^2 - x - 2)}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} = x + \frac{x^2 - x - 2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2} =$$

$$= x + 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

(α) Να αναλυθεί σε απλούστερα κλάσματα η παράσταση: $\frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3}{x^2 - x - 2} dx$.

$$\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx = \int \frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x+1} dx = (*)$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A-2B}{(x-2)(x+1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B=3 \\ A-2B=2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{3} \\ A=3-B=\frac{8}{3} \end{array} \right.$$

$$(*) = \frac{8}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{8}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

(α) Να αναλυθεί σε απλούστερα κλάσματα η παράσταση: $\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} dx$.

$$\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 - 3x + 2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} dx = \int 1 dx + \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x-2} dx = x + A \ln|x-1| + B \ln|x-2| + C$$

$$\frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \dots$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)} dx$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2 + x + 1}.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{3x+5}{(1-2x)^2} dx$.

$$\frac{3x+5}{(1-2x)^2} = \frac{A}{(1-2x)^1} + \frac{B}{(1-2x)^2} = \frac{A \cdot (1-2x) + B}{(1-2x)^2} = \frac{-2Ax + B + A}{(1-2x)^2}$$

$\left. \begin{array}{l} -2A = 3 \\ A + B = 5 \end{array} \right\}$

$$A = -\frac{3}{2} \text{ και } B = \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{(1-2x)^2} dx &= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{1-2x} dx + \frac{13}{2} \int \frac{1}{(1-2x)^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(1-2x)'}{1-2x} dx - \frac{13}{4} \int \frac{(1-2x)'}{(1-2x)^2} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|1-2x| + \frac{13}{4} \frac{1}{1-2x} + C. \end{aligned}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int \frac{4x^2 - 8x + 16}{x^3 - 4x^2 + 8x} dx$.

$$x^3 - 4x^2 + 8x = x \cdot (x^2 - 4x + 8)$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16$$

$$\frac{4x^2 - 8x + 16}{x \cdot (x^2 - 4x + 8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + \Gamma}{x^2 - 4x + 8} = \frac{(A + B)x^2 + (-4A + \Gamma)x + 8A}{x \cdot (x^2 - 4x + 8)}$$

$$\text{Για } x=0: 8A=16 \Rightarrow A=2$$

Γενικές Ασκήσεις

Γενικές Ασκήσεις

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}, \text{ διότι } \arccos x \in [0, \pi] \text{ (από τον ορισμό του).}$$

$$\cos\left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Γενικές Ασκήσεις

Δείξτε ότι $\sin(2 \arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$

Υπόδειξη: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$\sin(2 \arcsin(x)) = 2 \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos^2(\arcsin x) + \underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2} = 1 \Rightarrow \cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Όμως } \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\arcsin x) > 0.$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{x^3} dx &= \frac{1}{3} \int (x^3)' e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3) \stackrel{u=x^3}{=} \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.\end{aligned}$$

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$I = \int \underbrace{e^x}_{(e^x)''} \cos(2x) \, dx = e^x \cos(2x) + 2 \int \underbrace{e^x}_{(e^x)'} \cdot \sin(2x) \, dx =$$

$$= e^x \cos(2x) + 2 e^x \cdot \sin(2x) - 4 \int \underbrace{e^x \cos(2x) \, dx}$$

Άρα, $I = e^x \cdot (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) - 4I$

$$I = \frac{1}{5} e^x \cdot [\cos(2x) + 2 \sin(2x)] + C.$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int \cos x \sin^3 x \, dx &= \int (\sin x)' \cdot \sin^3 x \, dx \xrightarrow{u=\sin x} \int u^3 \, du = \\ &= \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C\end{aligned}$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot (\ln x)' dx \quad \underline{\underline{u = \ln x}} \quad \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int (x)' \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' \, dx = \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x + c.\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad x > 0: (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad , \quad x < 0: [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{1 - \cos^2 x} dx \quad \underline{u = \cos x}$$

$$= - \int \frac{1}{1 - u^2} du = - \int \frac{A}{1 - u} du - \int \frac{B}{1 + u} du = -\frac{1}{2} \ln|1 - u| - \frac{1}{2} \ln|1 + u|$$

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{(A - B)u + A + B}{1 - u^2} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow A - B = 0 \\ \rightarrow A + B = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} A = B = \frac{1}{2} \end{array} \right| \quad \begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \ln|(1 - \cos x)(1 + \cos x)| = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(\sin^2 x) = \\ &= -\ln|\sin x| + C. \end{aligned}$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int (x-1) \sqrt[3]{x^2-2x+3} dx = \frac{1}{2} \int (x^2-2x+3)' \sqrt[3]{x^2-2x+3} dx$$

$$\underline{\underline{u=x^2-2x+3}} \quad \frac{1}{2} \int \sqrt[3]{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{8} \sqrt[3]{u^4} + c =$$

$$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^2-2x+3)^4} + c = \frac{3}{8} (x^2-2x+3) \sqrt[3]{x^2-2x+3} + c.$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} \cdot (\sin x)' dx \xrightarrow{u=\sin x} \int \frac{1-u^2}{u^6} du = \\ &= \frac{u^{-5}}{-5} - \frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.\end{aligned}$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int x \cos^2 x \, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos(x - \ln x) dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \sinh^2 x \, dx$$

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

Υπόδειξη: $\cosh(2x) = 1 + 2 \sinh^2 x$.

Γενικές Ασκήσεις

Να βρεθεί αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} I_n = \int \ln^n x \, dx &= \int (x)' \cdot \ln^n x \, dx = x \cdot \ln^n x - \int x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot (\ln x)' \, dx \\ &= x \cdot \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx \end{aligned}$$

$$I_n = x \cdot \ln^n x - n \cdot I_{n-1} .$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$x = \sin^2 t, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$x \in (0, 1)$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 5}} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^5} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^5} + 2}{x^2} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} \, dx$$

Γενικές Ασκήσεις

$$\int \sqrt{\tan x} \, dx$$

Υπόδειξη: Η παράγωγος της $\tan x$ εκφράζεται σε όρους της ίδιας της συνάρτησης $\tan x$.

Υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι. Αναλυτικά: <https://math.stackexchange.com/questions/828640/evaluating-the-indefinite-integral-int-sqrt-tan-x-mathrmdx>