

Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αόριστο Ολοκλήρωμα

Χειμερινό Εξάμηνο 2025 – 2026

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Βασικές έννοιες

- Παράγουσα (ή αρχική συνάρτηση)
- Αόριστο ολοκλήρωμα
- Ολοκλήρωση κατά παράγοντες
- Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός σχολικού βιβλίου Γ' Λυκείου

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ⁽¹⁾ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ** , συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα εφ του x ντε x ”. Δηλαδή,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, c \in \mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ .

Σημείωση: Προσέξτε πως στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου, παράγουσα είναι **μία συνάρτηση** ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα είναι **ένα σύνολο**!

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

Ορισμός Αόριστο ολοκλήρωμα (ή παράγουσα) μιας συνάρτησης f λέγεται κάθε συνάρτηση g , τέτοια ώστε $g'(x) = f(x)$ και συμβολίζεται με

$$g(x) = \int f(x) dx$$

Ιδιότητες

1. $\int f'(x) dx = f(x) + c$
2. $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Ορισμός αόριστου ολοκληρώματος:

$$\int f(x) dx = \text{σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της } f.$$

Στον ορισμό αυτό, το dx υπάρχει για να προσδιορίζει τη μεταβλητή ως προς την οποία πρέπει να γίνει η παραγωγή για να προκύψει η f .

Η κατάδειξη της μεταβλητής είναι αχρείαστη στην περίπτωση όπου υπάρχει μόνο ένα σύμβολο μεταβλητής αλλά είναι απαραίτητη αν υπάρχουν περισσότερα:

$$\int (x^2 + y^2) dx \neq \int (x^2 + y^2) dy$$
$$\frac{x^3}{3} + y^2 + c \qquad x^2 + \frac{y^3}{3} + c.$$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Το διαφορικό dx δείχνει τη μεταβλητή της παραγώγισης και στον ορισμό της παραγώγου κατά Leibniz στα πλαίσια του λόγου dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Παράγουσα / αόριστο ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{dx} n = 0$$

$$\int 0 dx = C$$

$$\frac{d}{dx} x = 1$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\int e^x = e^x + C$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\frac{d}{dx} n^x = n^x \ln n$$

$$\int n^x dx = \frac{n^x}{\ln n} + C$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$dg(x) = g'(x)dx$$

$$\underline{F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow F'(x) = f(x)}$$

$$\underline{F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow F(g(x)) = \int f(g(x))dg(x)} \quad (I)$$

$$\text{Όμως } \underline{[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)}$$

$$\text{Άρα, } F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx \quad (II)$$

$$\text{Από (I) και (II) } \Rightarrow \underline{dg(x) = g'(x)dx}$$

Παραδείγματα:

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Από τη σχέση $df(x) = f'(x)dx$ και τις ιδιότητες της παραγώγου, άμεσα προκύπτει ότι για κάθε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, είναι:

$$d(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot df + \beta \cdot dg$$

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$$

Περαιτέρω, αν $y = f(u)$ και $u = u(x)$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$dy = d(f(u)) = \underset{\uparrow}{f'(u)} du = \frac{df}{du} \cdot du = \frac{df}{du} \cdot \underset{\uparrow}{u'(x)} \cdot dx = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$$

Κάποιες διευκρινήσεις...

Αν $y = f(x)$, και $dy = f'(x)dx$, **αποκτούν νόημα** και τα παρακάτω διαφορικά:

$$d^2 y = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2,$$

Η ίδια σχέση, αν εκφραστεί με το συμβολισμό της παραγώγισης κατά Leibniz, θα γραφεί:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Συνοψίζοντας:

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα διαφορικά ως εναλλακτικούς συμβολισμούς της παραγώγου όπου αυτό είναι δόκιμο.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$x < 0 : [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Ιδιότητες Ολοκληρωμάτων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε

- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) dx = \int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \ln|x| + c = \frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + c, x \neq 0$$

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F: B \rightarrow \mathbb{R}, B \supseteq A.$$

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0 dx = c, \quad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) + C.$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}} \right) + c.$$

$$a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστεί:

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 1) dx$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Είναι $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Ισοδύναμα

$$\int [f(x)g(x)]' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

$$\int f(x)g'(x) dx = \int [f(x)g(x)]' dx - \int f'(x)g(x) dx.$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Μπορούμε εναλλακτικά, να γράψουμε:

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x).$$

Δραστηριότητα

Δείξτε ότι

$$\int f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax}$$

$$e^{ax} = \frac{1}{a} \cdot (e^{ax})'$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^n e^{ax} dx,$$

$$\int p(x)e^{ax} dx,$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^2 \cdot (e^{3x})' dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \int (x^2)' \cdot e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} \int x (e^{3x})' dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^n \sin \beta x dx, \quad \int p(x) \sin \beta x dx,$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= - \int x \cdot (\cos x)' dx = -x \cos x + \int (x)' \cdot \cos x dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^n \cos \beta x dx, \quad \int p(x) \cos \beta x dx,$$

$$\int x \cos(x) dx = \int x (\sin x)' dx = x \cdot \sin x - \int (x)' \cdot \sin x dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad F'(x) = f(x)$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int e^{ax} \sin \beta x dx, \quad \int e^{ax} \cos \beta x dx,$$

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos(x) dx = \int \underbrace{(e^x)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f(x)} dx = e^x \cos x - \int e^x \cdot (\cos x)' dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ I &= e^x \cdot (\cos x + \sin x) - I \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} e^x \cdot (\cos x + \sin x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^n \ln ax dx = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot \ln(ax) dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x) dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \cdot \ln x dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x)' dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Περίπτωση I: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

Θέτουμε $g(x) = u \Rightarrow g'(x)dx = du$ και $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$.

Περίπτωση II: $\int f(x)dx$

Θέτουμε $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ και $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$.

Και στις δύο περιπτώσεις επιδιώκουμε η αντικατάσταση να οδηγήσει σε ολοκλήρωμα που υπολογίζεται ευκολότερα από το αρχικό.

Περίπτωση I

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{\downarrow} \underbrace{g'(x) dx}_{\downarrow}$$
$$\int f(u) du$$

Βήματα της μεθόδου

1. Αναγνωρίζουμε τη μορφή $f(g(x))g'(x)dx = f(g(x))dg(x)$.
2. Αντικαθιστούμε $u = g(x)$ και $f(g(x))dg(x) = f(u)du$.
3. Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα. Αυτό, προκύπτει ως συνάρτηση της μεταβλητής u .
4. Αντικαθιστούμε όπου $u = g(x)$ και παίρνουμε το αποτέλεσμα ως προς τη μεταβλητή x .

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \underbrace{g'(x) dx}_{du}$$

$$u = x^2$$

$$\int \underline{6 \cos(x^2) x} dx = 3 \int \cos(x^2) \cdot (x^2)' dx \xrightarrow{u=x^2} 3 \int \cos u du = 3 \sin u + C = 3 \sin(x^2) + C.$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx \xrightarrow{u=x^2 + 1} \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

$$\int (x + 1)^3 dx = \int (x+1)^3 \cdot (x+1)' dx \xrightarrow{u=x+1} \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x+1)^4}{4} + C.$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int \cos(2x) \cdot (2x)' dx \stackrel{u=2x}{=} \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε τον τύπο για το διπλάσιο τόξο ($\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$, $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$)

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x) dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot (\sin x)' dx \\ \underline{\underline{u = \sin x}} \quad \int (1 - u^2) du &= u - \frac{u^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(g(x)) \cdot \underline{g'(x)} dx$$

$$\int x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int f(x^2) d(x^2), \text{ θέτουμε } y = x^2.$$

$$\begin{aligned} \int x \tan(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \tan(x^2) \cdot (x^2)' dx \xrightarrow{u=x^2} \frac{1}{2} \int \tan u \, du = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin u}{\cos u} \, du = -\frac{1}{2} \int \frac{(\cos u)'}{\cos u} \, du \xrightarrow{t=\cos u} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos u| + C = -\frac{1}{2} \ln |\cos(x^2)| + C. \end{aligned}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(\sin x) \cos x dx, \quad \text{θέτουμε } y = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos x dx &= \int \sqrt{\sin x} \cdot (\sin x)' dx \xrightarrow{y=\sin x} \int \sqrt{y} dy \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{y^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + C. \end{aligned}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(\cos x) \sin x dx, \quad \text{θέτουμε } y = \cos x$$

$$\begin{aligned} \int e^{\cos x} \sin x dx &= - \int e^{\cos x} \cdot (\cos x)' dx \xrightarrow{y = \cos x} - \int e^y dy = \\ &= -e^y + c = -e^{\cos x} + c. \end{aligned}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \text{θέτουμε } y = \tan x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx &= \int \sqrt{\tan x} \cdot (\tan x)' dx \stackrel{y=\tan x}{=} \int \sqrt{y} dy = \\ &= \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} \sqrt{y^3} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\tan^3 x} + C. \end{aligned}$$

Περίπτωση Ι – Ασκήσεις

Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}, \quad \text{θέτουμε } y = f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{f(x)} df(x) \quad \underline{\underline{y = f(x)}} \quad \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Περίπτωση II

$$f(g(t))$$

Η διαδικασία της αντικατάστασης γενικεύεται ως διαδικασία αλλαγής μεταβλητής σε κάθε ολοκλήρωμα.

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $F(x) = \int f(x) dx$. Αν θέσουμε $x = g(t)$ για κάποια κατάλληλη συνάρτηση $g: B \rightarrow A$, τότε, η παράγουσα συνάρτηση εκφράζεται συναρτήσει της νέας μεταβλητής t ως εξής:

$$F(g(t)) = \int f(g(t)) dg(t) = \int f(g(t)) g'(t) dt, t \in B$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $t = g^{-1}(x)$ για να βρούμε την $F(x)$.

Σημείωση

Η πρώτη περίπτωση αντικατάστασης είναι ειδική περίπτωση της γενικής διαδικασίας με την αλλαγή μεταβλητής $x = g^{-1}(u)$.

Περίπτωση II

Τι ιδιότητες πρέπει να έχει η αντικατάσταση $x = g(t)$, $t \in B$, ώστε να είναι έγκυρη η αλλαγή μεταβλητής;

Απάντηση

Η συνάρτηση g πρέπει:

(α) να διατηρεί το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή πρέπει $g: B \rightarrow A$ (ώστε η συνάρτηση $f(g(t))$ να έχει το ίδιο σύνολο τιμών με αυτό της f).

(β) να παραγωγίζεται.

(γ) να μπορεί να αντιστρέφεται ώστε να είναι δυνατή η επίλυση της $x = g(t)$ ως προς t και η επαναφορά στην αρχική μεταβλητή x .

Οι παραπάνω προϋποθέσεις τηρούνται όταν π.χ. η $g(t)$ είναι παραγωγίσιμη και μονότονη συνάρτηση με σύνολο τιμών το $A = A_f$.

Περίπτωση II - Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$ είναι το $(-2, 2)$. Για το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\text{Πρέπει } 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x(t) = 2\sin t$

- έχει ως σύνολο τιμών ακριβώς το διάστημα αυτό όταν το $t \in (-\pi/2, \pi/2)$
- είναι παραγωγίσιμη
- είναι αντιστρέψιμη.

$$-1 < \sin t < 1$$

Συμπεραίνουμε ότι είναι μία αποδεκτή αντικατάσταση.

Παρατηρήσεις

α) Στο τέλος μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (προκύπτει από την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα).

β) Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν θεωρήσουμε τον αριθμητή ως παράγωγο της υπόρριζης συνάρτησης.

$$\sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2|\cos t| = 2\cos t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Περίπτωση II - Παραδείγματα

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{(2\sin t)^3}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t dt = 8 \int \frac{\sin^3 t}{\cancel{1\cos t}} \cos t dt = (*)$$

Θέτω $x = x(t) = 2\sin t$, για $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{2}$

Είναι $dx(t) = 2(\sin t)'dt = 2\cos t dt$

$$(*) = 8 \int \sin^3 t dt = -8 \int (1-\cos^2 t) \cdot (\cos t)' dt = -8 \cos t - \frac{8 \cos^3 t}{3} + C$$

$$= -8 \cos(\arcsin \frac{x}{2}) - \frac{8}{3} \cos^3(\arcsin \frac{x}{2}) + C = -8 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \frac{8}{3} \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \right)^3 + C.$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

Περίπτωση II - Παραδείγματα

Παράδειγμα 2

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. Για το αόριστο ολοκλήρωμα αυτής,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$$

παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x(t) = 3\sinh t$,

- έχει ως σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ όταν το $t \in \mathbb{R}$,
- είναι παραγωγίσιμη,
- είναι αντιστρέψιμη.

Συμπεραίνουμε ότι είναι μία αποδεκτή αντικατάσταση.

Παρατηρήσεις

Το ολοκλήρωμα που προκύπτει αντιμετωπίζεται με τις μεθόδους επίλυσης τριγωνομετρικών με περιττή δύναμη.

$$\sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+9\sinh^2 t} = 3\sqrt{1+\sinh^2 t} = 3\sqrt{\cosh^2 t} = 3\cosh t$$

Περίπτωση II - Παραδείγματα

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx = \int \frac{27\sinh^3 t}{3\cosh t} \cdot 3\cosh t dt = 27 \int \sinh^3 t dt \quad *$$

Θέτω $x(t) = 3\sinh t \Rightarrow dx = 3\cosh t dt$ και $\sinh t = \frac{x}{3} \Leftrightarrow t = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{3}$

$$* = 27 \int (\cosh^2 t - 1) \cdot (\cosh t)' dt = 27 \int (u^2 - 1) du = 27 \frac{u^3}{3} - 27u + C =$$

$$= 9 \cosh^3 t - 27 \cosh t + C = 9 \cosh^3 \left(\operatorname{arcsinh} \frac{x}{3} \right) - 27 \cosh \left(\operatorname{arcsinh} \frac{x}{3} \right) + C$$

$$= 9 \left(\sqrt{\frac{x^2}{9} + 1} \right)^3 - 27 \sqrt{\frac{x^2}{9} + 1} + C.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Περίπτωση II – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης των x και $\sqrt{a^2 - x^2}$

Θέτουμε $x = a \sin(t)$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, ή $x = a \cos(t)$, $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(16 - x^2)'}{\sqrt{16 - x^2}} dx \stackrel{u=16-x^2}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{16 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά: $x = x(t) = 4 \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$ και $t = \arcsin \frac{x}{4}$

Άρα, $I = \int \frac{4 \sin t}{4 \cos t} \cdot 4 \cos t dt = 4 \sin t + C = 4 \sin(\arcsin \frac{x}{4}) = 4 \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} + C = \sqrt{16 - x^2} + C$

Σημείωση: Παρατηρήστε πως για το συγκεκριμένο, υπάρχει και απλούστερη αντικατάσταση!

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} : \text{Πεδίο ορισμού } A_f = \mathbb{R}$$

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Περίπτωση II – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μίας συνάρτησης των x και $\sqrt{a^2 + x^2}$

Θέτουμε $x = a \sinh(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ή $x = a \tan(t)$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \cdot (\tan t)' dt = \int \frac{\tan t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = (*)$$

$$\text{Θέτω } x = \tan t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (\tan t)' dt \quad \text{και} \quad t = \arctan x$$

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$(*) = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = - \int \frac{(\cos t)'}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{\cos t} + C = \frac{1}{\cos(\arctan x)} + C$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}. \text{ Πρέπει } x^2-1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

Περίπτωση II – Ασκήσεις

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης:

• των x και $\sqrt{x^2 - a^2}$ θέτουμε $x = a \cosh t, \quad t \geq 0,$

ή $x = \frac{a}{\cosh t}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$

ή $x = \frac{a}{\sinh t}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh^2 t - 1}} \cdot \sinh t dt = \int \frac{\cosh t}{|\sinh t|} \cdot \sinh t dt \quad (*)$$

Θέτω $\overset{x > 1}{x} = \cosh t, \quad t > 0 \Rightarrow dx = \sinh t dt \text{ και } t = \arg \cosh x$

$$(*) \stackrel{t \geq 0}{=} \int \cosh t dt = \sinh t + c = \sinh(\arg \cosh x) = \sqrt{x^2-1} + c.$$

Αντίστοιχα, αν $x = -\cosh t, \quad t > 0$ προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$\sqrt{a^2 - x^2}, x = a \sin t \quad \sqrt{a^2 + x^2}, x = a \sinh t, \quad \sqrt{x^2 - a^2}, x = a \cosh t$$

Περίπτωση II – Ασκήσεις

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 + x^2}} dx$$

$$A_f = \mathbb{R}$$

$$x = 2 \sinh t, t \in \mathbb{R}$$

$$dx = 2 \cosh t$$

$$t = \operatorname{arcsinh} \frac{x}{2} \dots$$

Ασκήσεις

Βρείτε το σφάλμα στους παρακάτω υπολογισμούς:

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int f'(x) \frac{1}{f(x)} dx = f(x) \frac{1}{f(x)} - \int f(x) \left(\frac{1}{f(x)} \right)' dx =$$

$$= 1 + \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 1 + I \Rightarrow \underline{I = 1 + I} \Rightarrow 0 = 1.$$

$$I = I + 1$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = - \frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$$
$$f(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = - \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ασκήσεις

Στο αόριστο ολοκλήρωμα της $1/x$ κάναμε την αντικατάσταση $x = 1/t$.

Βρείτε το σφάλμα στους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -t \frac{1}{t^2} dt = - \int \frac{1}{t} dt = - \ln t + c \Rightarrow \cancel{2t} = c \Rightarrow t = \frac{c}{2}, c \in \mathbb{R}.$$

$$x(t) = \frac{1}{t}, t \neq 0$$

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad \int \frac{1}{x} dx = \int t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων γινομένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής $\int \cos^n x \sin^m x dx$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αν ένας τουλάχιστον από τους n, m είναι περιττός,

$$\text{θέτουμε } \begin{cases} t = \cos x, & \text{αν το } m \text{ είναι περιττός} \\ t = \sin x, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \cos x \sin x dx &= \int \cos x \cdot (\cos x)' dx \xrightarrow{u = \cos x} - \int u du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + C_1 \\ \int \cos x \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot (\sin x)' dx \xrightarrow{u = \sin x} \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C_2 \end{aligned}$$

Σημειώσεις

1. Δοκιμάστε $t = \sin x$ και $t = \cos x$. Τι παρατηρείτε;
2. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην 1^η περίπτωση της αντικατάστασης.

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx &= \int \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} \cdot \sin^4 x \cdot (\sin x)' \, dx \xrightarrow{u = \sin x} \int (1 - u^2) \cdot u^4 \, du = \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.\end{aligned}$$

$$\sin^6 x = (1 - \cos^2 x)^3 \quad \sin^8 x = (1 - \cos^2 x)^4$$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot (\sin x)' \, dx \xrightarrow{u = \sin x} \int (1 - u^2) \cdot u^4 \, du$$

$$= \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

Εναλλακτικά :

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin^5 x \, dx &= - \int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot (\cos x)' \, dx \xrightarrow{u = \cos x} - \int u^3 \cdot (1 - u^2)^2 \, du \\ &= - \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{2\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^8 x}{8} + C. \end{aligned}$$

Σημείωση: Δοκιμάστε $t = \sin x$ και $t = \cos x$. Τι παρατηρείτε;

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Αν οι n, m είναι αμφότεροι άρτιοι, υπολογίζονται εκφράζοντας τα $\cos^2 x, \sin^2 x$ συναρτήσει του $\cos 2x$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\begin{aligned}
 \int \cosh^5 x \sinh^4 x \, dx &= \int \cosh^4 x \cdot \sinh^4 x \cdot \underbrace{\cosh x}_{(\sinh x)'} \, dx = \\
 &= \int (\sinh^2 x + 1)^2 \cdot \sinh^4 x \cdot d\sinh x \quad \underline{\underline{u = \sinh x}} \\
 &= \int \underbrace{(u^2 + 1)^2}_{u^4 + 2u^2 + 1} \cdot u^4 \, du = \frac{1}{9} u^9 + \frac{2}{7} u^7 + \frac{1}{5} u^5 + C \\
 &= \frac{1}{9} \sinh^9 x + \frac{2}{7} \sinh^7 x + \frac{1}{5} \sinh^5 x + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$