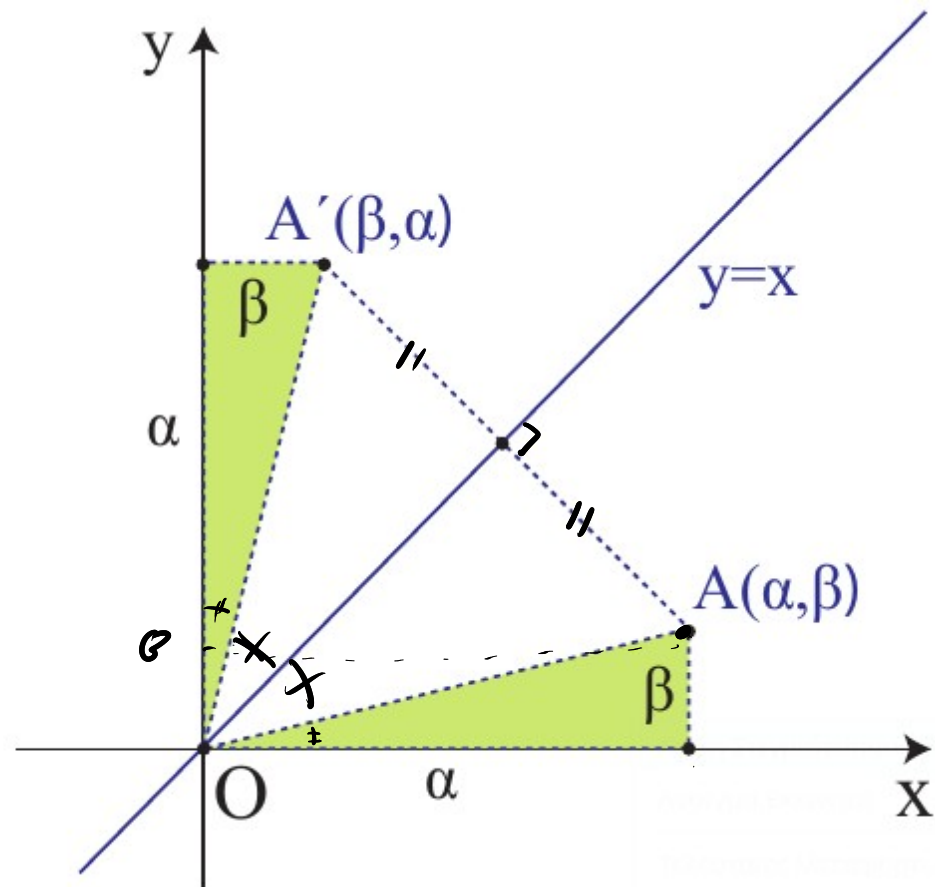
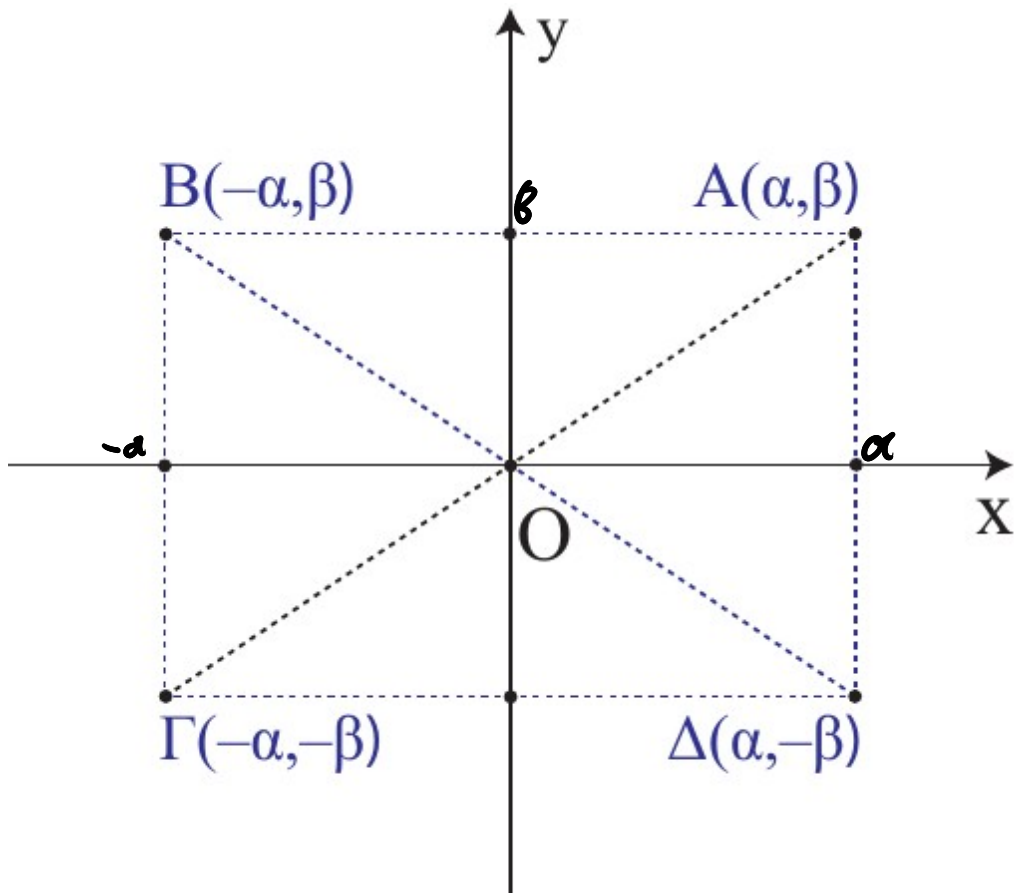


Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Ενισχυτική

Δευτέρα 27 Οκτωβρίου 2025

Καρτεσιανό Σύστημα Αξόνων



ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B .

Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το A στο B , το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$\underline{y = f(x)}$$

και διαβάζουμε « y ίσον f του x ». Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x** . Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f , ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f: A \rightarrow B$$

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f , πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- Το πεδίο ορισμού της A
- Το σύνολο B και
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f: A \rightarrow B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f , με $f(x) = \sqrt{1-4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1-4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1-4x \geq 0$, ενώ το σύνολο B είναι όλο το $\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{4}{x-1} + 5$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

iii) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

iv) $f(x) = \frac{1}{|x| + x}$:

(iv) $|x| + x = 0 \quad A_f = \{x > 0\} = \mathbb{R}^+$

Για $x \geq 0 : |x| = x$ και $|x| + x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Για $x < 0 : |x| = -x$ και $|x| + x = 0 \Leftrightarrow -x + x = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x < 0$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

iii) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(iii) Πρέπει $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

	1	3
$-x^2 + 4x - 3$	-	+
	+	-

$$A_f = [1, 3].$$

Είδη Συναρτήσεων

Αλγεβρικές: $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$
 $g(x) = P(x) / Q(x)$, $h(x) = e^x$, $w(x) = \ln x$, $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, $\coth$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos(b^n \pi x)$$

$$\zeta(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}}$$

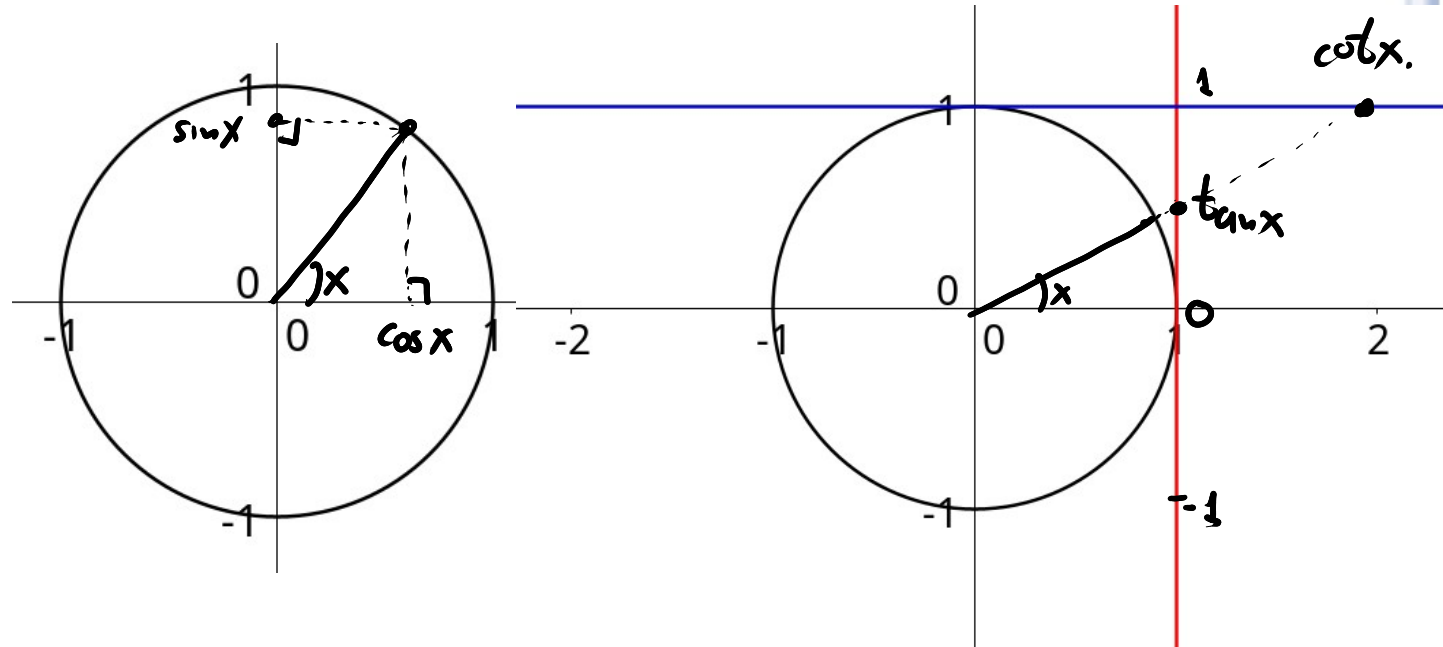
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Περιγραφικές:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x: \text{ρητός} \\ 0, & x: \text{άρρητος} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{Q}$

Γεωμετρικές: $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$



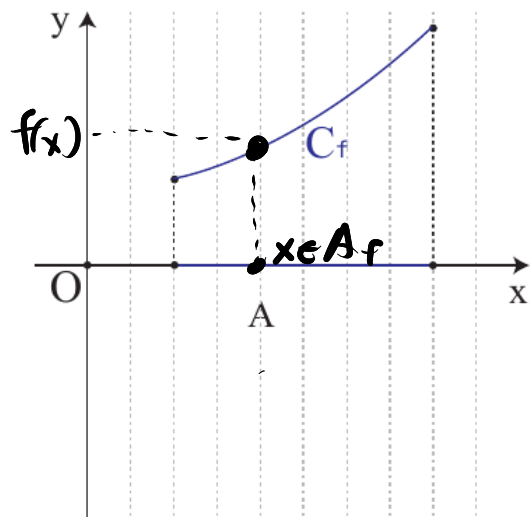
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f . Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

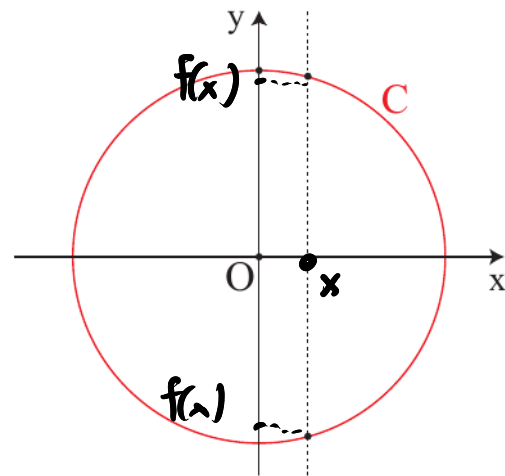
Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').

Δεν είναι δυνατόν να γίνει πάντα η γραφική παράσταση.

Ωστόσο, όταν είναι δυνατή η δημιουργία της, τότε σε αυτήν απεικονίζονται οι ιδιότητες της.

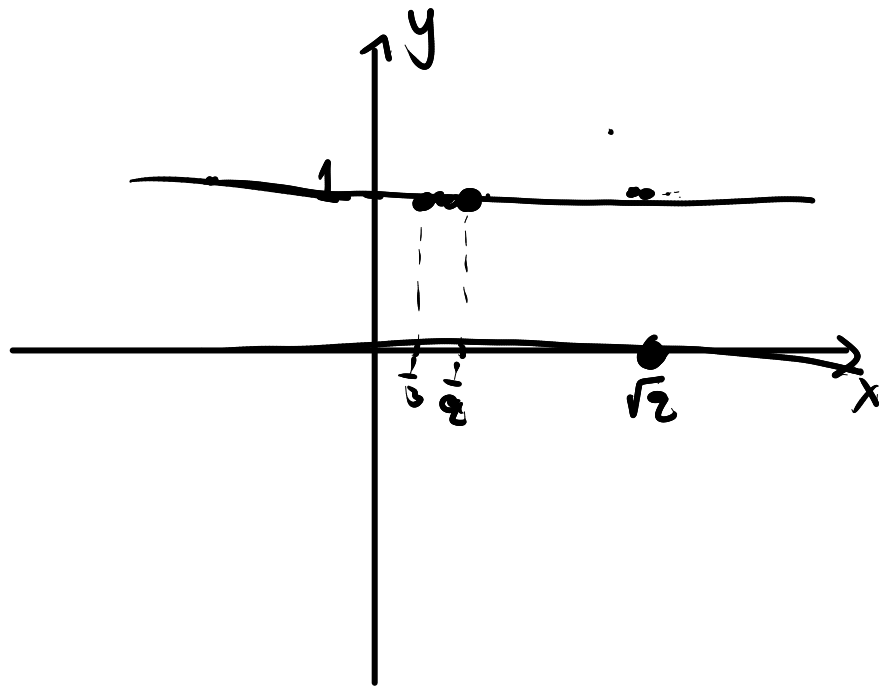


Σχήμα α'



Σχήμα β'

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x: \text{przew} \\ 0, & x: \text{apprew} \end{cases}$$



$$1) f(x) = (x-1)^2(x-3)$$

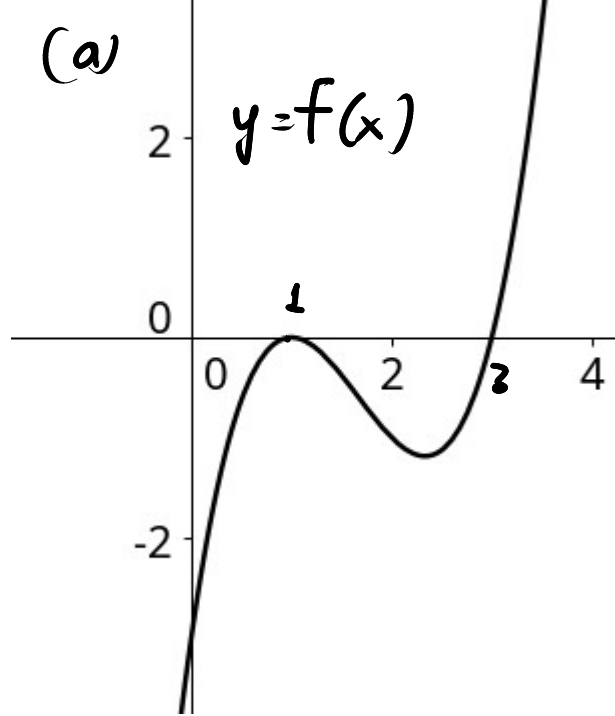
$$2) g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$3) h(x) = x^2(x-1)(x-2)$$

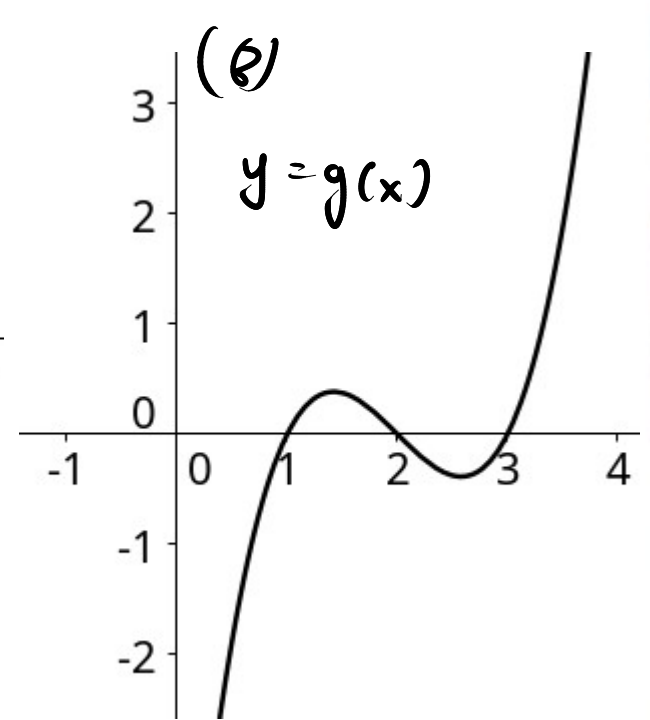
$$4) w(x) = x(x-1)^2(x-2)$$

$$5) k(x) = x(x-1)(x-2)^2$$

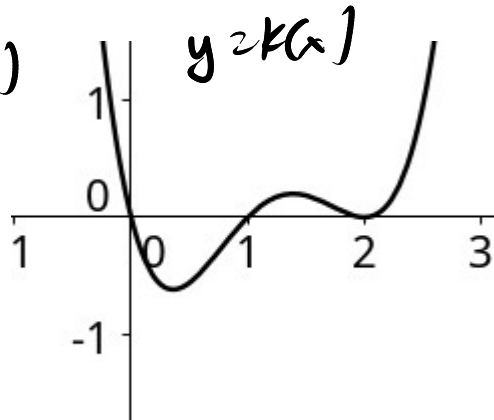
(a)



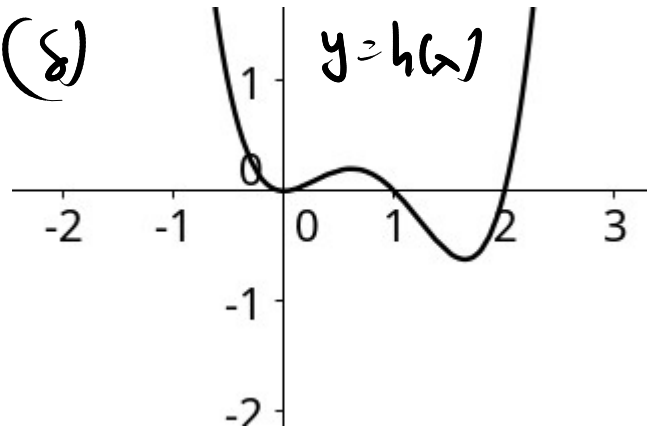
(b)



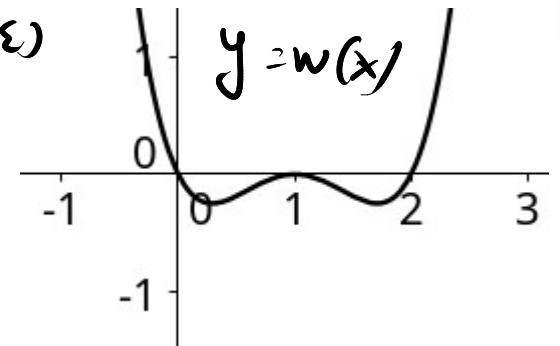
(c)



(d)



(e)



Αντίστροφη Συνάρτηση

• Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

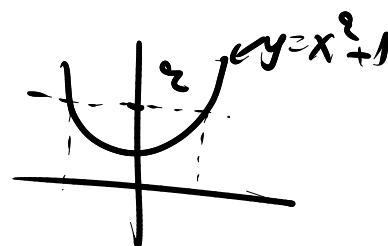
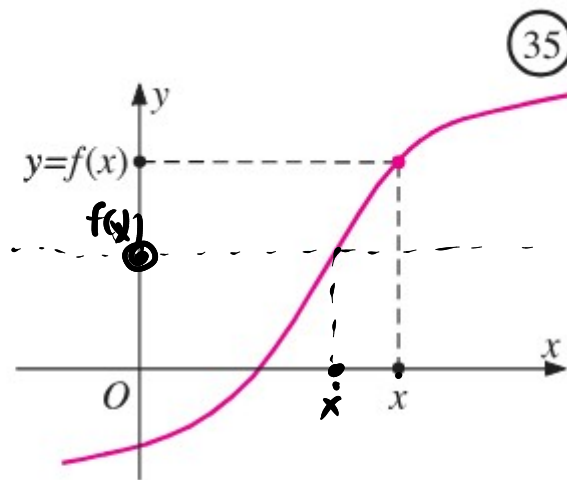
Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$



$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A).$$

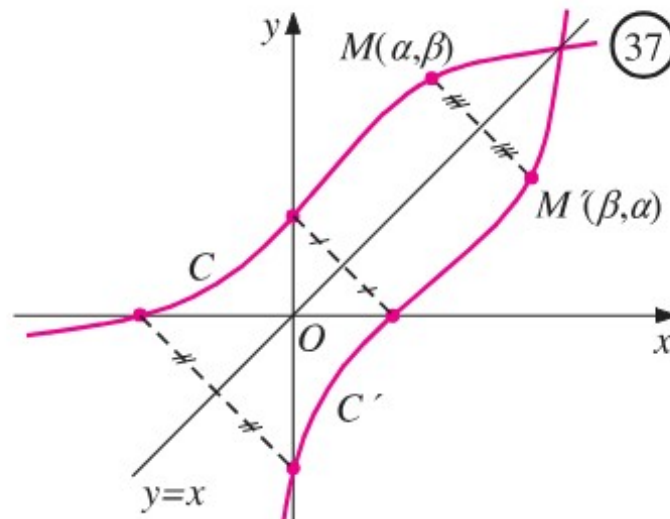
Αντίστροφη Συνάρτηση

$$M(a,b) \in C_f \Rightarrow b=f(a) \Leftrightarrow a=f^{-1}(b) \Leftrightarrow M'(b,a) \in C_{f^{-1}}$$

- Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο $M(a, b)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(b, a)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και

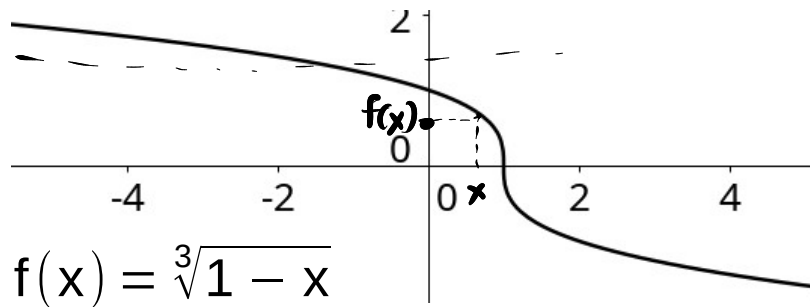


αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

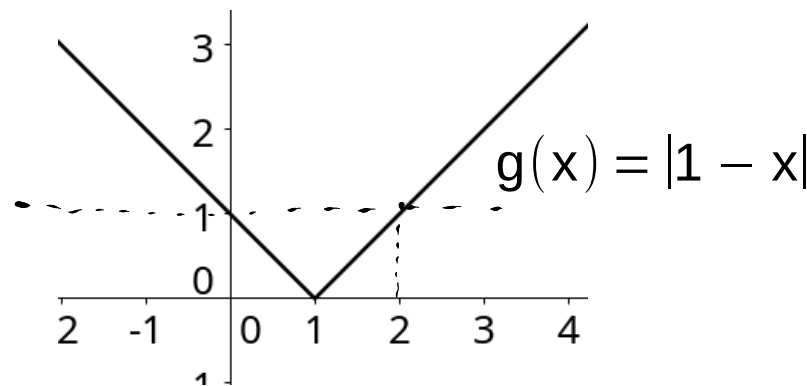
Αντίστροφη Συνάρτηση

Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση των παρακάτω συναρτήσεων:



$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{1-x} \Leftrightarrow y^3 = 1-x \\ y &= f(x) \Leftrightarrow x = 1-y^3 \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα, } f^{-1}(x) = 1-x^3, x \in \mathbb{R}.$$



$$\begin{aligned} \text{Είναί, } g(0) &= 1 \\ g(2) &= 1 \end{aligned}$$

$$g^{-1}: 1 \rightsquigarrow 0 \text{ και } 2.$$

Ρητές και άρρητες δυνάμεις

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε :

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

$$a^x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} a^{\rho_{\nu}}$$

$$x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho_{\nu}$$

$$8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2}$$

$$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω a ένας **θετικός** αριθμός. Όπως είδαμε προηγουμένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη a^x . Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη a^x , ορίζουμε τη συνάρτηση:

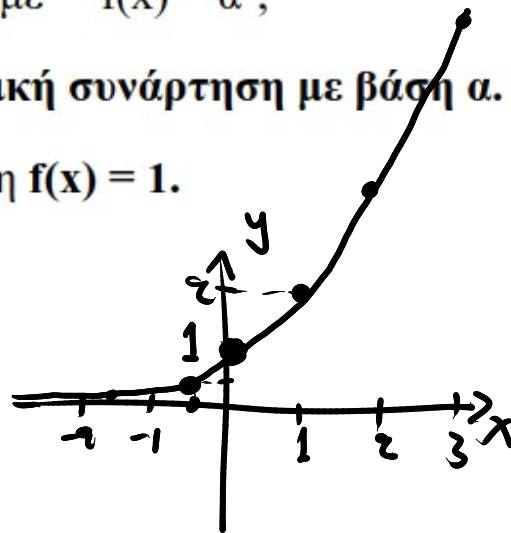
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = a^x,$$

η οποία, στην περίπτωση που είναι $a \neq 1$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση a** .

Αν είναι $a = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

$$f(x) = 2^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

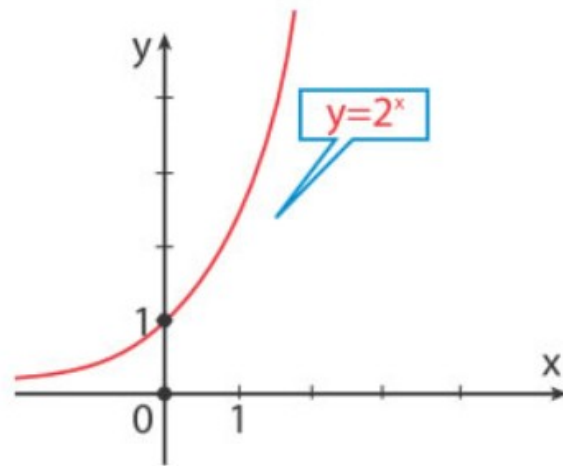


Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = a^x \quad \text{με } a > 1,$$

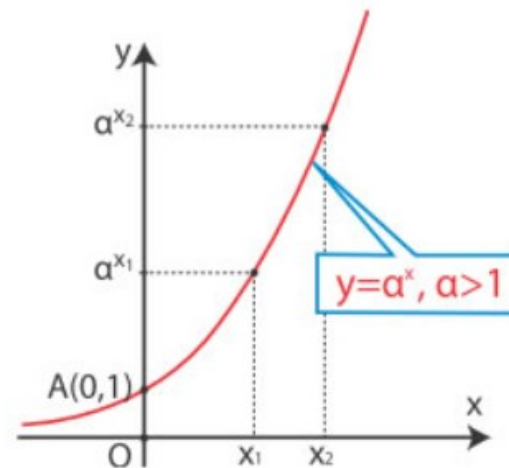
αποδεικνύεται ότι:



- Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{αν } x_1 < x_2, \quad \text{τότε } a^{x_1} < a^{x_2}$$

- Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x .



Η σχέση εκθετικών συναρτήσεων που οι βάσεις τους είναι αντίστροφοι αριθμοί

Ο αριθμός του Euler

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72$$

$$f(x) = e^x$$

Λογάριθμος

Ορισμός του $\log_2 x$

$$\log_2 x = y \Leftrightarrow 2^y = x$$

$$\log_2 8 = 3 \text{ γιατί } 2^3 = 8$$

$$\log_2 1 = 0 \text{ γιατί } 2^0 = 1.$$

Λογάριθμος

Ορισμός του $\ln x = \log_e x$

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

Λογάριθμος

Ετυμολογία της λέξης “λογάριθμος”

$$\log_2 8 = 3$$

$$\frac{\textcircled{8}}{2} = 4 \quad \frac{4}{2} = 2 \quad \frac{2}{2} = \textcircled{\underline{1}}$$

3 λόγοι

Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Βασικές ιδιότητες

1. $\ln 1 = 0$ γιατί, $e^0 = 1$

2. $\ln e = 1$ $e^1 = e$

3. $\ln e^x = x$,

Ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Άλλες ιδιότητες

$$1. e^{\ln x} = x$$

$$2. \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$3. \ln(x^n) = n \cdot \ln x$$

$$4. \ln(x/y) = \ln x - \ln y$$

$$2.) e^x = a \Rightarrow x = \ln a$$

$$e^y = b \Rightarrow y = \ln b$$

$$\underline{e^x \cdot e^y = a \cdot b}$$

$$e^{x+y} = a \cdot b$$

$$x+y = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

Λογαριθμική Συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad f(x) = \log_{\alpha} x$$

$$\log_{\alpha} x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x,$$

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

$$\underline{M(a, b) \in C_{\ln x} \Rightarrow b = \ln a \Leftrightarrow a = e^b \Leftrightarrow M'(b, a) \in C_{e^x}}$$

Ιδιότητες $\log_a x$

Αν $a > 1$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_a x$:

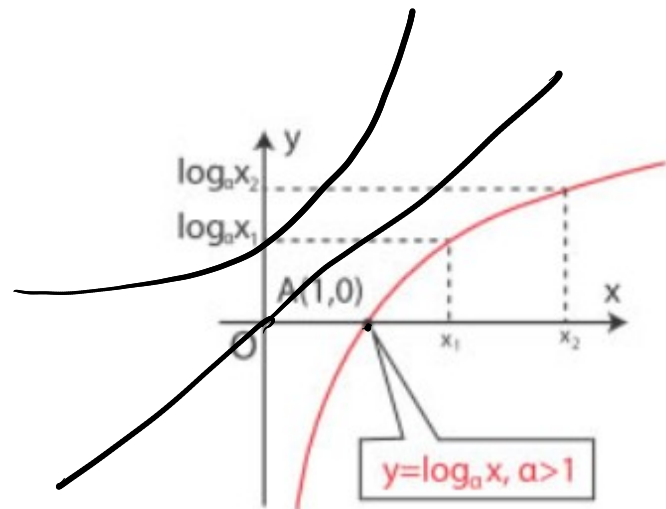
- Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
- Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\text{αν } x_1 < x_2, \text{ τότε } \log_a x_1 < \log_a x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\log_a x < 0, \text{ αν } 0 < x < 1) \text{ και } (\log_a x > 0, \text{ αν } x > 1)$$

- Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .



1^ο Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

i) $\varphi(x) = \ln x$

ii) $f(x) = \ln x + 1$

iii) $g(x) = \ln(x - 2)$

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x = 2^{1-x}$

ii) $3^{x-1} = 2^{x+1}$

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

i) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii) $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

ii) $\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0),$$

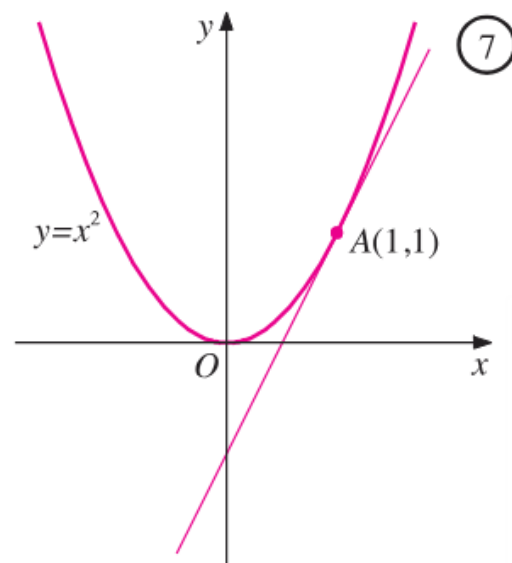
όπου

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$. Επειδή

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2, \end{aligned}$$

ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$. Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και εξίσωση $y - 1 = 2(x - 1)$.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
k , any constant	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n , any constant n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \sin kx$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sec^2 x$
$\tan kx$	$k \sec^2 kx$

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{\sin x} \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x} \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \sin^{-1} x & \\ \cos^{-1} x & \\ \tan^{-1} x & \\ \cosh x & \\ \sinh x & \\ \tanh x & \\ \operatorname{sech} x & \\ \operatorname{cosech} x & \\ \coth x & \\ \cosh^{-1} x & \\ \sinh^{-1} x & \\ \tanh^{-1} x & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\operatorname{cosec} x \cot x \\ & \sec x \tan x \\ & -\operatorname{cosec}^2 x \\ & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ & \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ & \frac{1}{1+x^2} \\ & \sinh x \\ & \cosh x \\ & \operatorname{sech}^2 x \\ & -\operatorname{sech} x \tanh x \\ & -\operatorname{cosech} x \coth x \\ & -\operatorname{cosech}^2 x \\ & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ & \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Πρόταση

Είναι $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Απόδειξη

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{nx \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{nx}\right)^{nx}\right)^{1/x} = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)' = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Πρόταση

Είναι $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y(x)) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} \ln(y(x)) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{y(x)} \frac{d}{dx} y(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} y(x) = y(x).$$

