Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Εμβαδά Επίπεδων Χωρίων

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Προκαταρκτικά

Μια συνάρτηση δεν χρειάζεται πάντα να εκφράζεται ως $y = f(x)$.

Ο ρόλος των x και y είναι συμβατικός και μπορεί να αλλάξουν ρόλους.

Η εναλλαγή των ρόλων των x και y παρέχει μια διαφορετική προοπτική στη γραφική παράσταση.

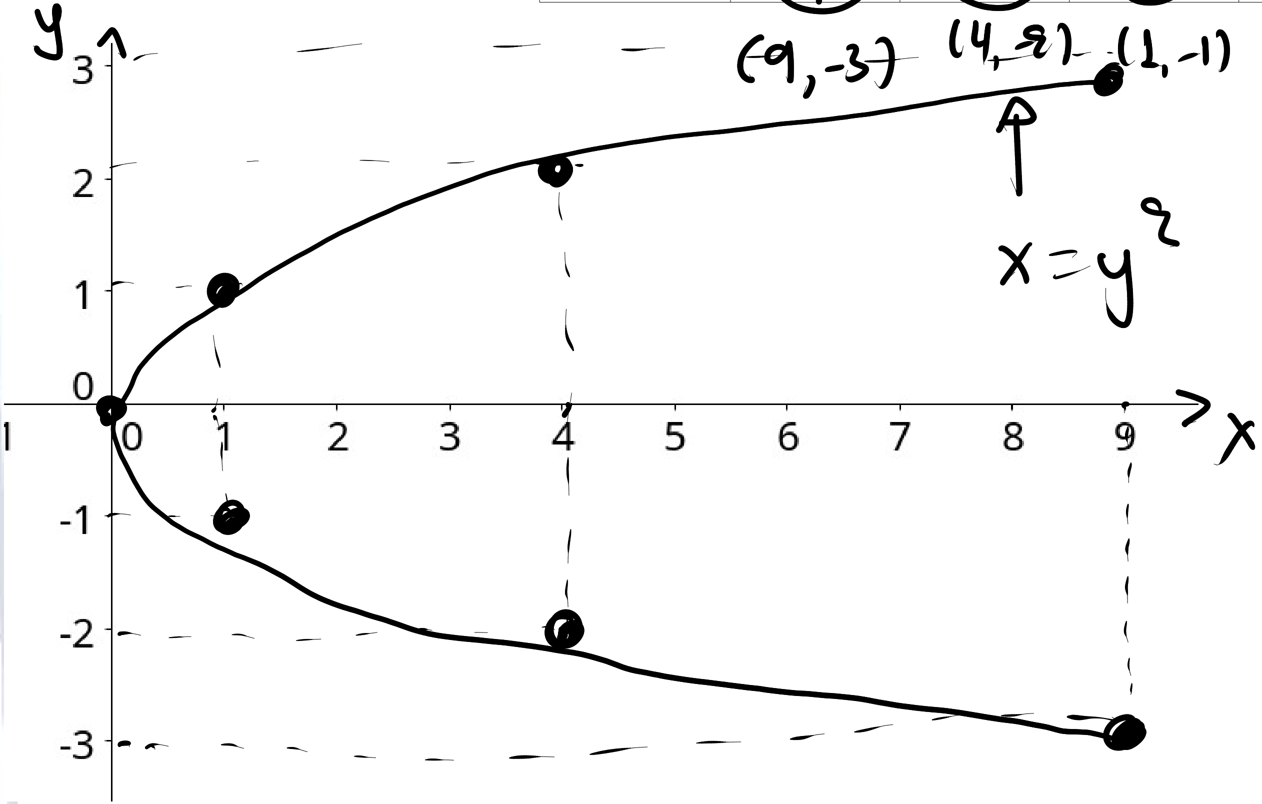
Προκαταρκτικά

$x = f(y)$

Παράδειγμα

$x = y^2$

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	9	4	1	0	1	4	9
	(9, -3)	(4, -2)	(1, -1)	(0, 0)	(1, 1)	(4, 2)	(9, 3)

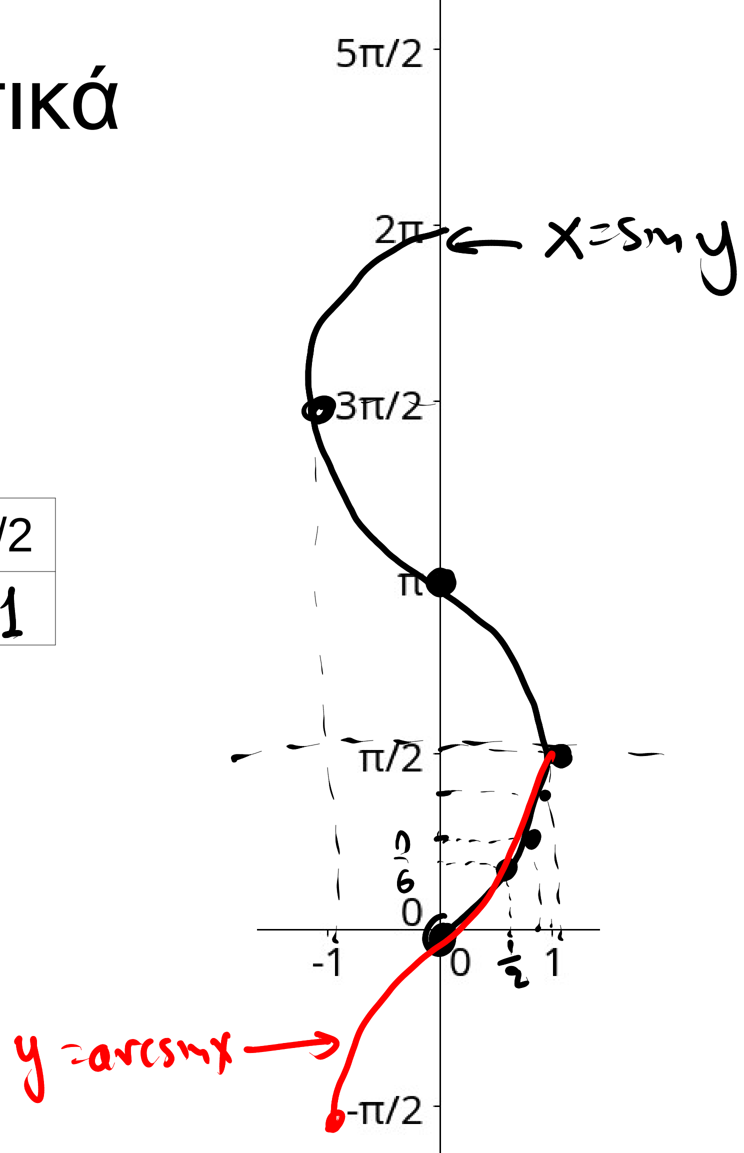


Προκαταρκτικά

Παράδειγμα

$x = \sin y$

y	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1



Προκαταρκτικά

Παρατήρηση

Αν C_1, C_2, είναι οι γραφικές παραστάσεις των $x = f(y)$ και $y = f(x)$ αντίστοιχα, τότε οι C_1, C_2 είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.

Απόδειξη

Πράγματι, $C_2 = \{(x, y) \in R^2, y = f(x)\} = \{(y, x) \in R^2, x = f(y)\}$ (αλλαγή συμβόλων)

Όμως,

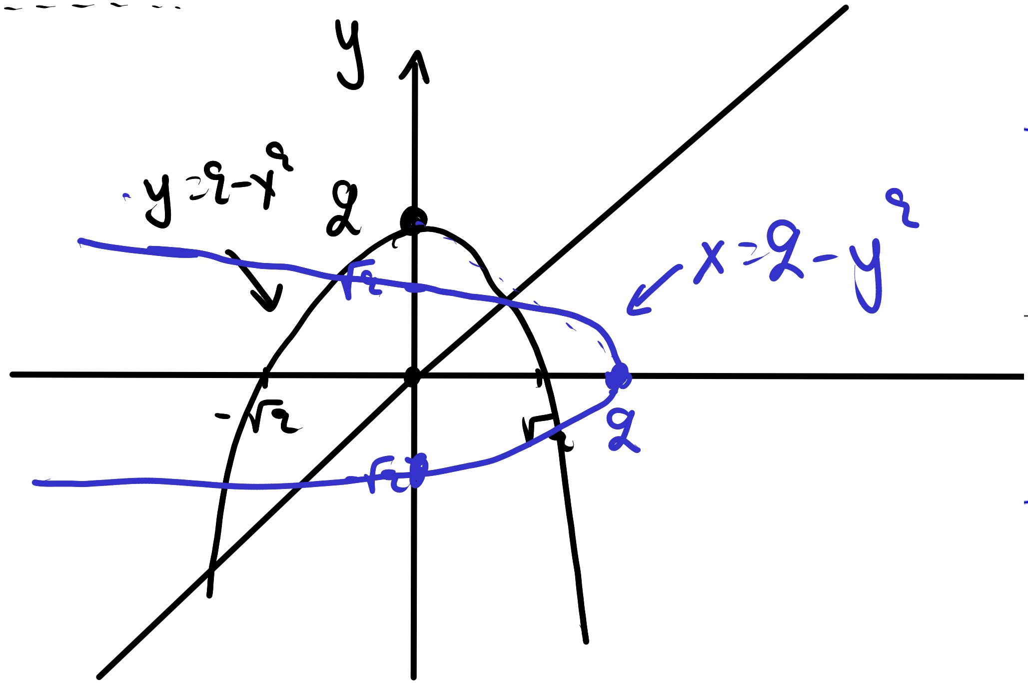
$\{(y, x) \in R^2, x = f(y)\}$ συμμετρικό προς $y = x$ με $\{(x, y) \in R^2, x = f(y)\} = C_1$.

Άρα, C_2 συμμετρική προς $y = x$ με C_1.

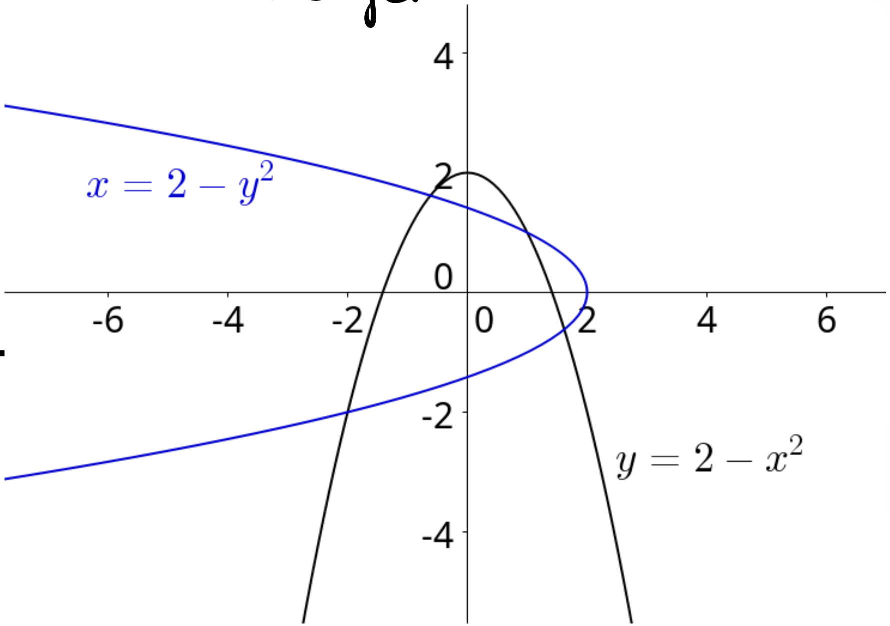
Προκαταρκτικά

Άσκηση

Να σχεδιαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι καμπύλες με εξισώσεις $y = 2 - x^2$ και $x = 2 - y^2$.



Geogebra



Προκαταρκτικά

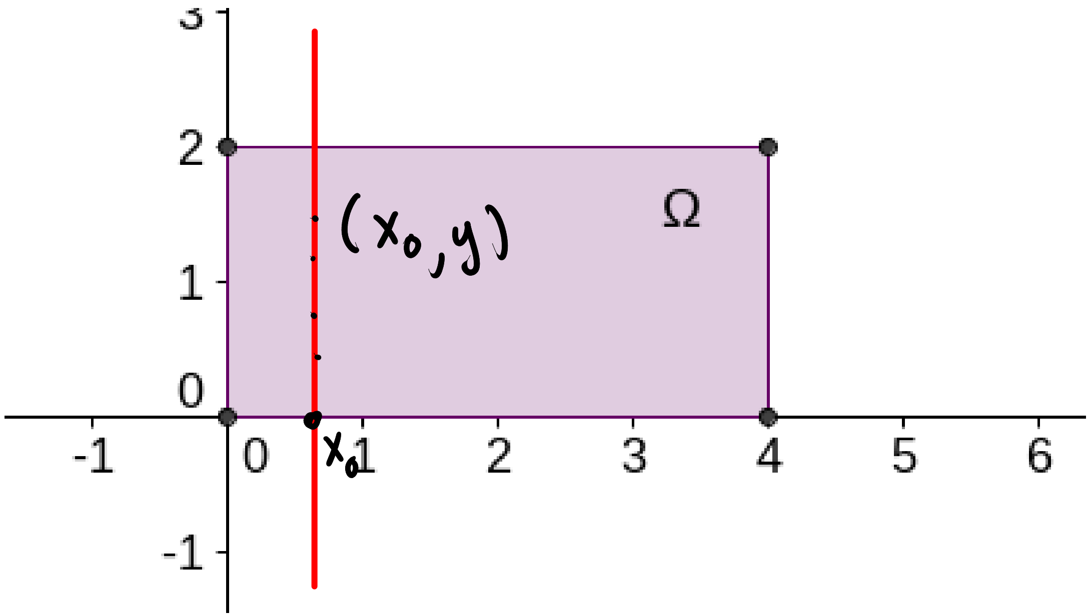
Μία απαραίτητη δεξιότητα για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός χωρίου Ω στο επίπεδο είναι η διατύπωση των ανισώσεων που περιγράφουν τα σημεία του. Αν το χωρίο είναι απλό, τότε θα αρκούν δύο ανισώσεις.

Για να το επιτύχουμε, είναι απαραίτητο να μπορούμε να προσδιορίζουμε τις εξισώσεις των ευθειών ή καμπυλών που το οριοθετούν.

Πιο συγκεκριμένα, αρκεί να θεωρήσουμε νοητές οριζόντιες ή κατακόρυφες ευθείες και να περιγράψουμε την τομή τους με το χωρίο Ω.

Ακολουθούν ενδεικτικές δραστηριότητες.

Προκαταρκτικά

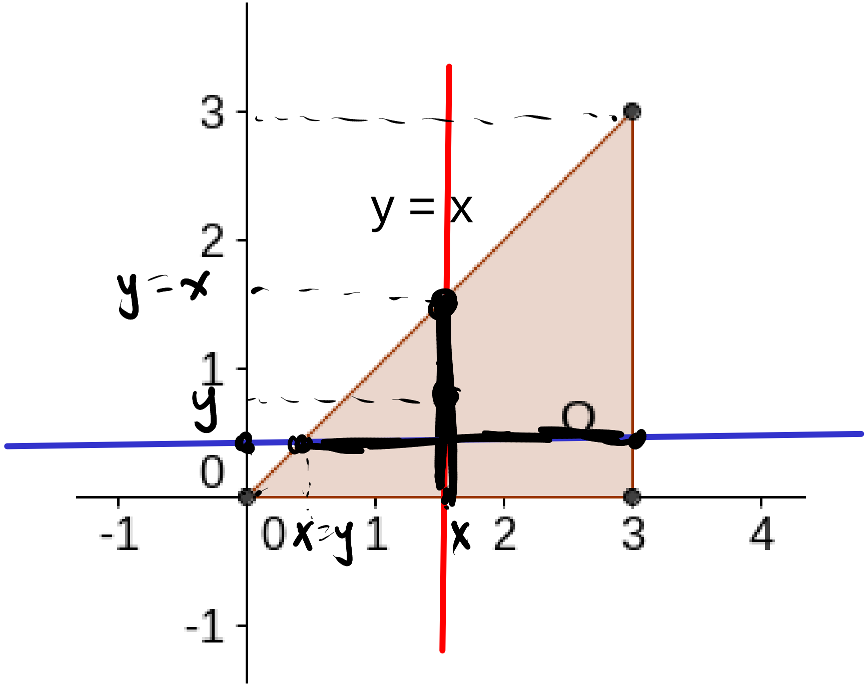


$0 \leq x \leq 4$

$0 \leq y \leq 2.$

Υπόδειξη: Θεωρήστε κατακόρυφες ευθείες για $0 \leq x \leq 4$. Μπορείτε να περιγράψετε τα σημεία της κάθε τομής;

Προκαταρκτικά



$0 \leq x \leq 3$

$0 \leq y \leq x$.

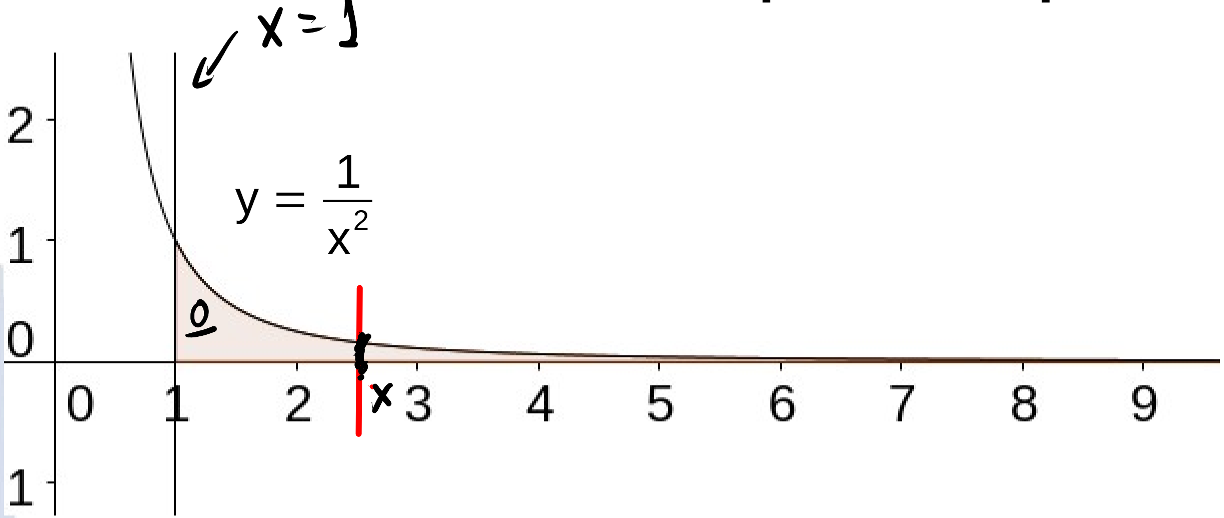
$\Downarrow$

$0 \leq y \leq 3$

$y \leq x \leq 3$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε κατακόρυφες ευθείες για 0 ≤ x ≤ 3. Μπορείτε να περιγράψετε τα σημεία της κάθε τομής;

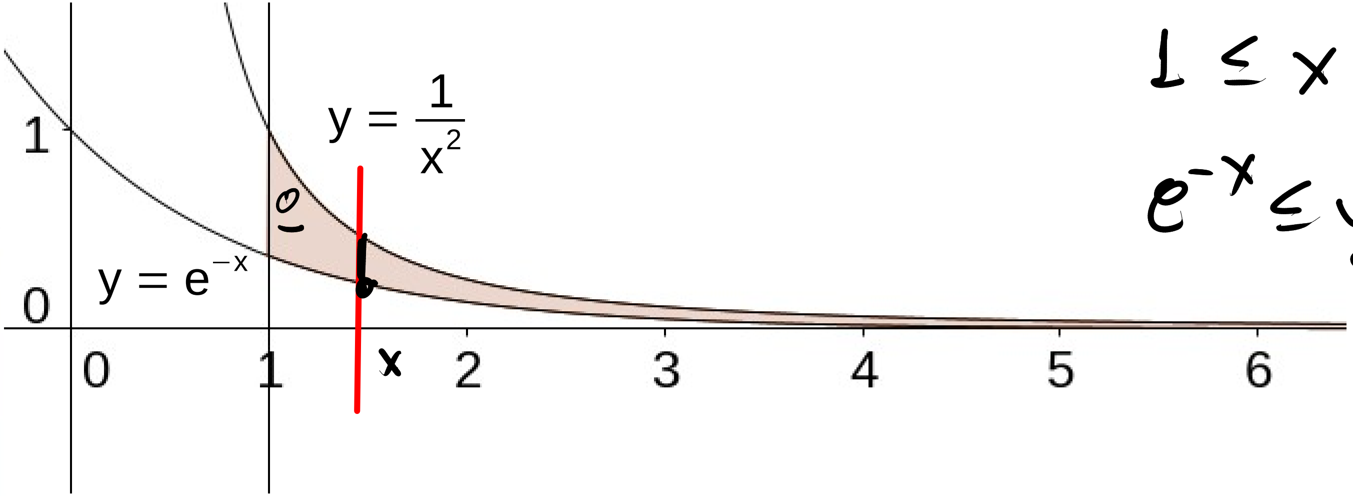
Προκαταρκτικά



$$1 \le x < +\infty$$

$$0 \le y \le \frac{1}{x^2}$$

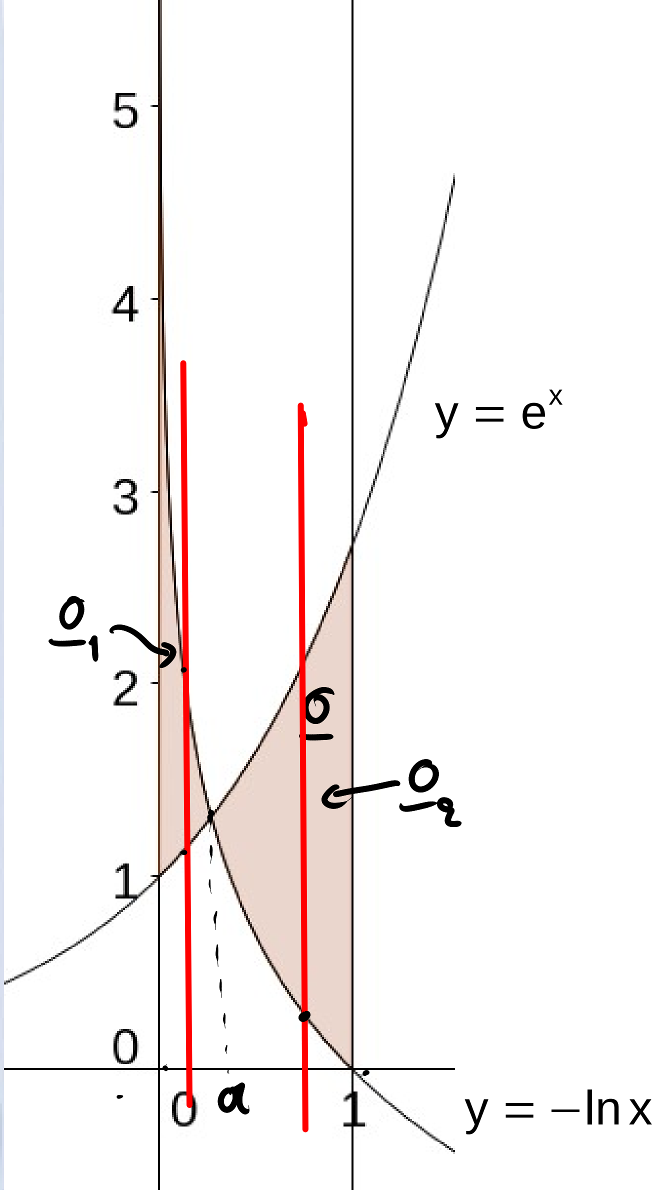
Προκαταρκτικά



$1 \leq x < +\infty$

$e^{-x} \leq y \leq \frac{1}{x^2}$

Προκαταρκτικά

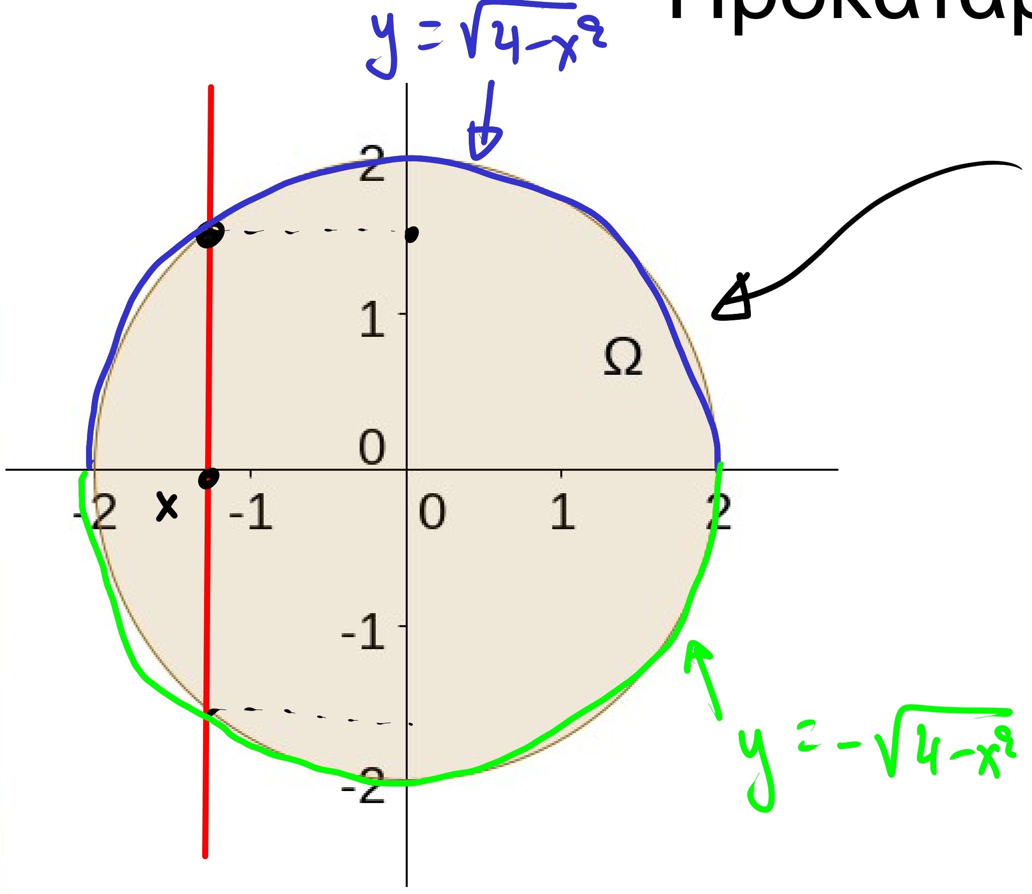


$\underline{O} = \underline{O}_1 \cup \underline{O}_2$

$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le a \\ e^x \le y \le -\ln x \end{array}\right\} \underline{O}_1$

$\left.\begin{array}{l} a \le x \le 1 \\ -\ln x \le y \le e^x \end{array}\right\} \underline{O}_2$

Προκαταρκτικά



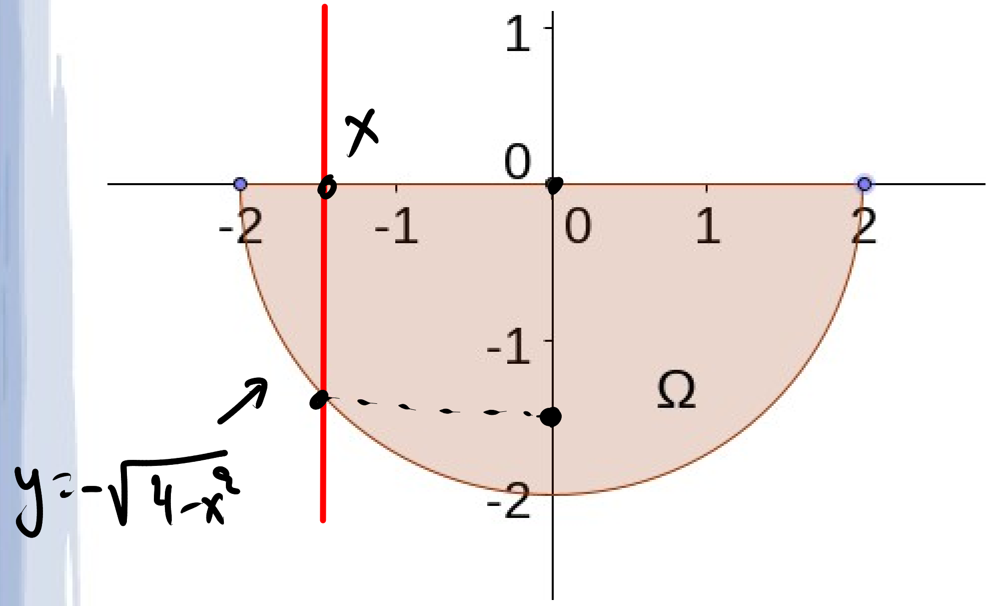
$$x^2+y^2=2^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{aligned}\right\} \Omega$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε κατακόρυφες ευθείες για -2 ≤ x ≤ 2. Μπορείτε να περιγράψετε τα σημεία της κάθε τομής;

Προκαταρκτικά

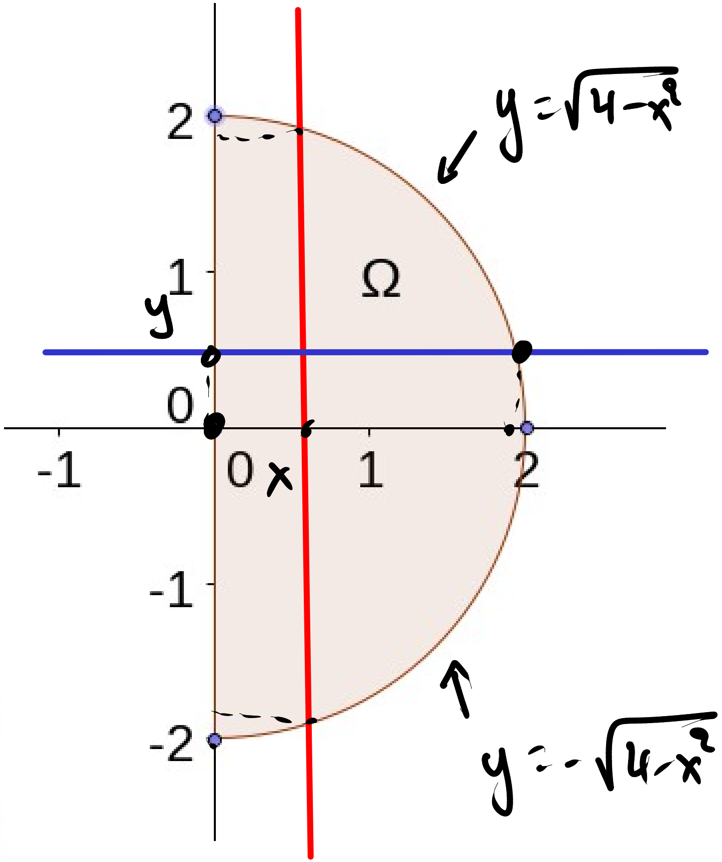
$$\left.\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0 \end{array}\right\} \underline{\Theta}$$



Υπόδειξη: Θεωρήστε κατακόρυφες ευθείες για 0 ≤ x ≤ 4. Μπορείτε να περιγράψετε τα σημεία της κάθε τομής;

$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4-y^2}$

Προκαταρκτικά



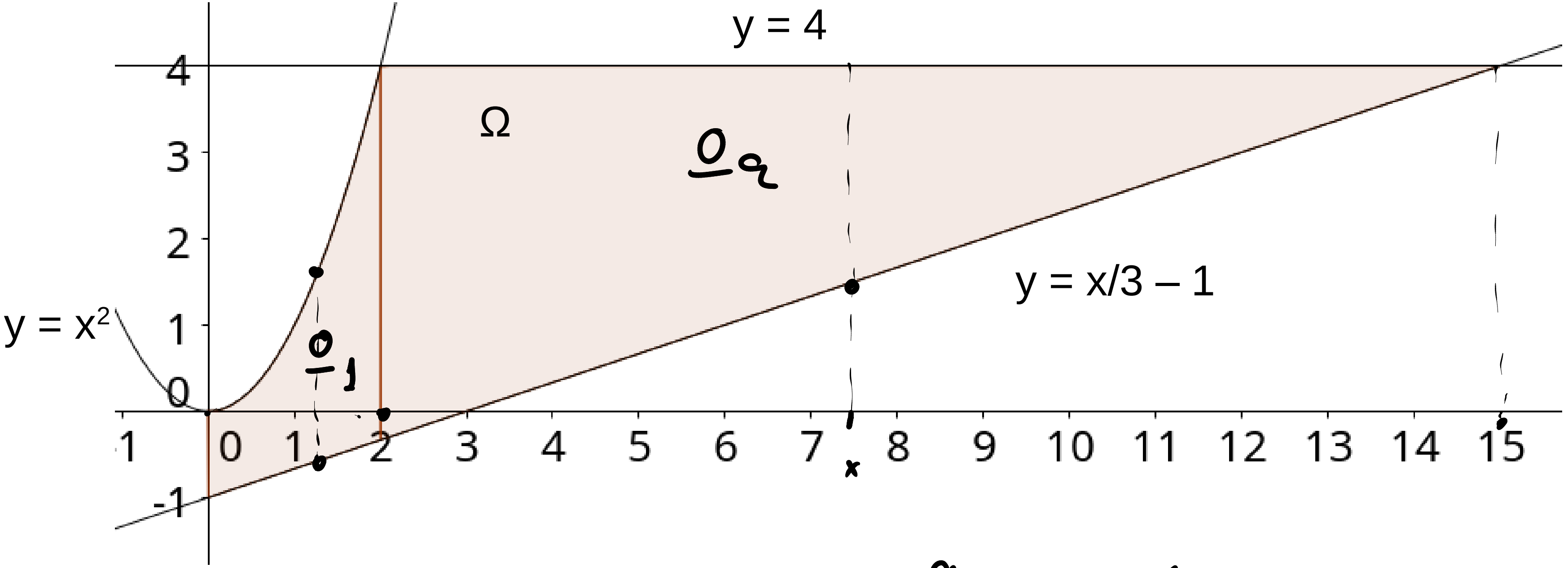
$$\left.\begin{array}{l} 0\le x\le 2 \\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2} \end{array}\right\} \textcircled{1}$$

ή

$$\left.\begin{array}{l} -2\le y\le 2 \\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2} \end{array}\right\} \textcircled{2}$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε οριζόντιες ευθείες για -2 ≤ y ≤ 2. Μπορείτε να περιγράψετε τα σημεία της κάθε τομής;

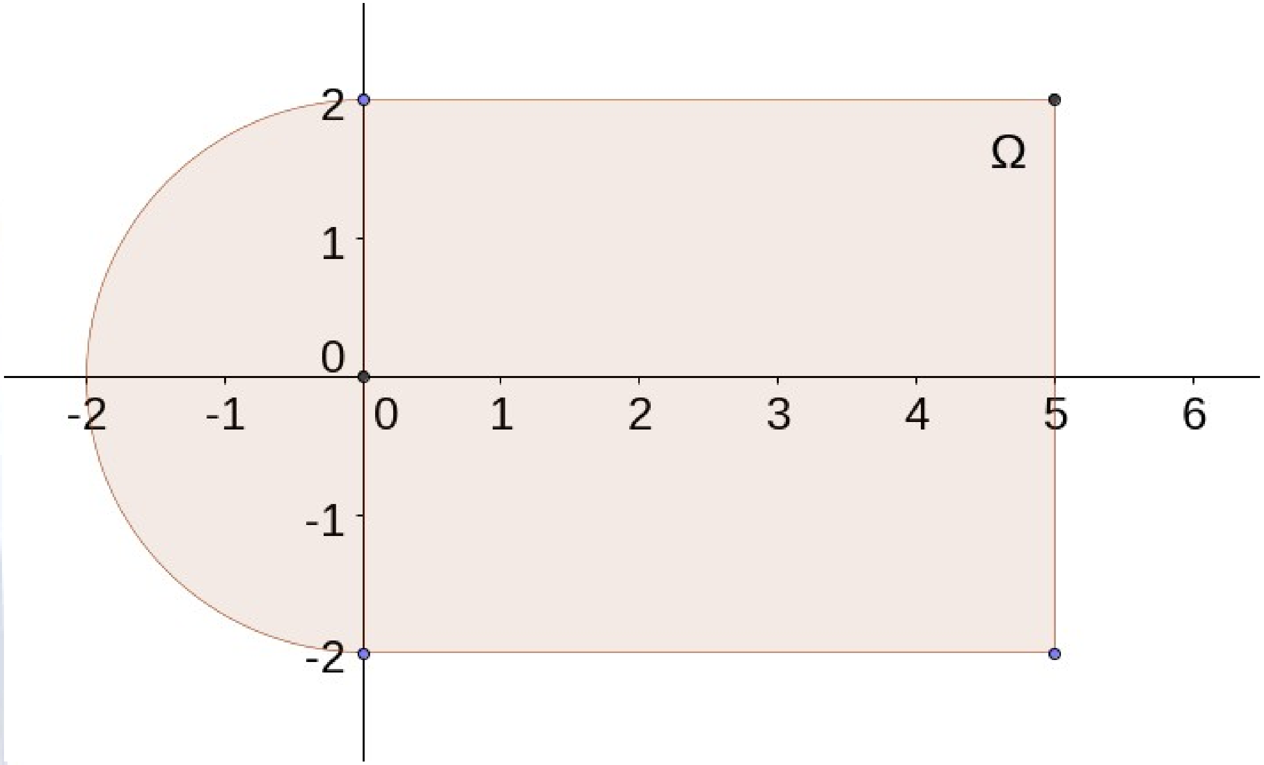
Προκαταρκτικά



$$\Omega_1: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{3} - 1 \le y \le x^2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \Omega_2: \begin{cases} 2 \le x \le 15 \\ \frac{x}{3} - 1 \le y \le 4 \end{cases}$$

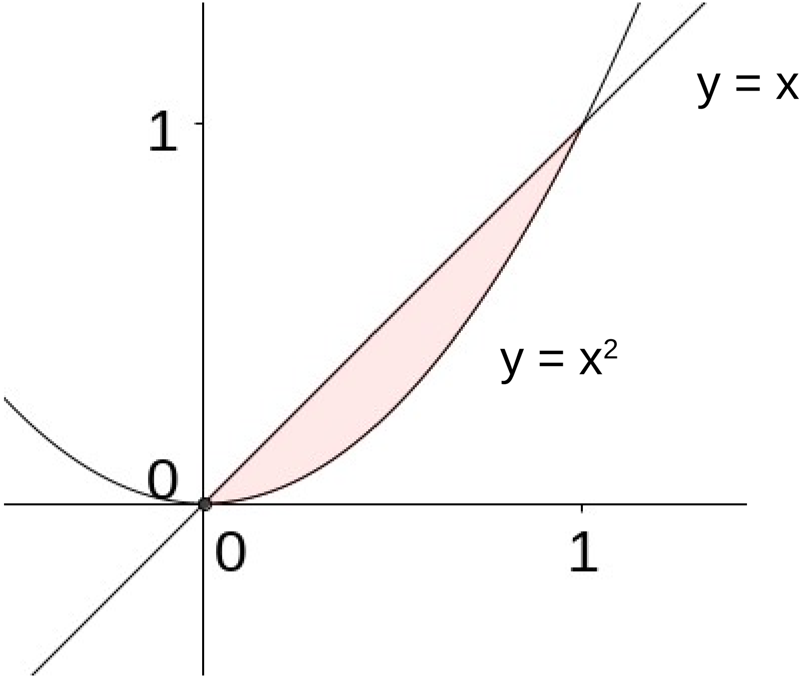
Υπόδειξη: Αναλύστε το Ω στα μέρη του $\Omega_1 + \Omega_2$.

Προκαταρκτικά



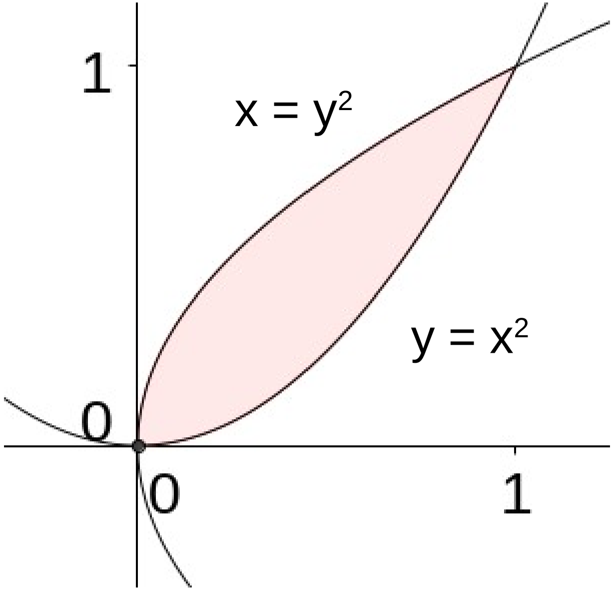
Υπόδειξη: Αναλύστε το Ω στα μέρη του $\Omega_1 + \Omega_2$.

Προκαταρκτικά



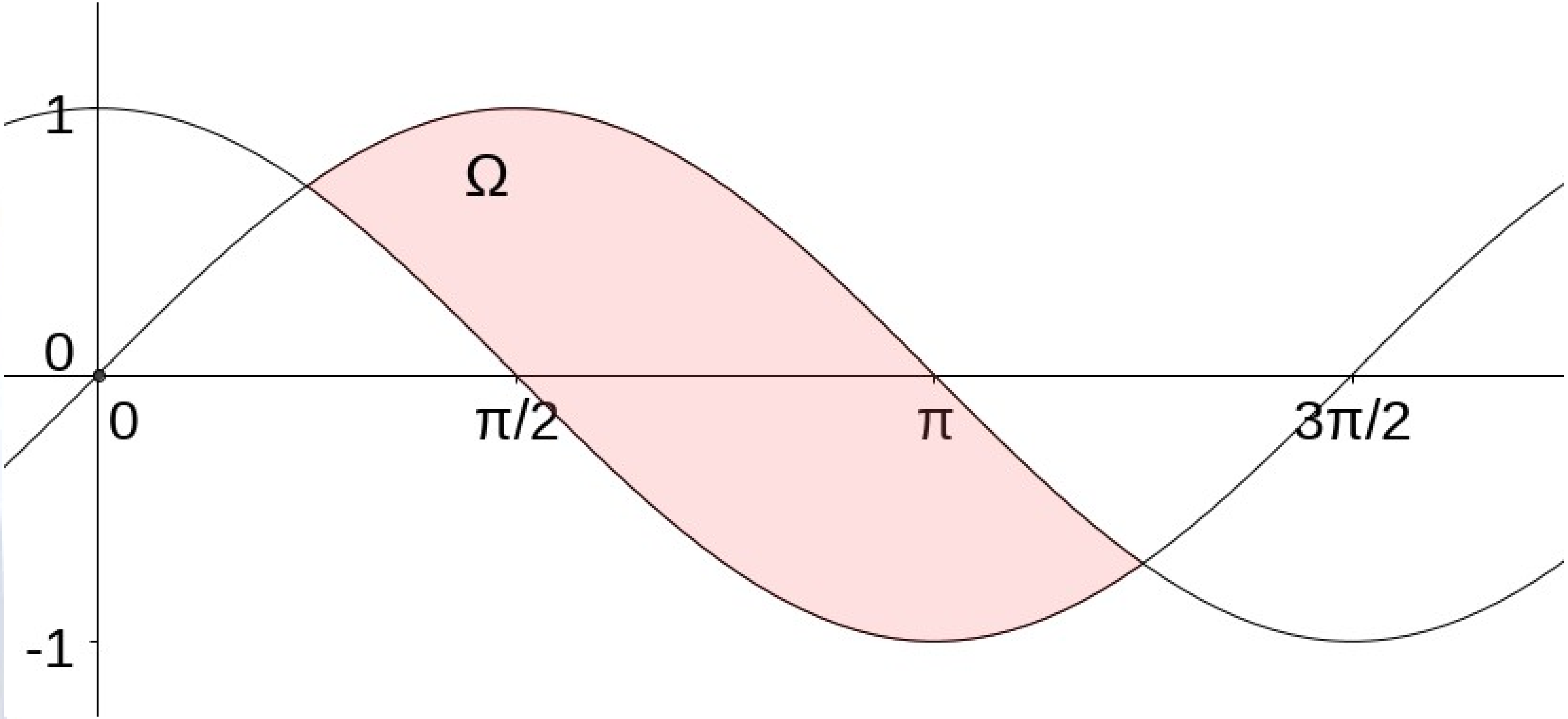
Υπόδειξη: Θεωρήστε οριζόντιες ή κατακόρυφες ευθείες.

Προκαταρκτικά



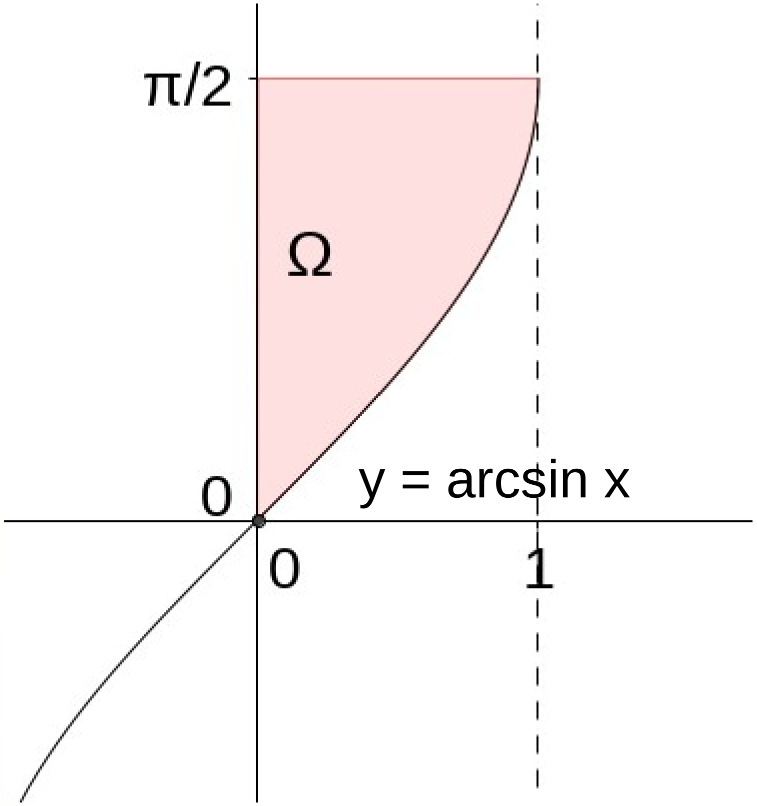
Υπόδειξη: Θεωρήστε οριζόντιες ή κατακόρυφες ευθείες.

Προκαταρκτικά



Υπόδειξη: Θεωρήστε κατακόρυφες ευθείες. Πρέπει να βρείτε τα σημεία τομής!

Προκαταρκτικά

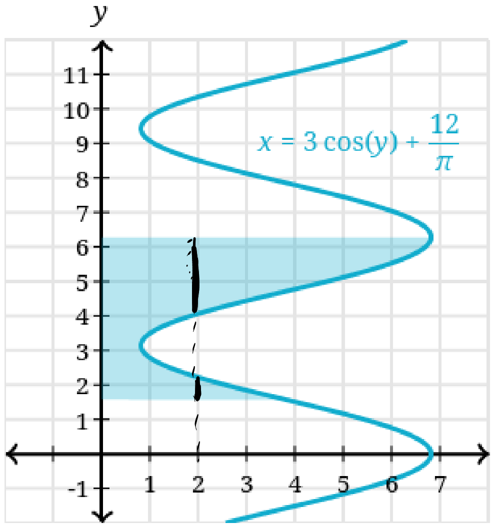


Απλά χωρία του επιπέδου

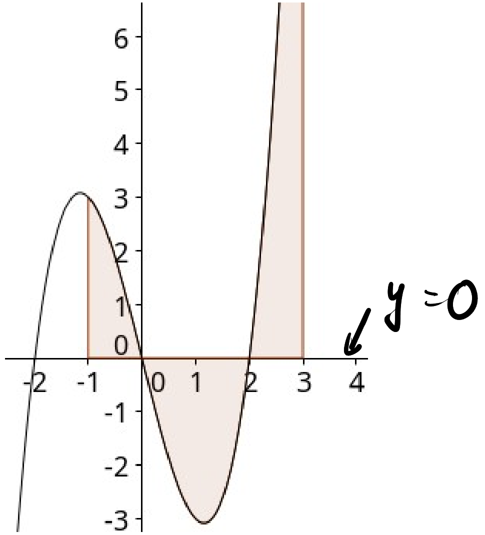
Ορισμός

Ένα χωρίο D του επιπέδου ονομάζεται **απλό ως προς y**, αν κάθε **κάθετη** ευθεία τέμνει το D σε **ένα (και μόνο)** ευθύγραμμο τμήμα. Αυτό σημαίνει ότι το χωρίο μπορεί να περιγραφεί με ανισώσεις της μορφής:

$$a(x) \le y \le b(x),\ x \in [x_1, x_2].$$



μη απλό ως προς y



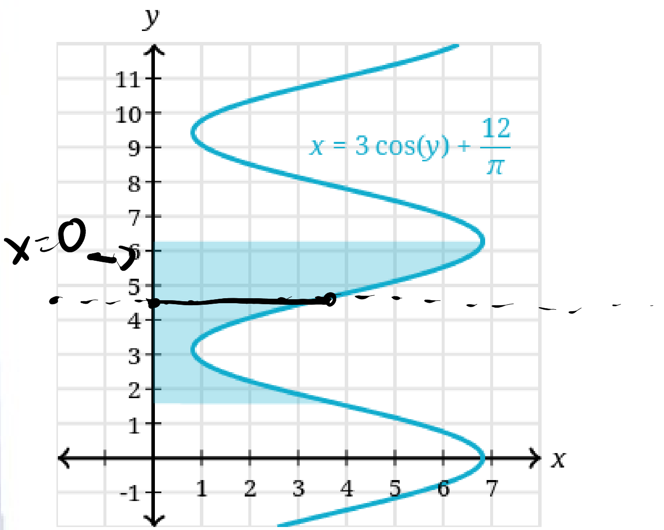
απλό ως προς y

Απλά χωρία του επιπέδου

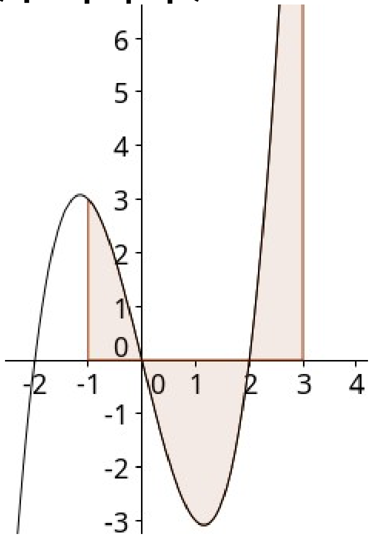
Ορισμός

Ένα χωρίο D του επιπέδου ονομάζεται **απλό ως προς x**, αν κάθε **οριζόντια** ευθεία y = σταθερό, τέμνει το D σε **ένα (και μόνο)** ευθύγραμμο τμήμα. Αυτό σημαίνει ότι το χωρίο μπορεί να περιγραφεί με ανισώσεις της μορφής:

$$a(y) \le x \le b(y),\ y \in [y_1, y_2].$$



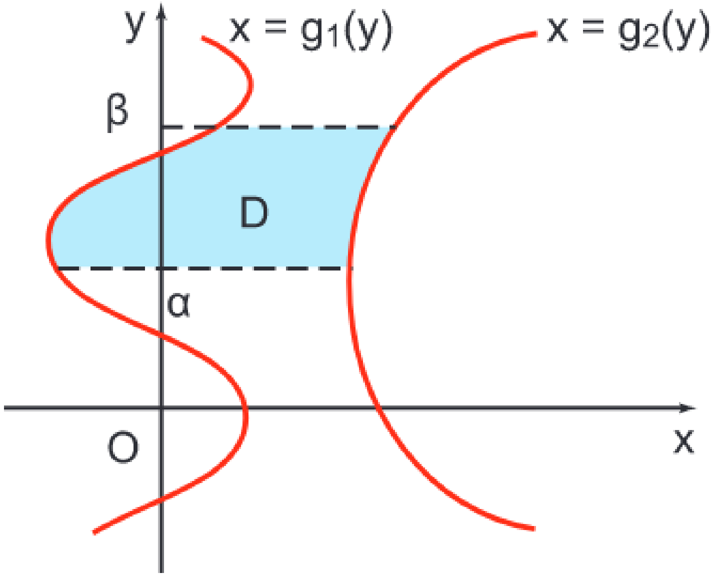
απλό ως προς x

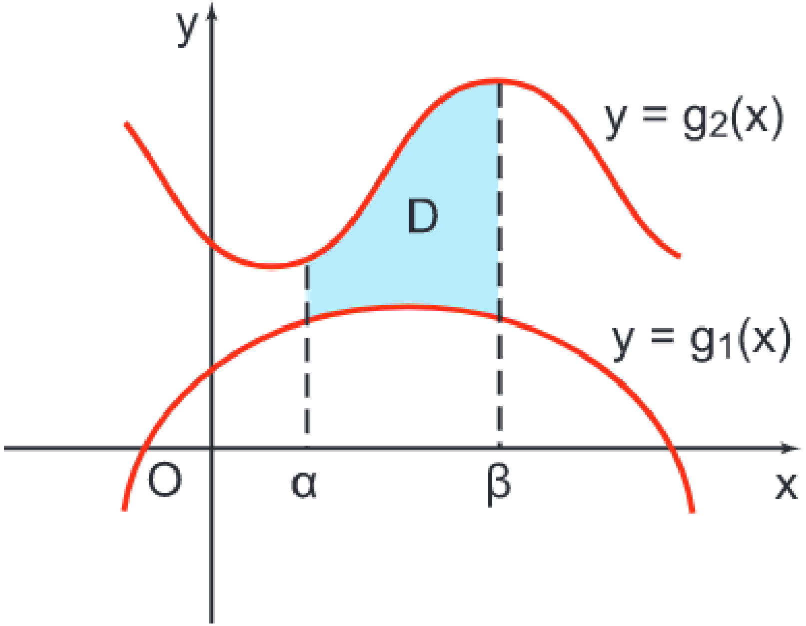


μη απλό ως προς x

Απλά χωρία του επιπέδου

Τα σημεία ενός απλού χωρίου, είτε ως προς x, είτε ως προς y, μπορούν να περιγραφούν από δύο διπλές ανισώσεις.





$\int_a^\beta y(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum f(\xi_n)\cdot\Delta x$

$a \le x \le \beta$

$f_1(x) \le y \le f_2(x)$

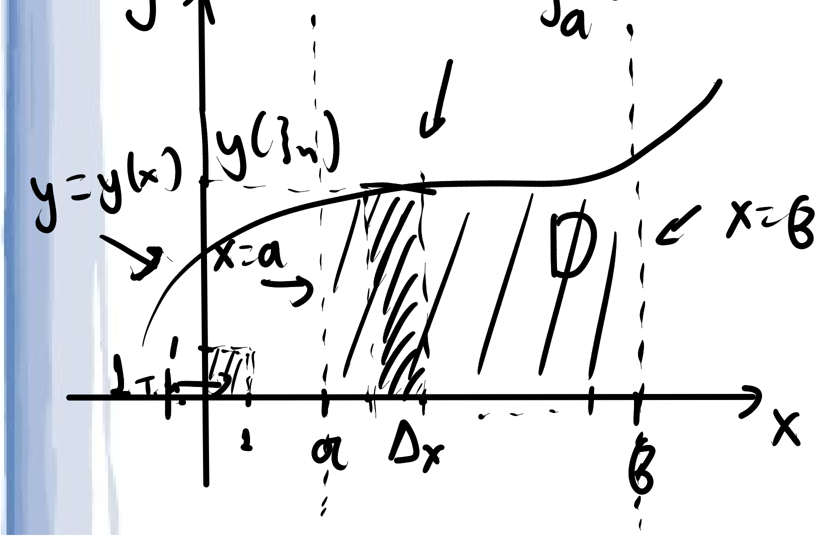
Εμβαδόν χωρίων απλών ως προς y

Το **εμβαδόν** $\boldsymbol{E(D)}$ ενός επίπεδου χωρίου D που περικλείεται άνω και κάτω από τη γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης $y(x)$, τον άξονα των x και πλαγίως από τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, όπου $\alpha < \beta$ είναι

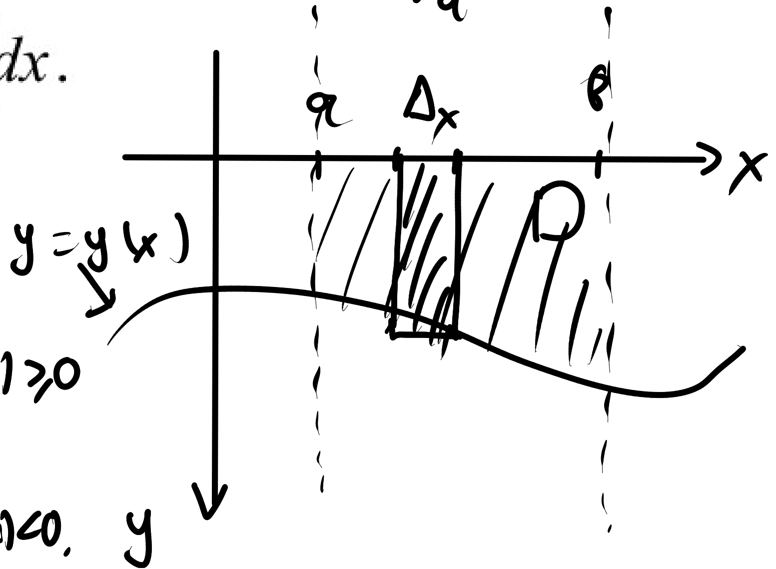
$E(D) = \int_a^\beta y(x)\,dx$

$$E(D) = \int_a^\beta |y(x)|\,dx.$$

$E(D) = \int_a^\beta (-y(x))\,dx$

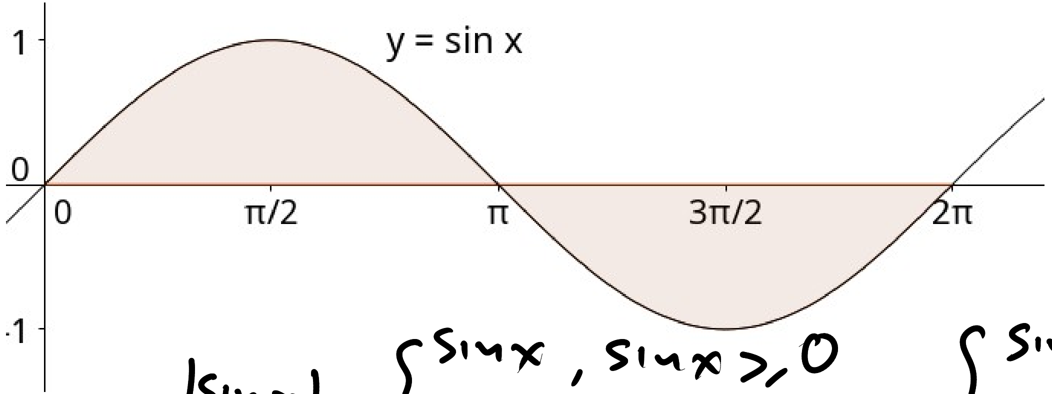


$$|y(x)| = \begin{cases} y(x), & y(x) \ge 0 \\ -y(x), & y(x) < 0. \end{cases}$$



Εμβαδόν χωρίων απλών ως προς y

Άσκηση
Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $y = \sin(x)$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2\pi$.



$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \sin x \geq 0 \\ -\sin x, & \sin x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ -\sin x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$E(\Omega) = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = -\cos x \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \cos x \Big|_{x=\pi}^{x=2\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \text{ τ.μ.}$$

Εμβαδό ≠ Ολοκλήρωμα

Ένα εμβαδό υπολογίζεται με τη βοήθεια ενός ολοκληρώματος αλλά είναι ίσο με αυτό μόνο όταν η συνάρτηση είναι θετική. Η παρακάτω άσκηση είναι διαφωτιστική.

$E_1 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \int_1^3 (-f(x))dx = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx = -\frac{5}{3}$

Άσκηση

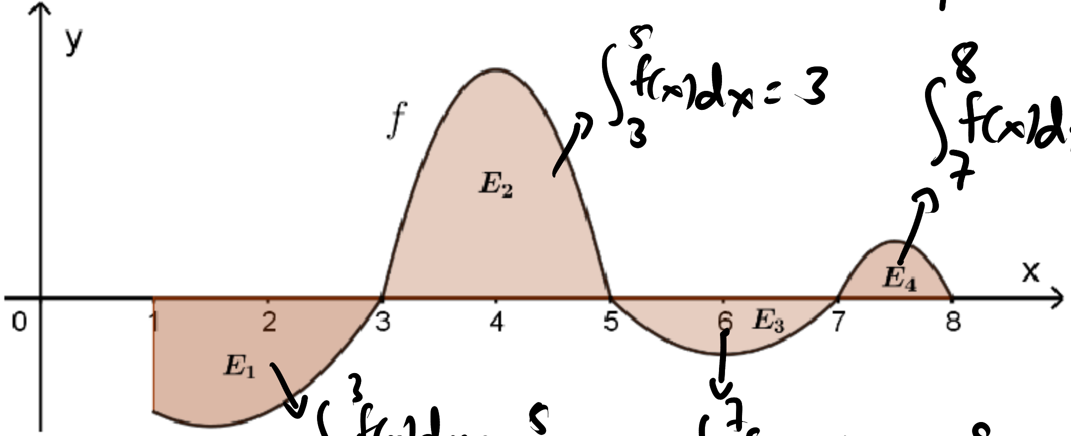
Στο διπλανό σχήμα τα σκιασμένα χωρία έχουν εμβαδά $E_1 = \frac{5}{3}$, $E_2 = 3$, $E_3 = \frac{2}{3}$ και E_4 .

Να υπολογίσετε:

(α) τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^5 f(x)dx \text{ και } I_2 = \int_7^1 f(x)dx$$

(β) το εμβαδόν του χωρίου E_4 αν $\int_1^8 f(x)dx = \frac{7}{6}$



$\int_3^5 f(x)dx = 3$

$\int_7^8 f(x)dx = E_4$

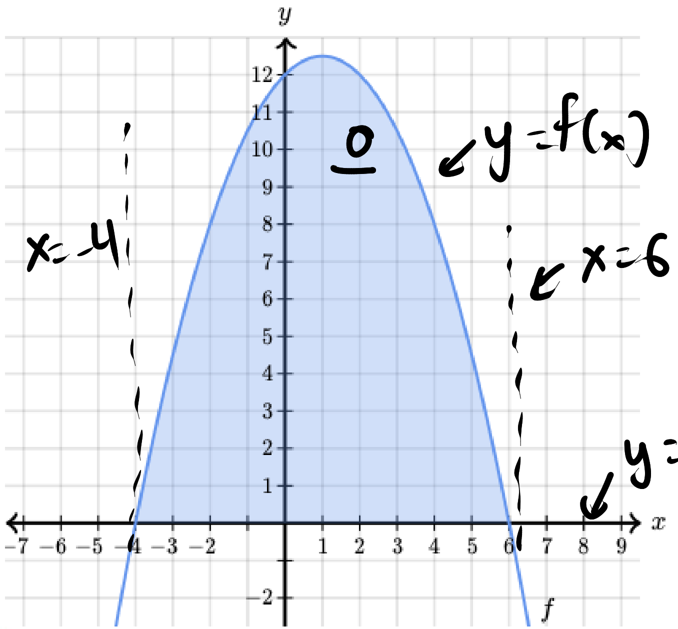
$\int_1^3 f(x)dx = -\frac{5}{3}$

$\int_5^7 f(x)dx = -\frac{2}{3}$

(α) $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = -\frac{5}{3} + 3 = \frac{4}{3}$.

Άσκηση

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα x’x και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 12$



$$E(\Omega) = \int_{-4}^{6} |f(x)|\,dx = \int_{-4}^{6} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 12\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{x=-4}^{x=6} =$$

$$= -\frac{6^3}{6} + \frac{6^2}{2} + 12\cdot 6 - \left(-\frac{(-4)^3}{6} + \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4)\right) =$$

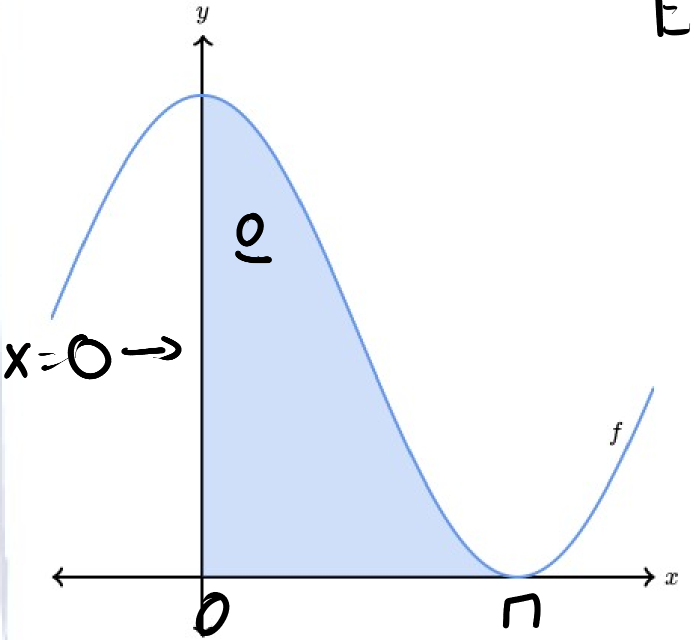
$$= -36 + 18 + 72 - \left(\frac{32}{3} + 8 - 48\right) = 94 - \frac{32}{3} = \frac{250}{3} \text{ τ.μ.}$$

Εφαρμογή Geogebra:
(α) f(x) = -1/2*x^2+x+12 (β) Ρίζες[f, -10, 10] (γ) E = Ολοκλήρωμα[f, -4, 6]

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα x’x, τον άξονα y’y και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = 2 + 2cosx.



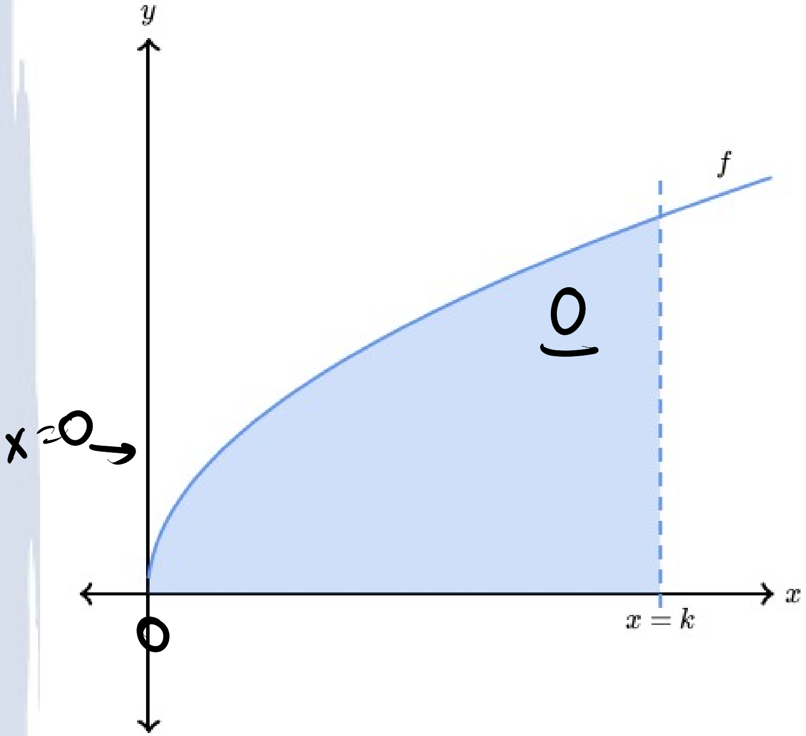
$$E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\pi}(2+2\cos x)\,dx=$$

$$=\Big[2x+2\sin x\Big]_{x=0}^{x=\pi}=(2\pi+2\cancelto{0}{\sin\pi})-(2\cdot 0+2\cdot\sin 0)$$

$$=2\pi \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση

Αν $f(x) = 2\sqrt{x}$ και το εικονιζόμενο εμβαδόν είναι 32/3 τ.μ. να βρεθεί η τιμή του k.



$$E(\Omega) = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \int_0^k 2\sqrt{x}\,dx = \frac{32}{3} \Leftrightarrow$$

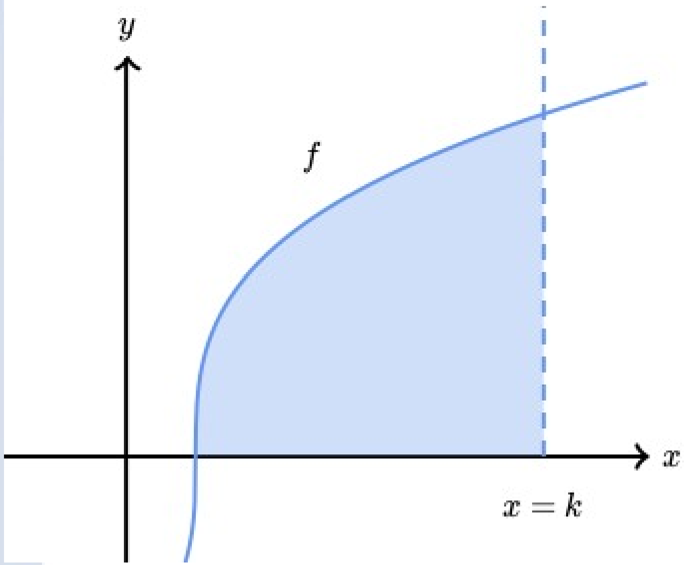
$$\Leftrightarrow 2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{x=0}^{x=k} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\cdot\left(k^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{32}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow k = 8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

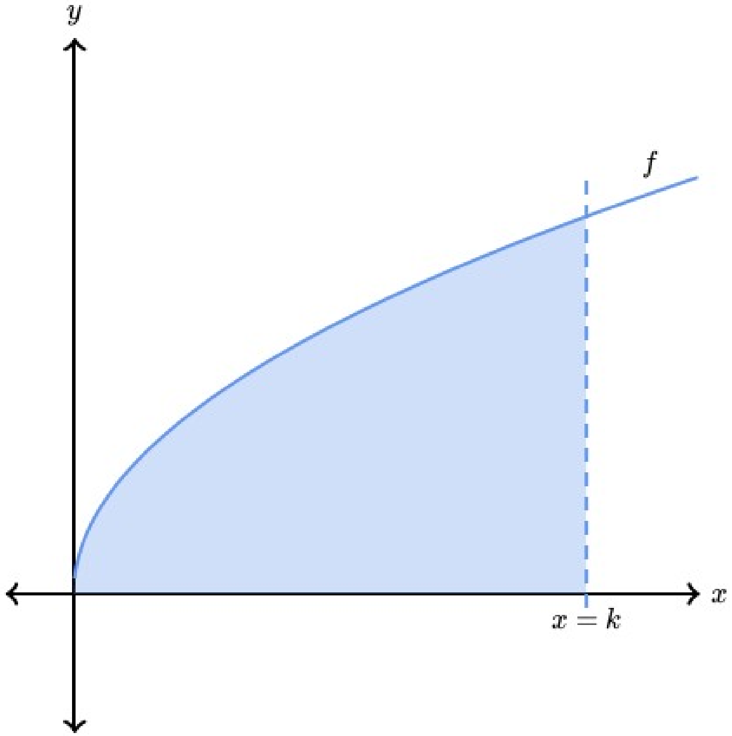
Άσκηση

Αν $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ και το εικονιζόμενο εμβαδόν είναι 12 τ.μ. να βρεθεί η τιμή του k.



Άσκηση

Αν $f(x) = 2\sqrt{x}$ και το εικονιζόμενο εμβαδόν είναι 32/3 τ.μ. να βρεθεί η τιμή του k.



Άσκηση

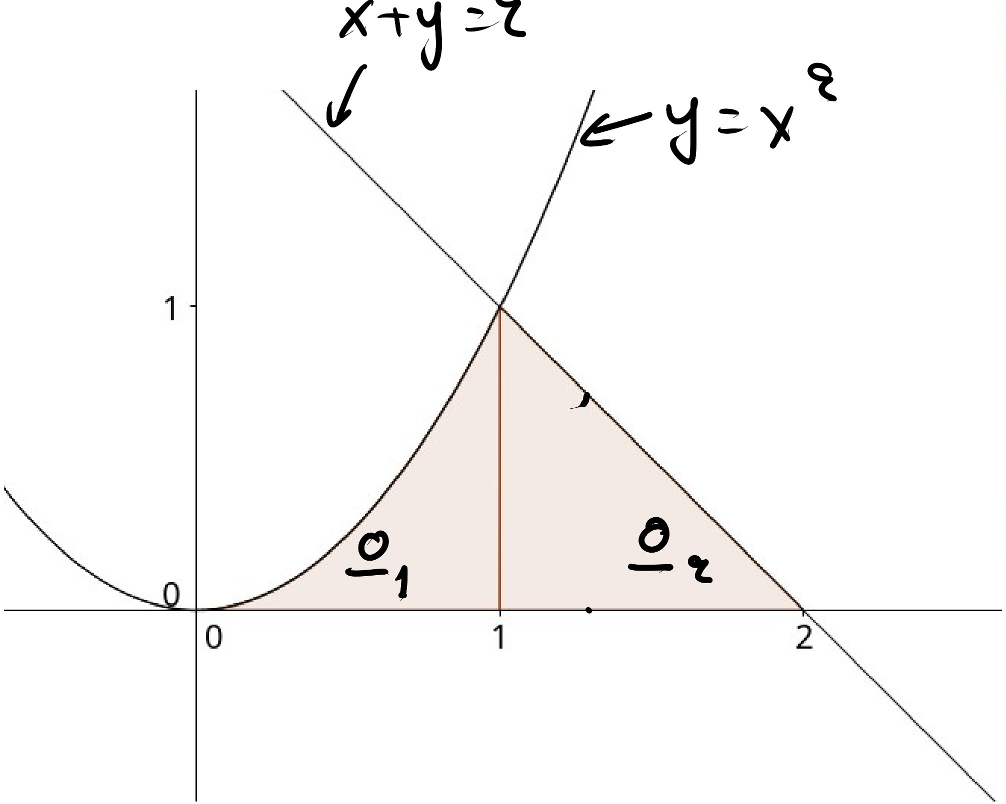
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα x’x, την ευθεία x + y = 2, και την παραβολή y = x².

$$E(\Omega_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

$$E(\Omega_2) = \int_1^2 (2-x)\,dx = 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2\cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ τ.μ.}$$

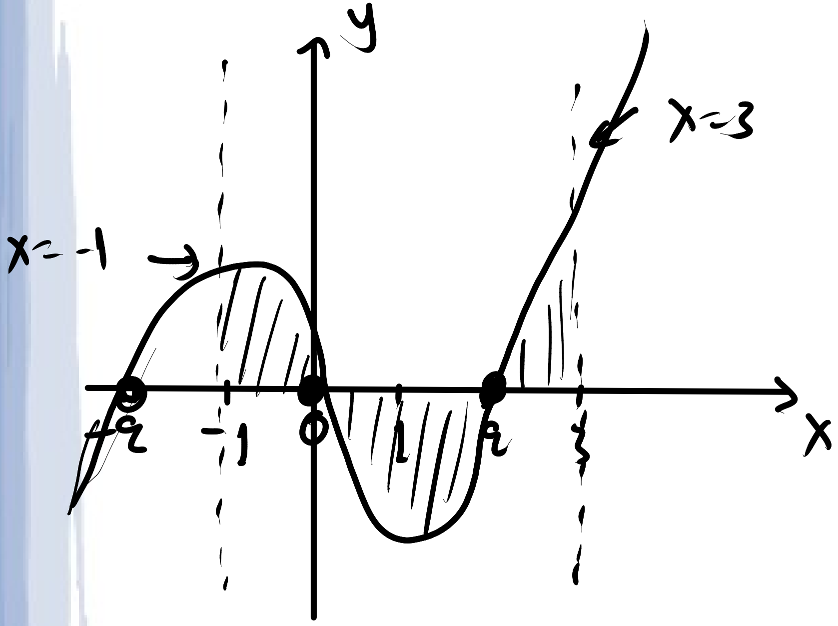


$$E=\int_{-1}^{3}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx+\int_{2}^{3}(x^3-4x)\,dx=\dots$$

Άσκηση

ακολουθεί ολοκλήρωση και πράξεις

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x, τις ευθείες x = -1, x = 3 και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 4x$.



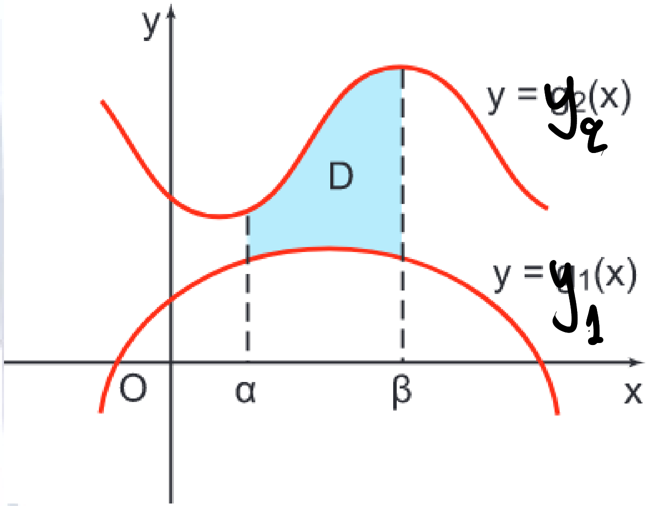
$$f(x)=x(x^2-4)=$$
$$=x(x-2)(x+2).$$

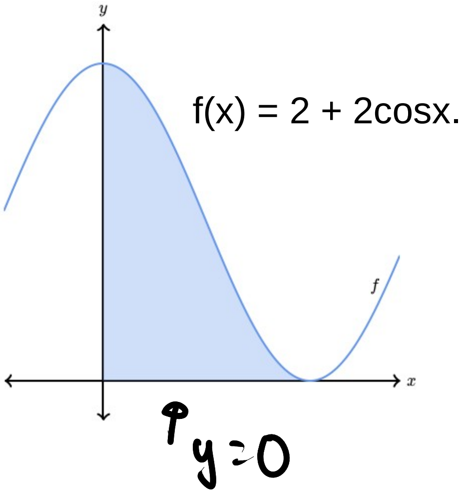
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)=\Gamma$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

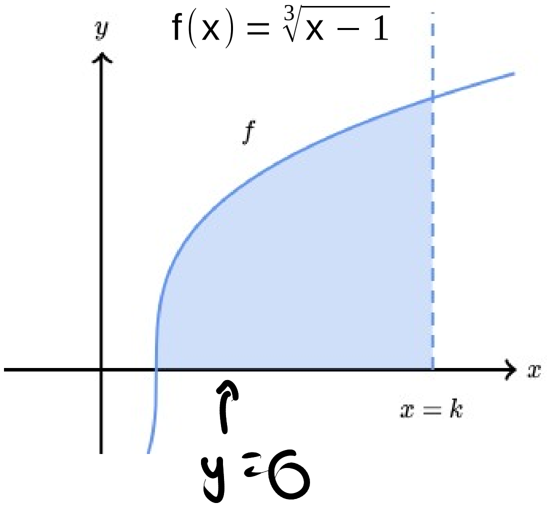
Εμβαδόν χωρίων απλών ως προς y

Το **εμβαδόν** $\boldsymbol{E(D)}$ ενός απλού ως προς y χωρίου D
που περικλείεται κάτω και άνω από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων $y_1(x)$ και $y_2(x)$ αντίστοιχα και πλαγίως από τις κατακόρυφες ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπου $\alpha < \beta$ είναι

$$E(D) = \int_{a}^{\beta} \left| y_2(x) - y_1(x) \right| dx.$$







$E(\Omega) = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,dx$

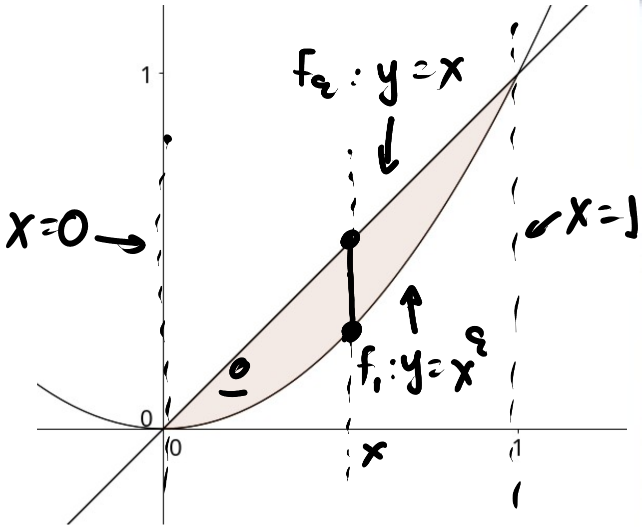
Άσκηση

$x^2 < x,\ x \in (0,1)$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία y = x και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$.

$$E(\Omega) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1}$$

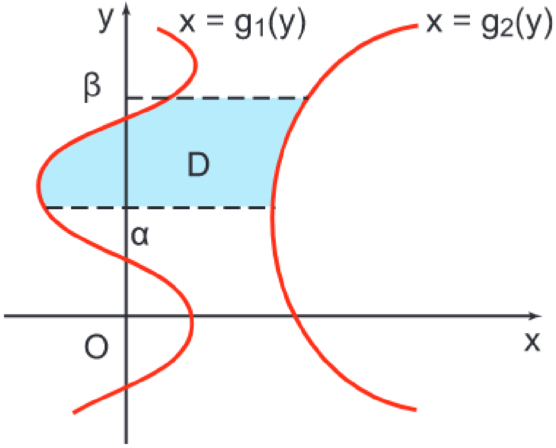
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ τ.μ.}$$

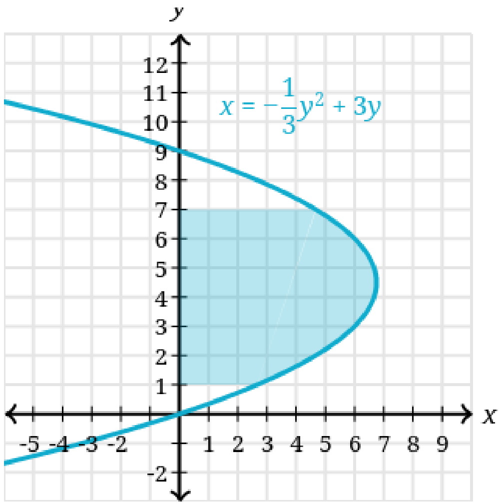


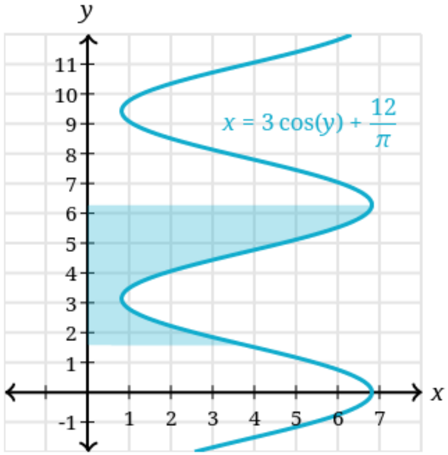
Εμβαδά Επίπεδων Χωρίων

Το **εμβαδόν $\boldsymbol{E(D)}$** ενός απλού ως προς x χωρίου D που περικλείεται πλαγίως από τις γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων $x_1(y)$ και $x_2(y)$ και κάτω και άνω από τις οριζόντιες ευθείες $y=\alpha$ και $y=\beta$ $(\alpha<\beta)$ είναι

$$E(D)=\int_{a}^{\beta}\left|x_2(y)-x_1(y)\right|dy.$$







Άσκηση

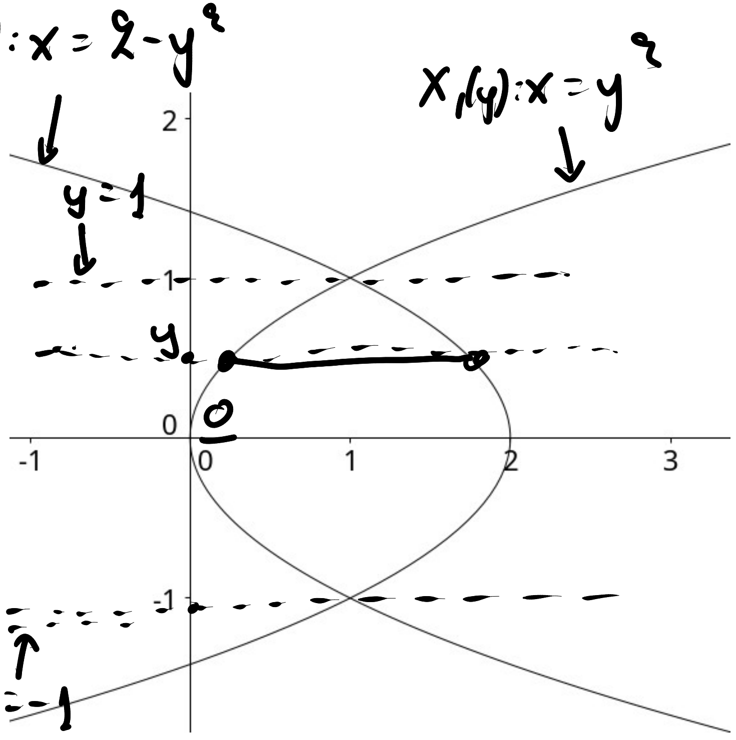
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών με εξισώσεις x = y^2 και x = 2 – y^2.

Σημεία Τομής: $y^2 = 2 - y^2 \iff 2y^2 = 2$

$\iff y = \pm 1$

$$E(C) = \int_{-1}^{1} |x_2(y) - x_1(y)|\,dy = \int_{-1}^{1} (2 - y^2 - y^2)\,dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_{y=-1}^{y=1} = 2 - \frac{2}{3} - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$



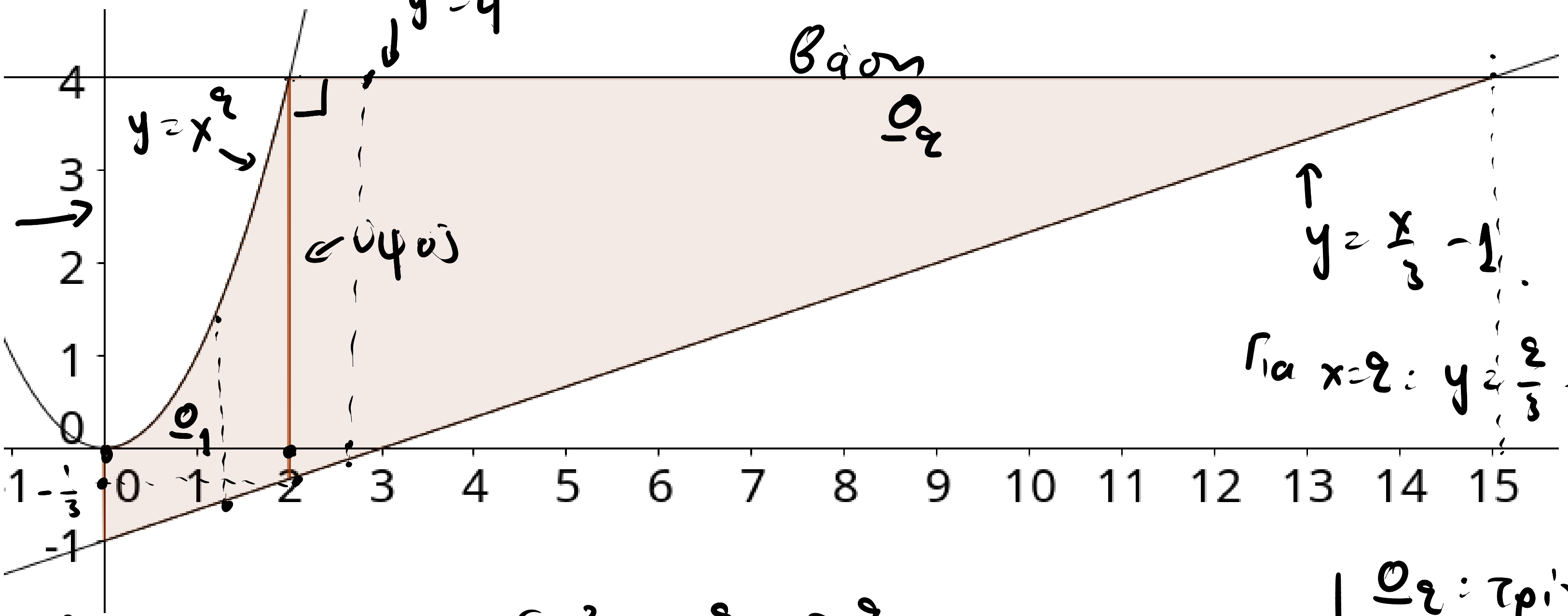
Σημείωση
Γνωρίζουμε ότι τα σημεία (x, y), (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y = x. Συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση των x = y^2, x = 2 – y^2, είναι αντίστοιχα συμμετρικές με τις παραβολές y = x^2, y = 2 – x^2.

$$\left.\begin{array}{l} y=4 \\ y=\frac{x}{3}-1 \end{array}\right\} \quad 4=\frac{x}{3}-1 \Leftrightarrow \frac{x}{3}=5 \Leftrightarrow x=15$$

Άσκηση

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)=4+\frac{169}{6}\ \tau.\mu.$$

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα y’y και των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων y = 4 και y = x^2 και y = x/3 – 1.



Για $x=2$: $y=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

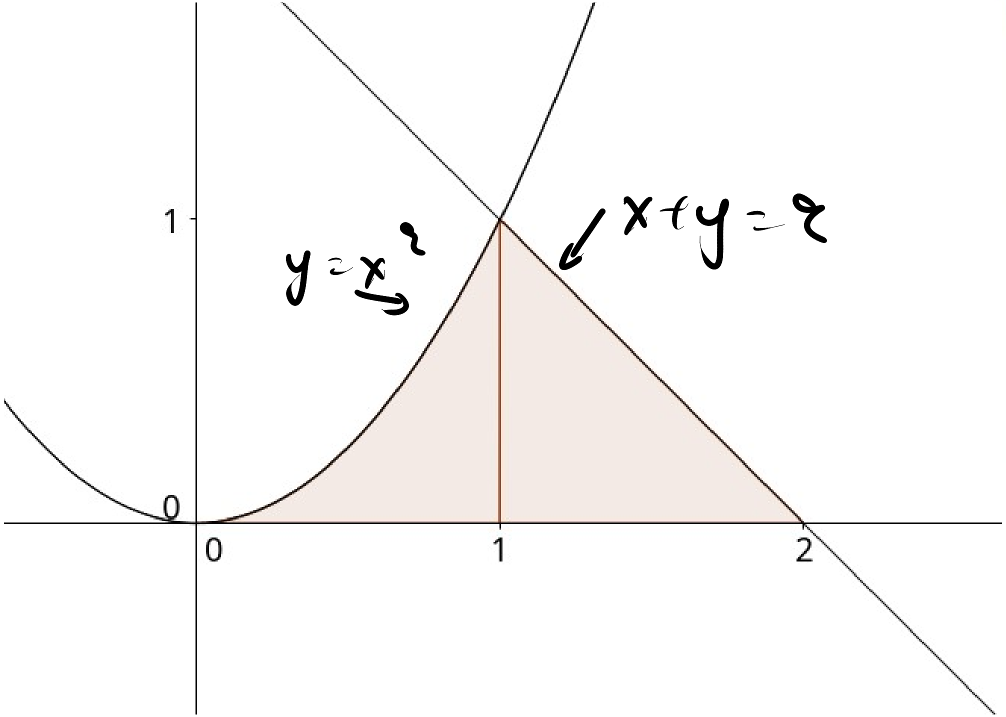
$$E(\Omega_1)=\int_0^2\left(x^2-\frac{x}{3}+1\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{6}+x\right]_0^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{6}+2=4\ \tau.\mu.$$

Ω_2: τρίγωνο

$$\Omega_2=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\frac{13}{3}=\frac{169}{6}\ \tau.\mu.$$

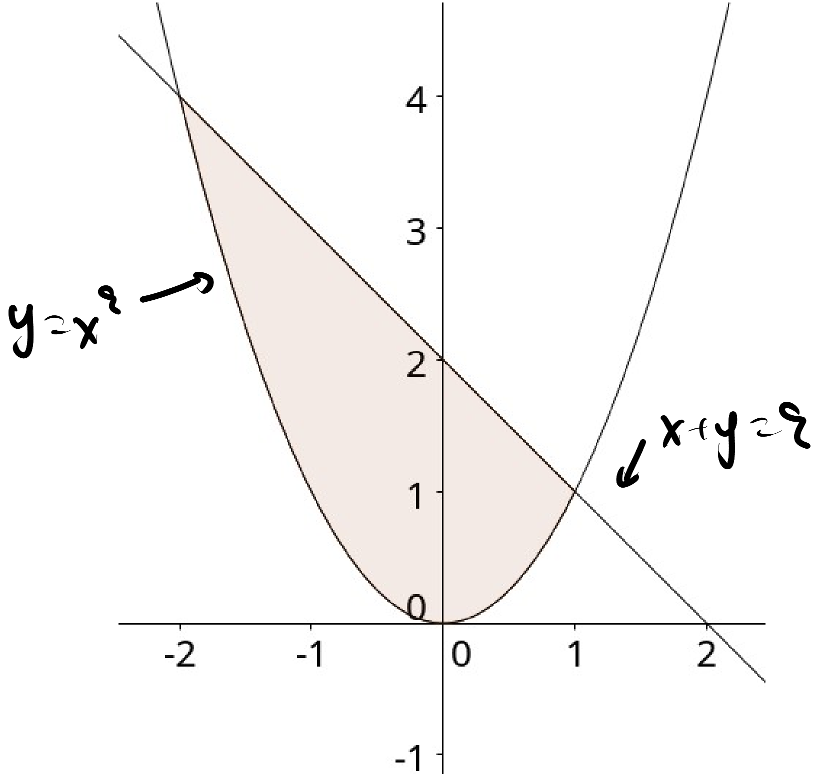
Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα x'x, την ευθεία x + y = 2, και την παραβολή $y = x^2$.



Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα x’x, την ευθεία x + y = 2, και την παραβολή $y = x^2$.



Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $y = x^2$ και $x = y^2$.

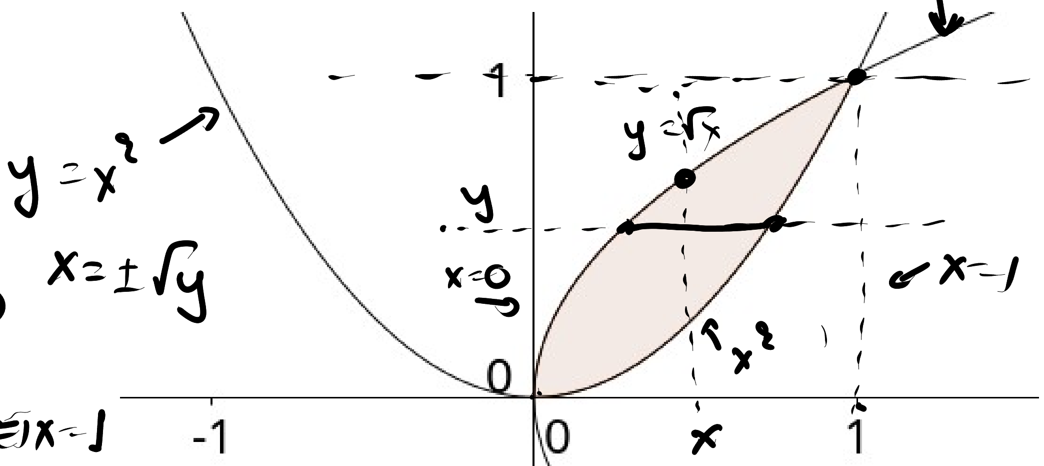
$x = y^2$

$y = \pm\sqrt{x}$

Σημείο τομής

Λύνω $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x$

$\Leftrightarrow x(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$



1ος απλό ως προς y: $E(\Omega) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ τ.μ.

2ος απλό ως προς x: $E(\Omega) = \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2)\,dy = \frac{1}{3}$ τ.μ.

$$y = x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Άσκηση

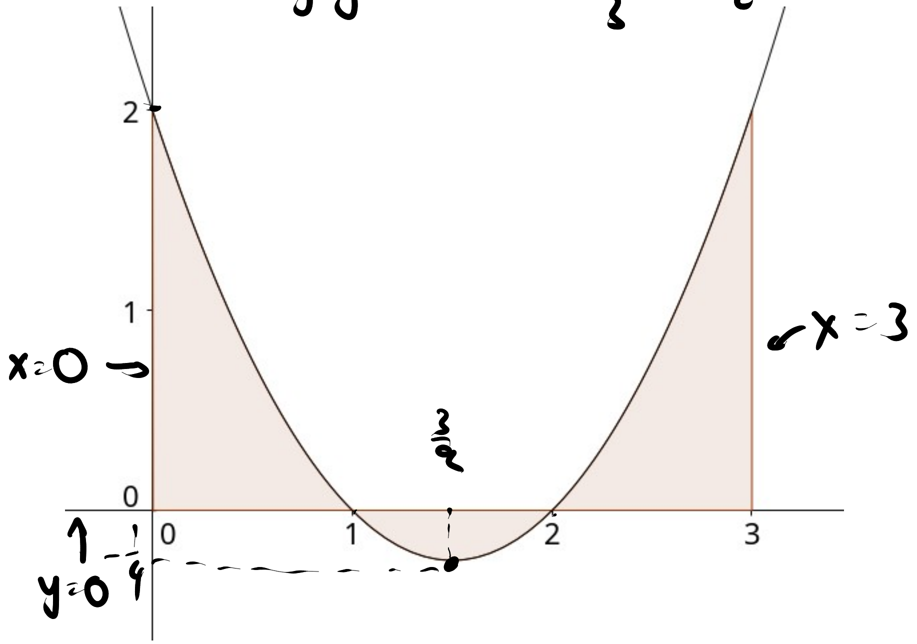
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 3x + 2$ και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$ και $x = 3$.

$$\int y(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 y(x)\,dx + \int_1^2 (-y(x))\,dx + \int_2^3 y(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 +$$

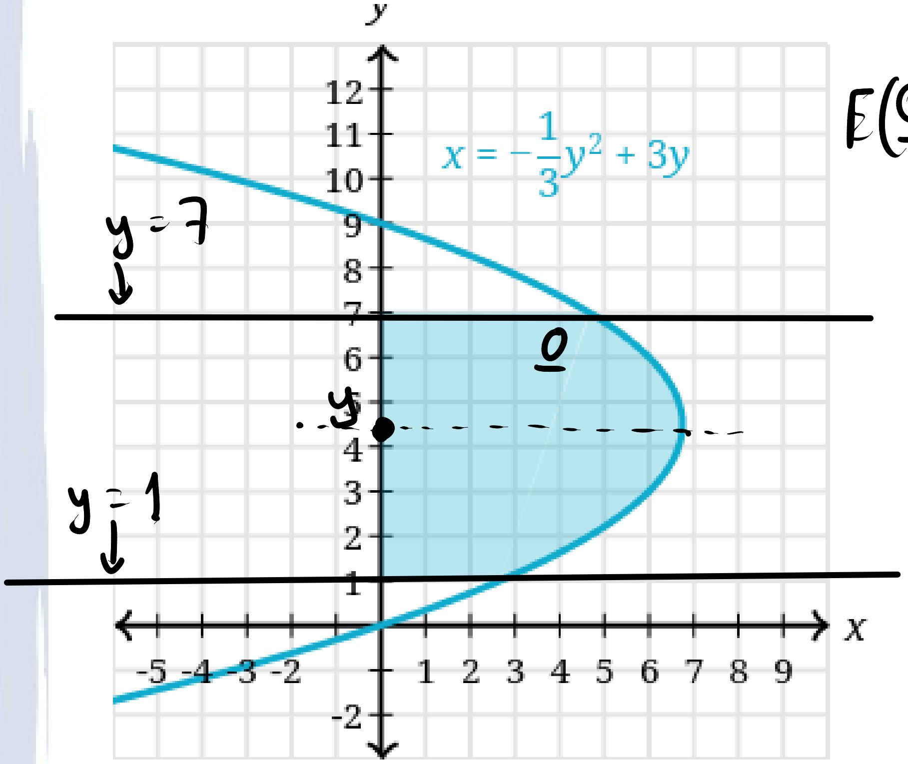
$$+ \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_2^3 = \ldots$$



$342 \,|\, 9$
$\;\;7 \;\;\,|\, 38$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου με γαλάζιο χρώμα στο παρακάτω σχήμα.



$$E(\Omega) = \int_1^7 |x(y)|\,dy = \int_1^7 \left(-\frac{1}{3}y^2 + 3y\right)dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\,\frac{y^3}{3} + \frac{3}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=7} =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{7^3}{3} + \frac{3}{2}7^2 - \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot 1^2\right) =$$

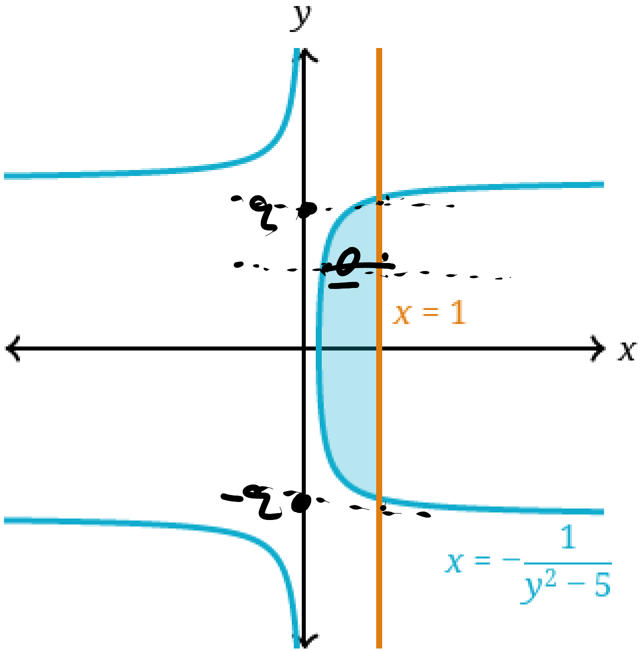
$$= -\frac{343}{9} + \frac{147}{2} + \frac{1}{9} - \frac{3}{2} = -38 + 72 = 34 \text{ τ.μ.}$$

$\underline{\Omega}$: $\quad -2 \le y \le 2$

$$-\frac{1}{y^2-5} \le x \le 1$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου με γαλάζιο χρώμα στο παρακάτω σχήμα.



Σημεία τομής:

Για $x=1$: $\quad 1 = -\frac{1}{y^2-5} \Leftrightarrow y^2-5=-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \pm 2$$

$$E(\Omega) = \int_{-2}^{2}\left(1-\left(-\frac{1}{y^2-5}\right)\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(1+\frac{1}{y^2-5}\right)dy = [y]_{-2}^{2} + \cancelto{0}{\int_{-2}^{2}\frac{1}{y^2-5}dy} = 4 \text{ τ.μ.}$$

$$\frac{1}{y^2-5} = \frac{1}{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})} = \frac{A}{y-\sqrt{5}} + \frac{B}{y+\sqrt{5}} = \frac{(A+B)y+\sqrt{5}(A-B)}{y^2-5}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \sqrt{5}(A-B)=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} B=-A \\ 2\sqrt{5}A=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ B=-\frac{1}{2\sqrt{5}} \end{array}$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{y^2-5}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-2}^{2} \frac{1}{y-\sqrt{5}}\,dy - \frac{1}{2\sqrt{5}} \int_{-2}^{2} \frac{1}{y+\sqrt{5}}\,dy$$

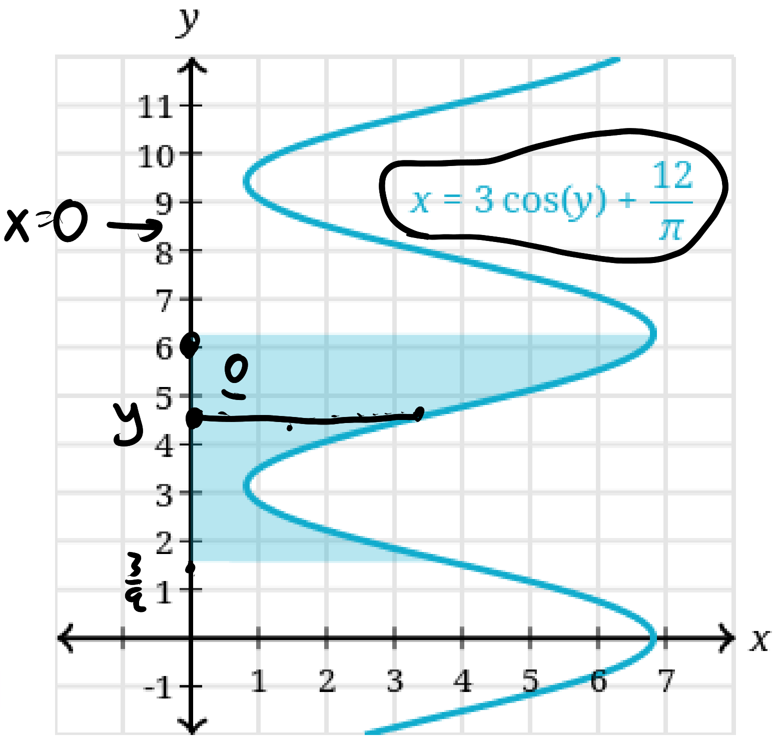
$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|y-\sqrt{5}| \Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|y+\sqrt{5}| \Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\ln(\sqrt{5}-2) - \ln(\sqrt{5}+2) - \ln(2+\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{5}-2) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left[(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(5-4) = 0.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου με γαλάζιο χρώμα στο παρακάτω σχήμα.



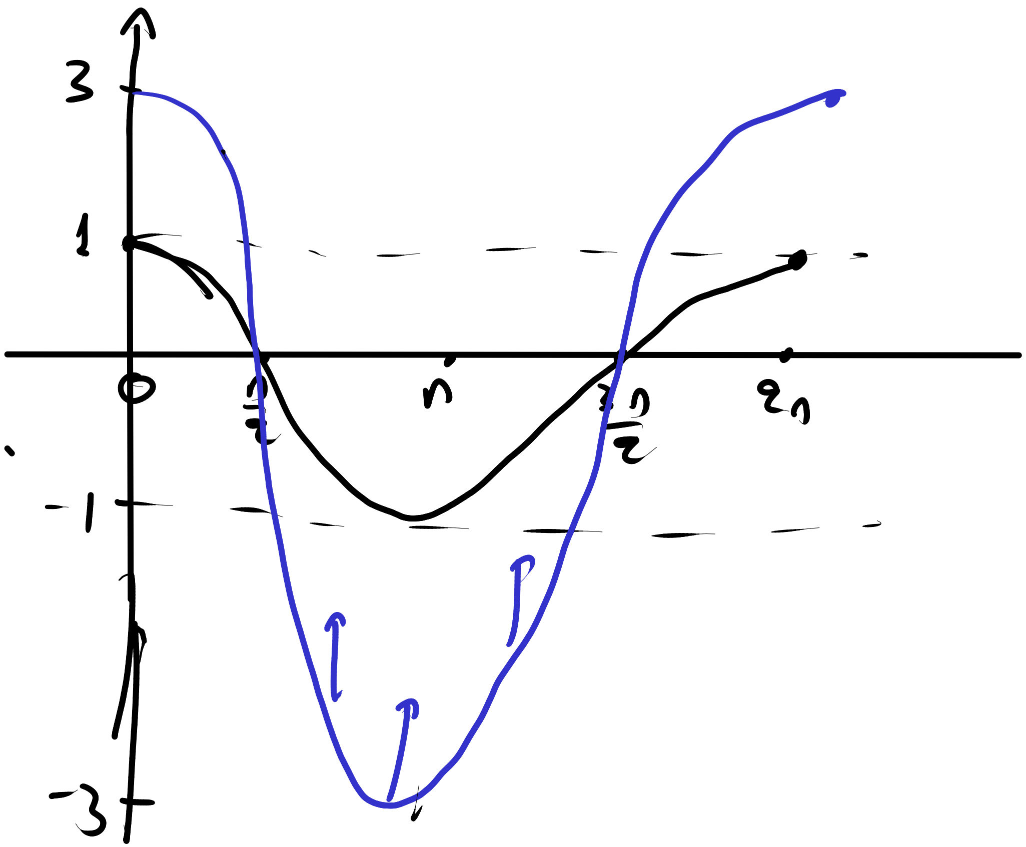
$$E(\Omega) = \int_{\frac{3}{2}}^{6} \left(3\cos y + \frac{12}{\pi}\right) dy =$$

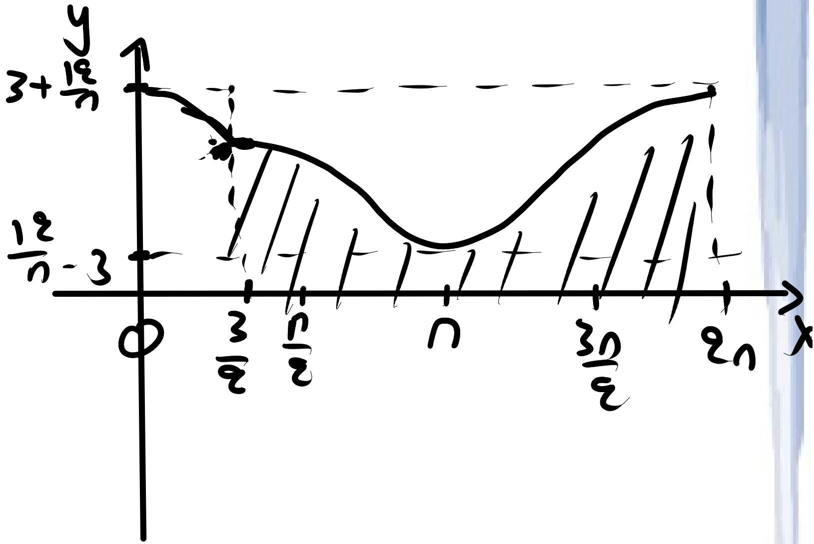
$$= 3\sin y \Big|_{y=\frac{3}{2}}^{y=6} + \frac{12}{\pi} \cdot y \Big|_{y=\frac{3}{2}}^{y=6} =$$

$$= 3\sin 6 - 3\sin\frac{3}{2} + \frac{12}{\pi} \cdot \left(6 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 3\sin 6 - 3\sin\frac{3}{2} + \frac{54}{\pi}.$$

$$y = 3\cos x + \frac{12}{\pi}$$

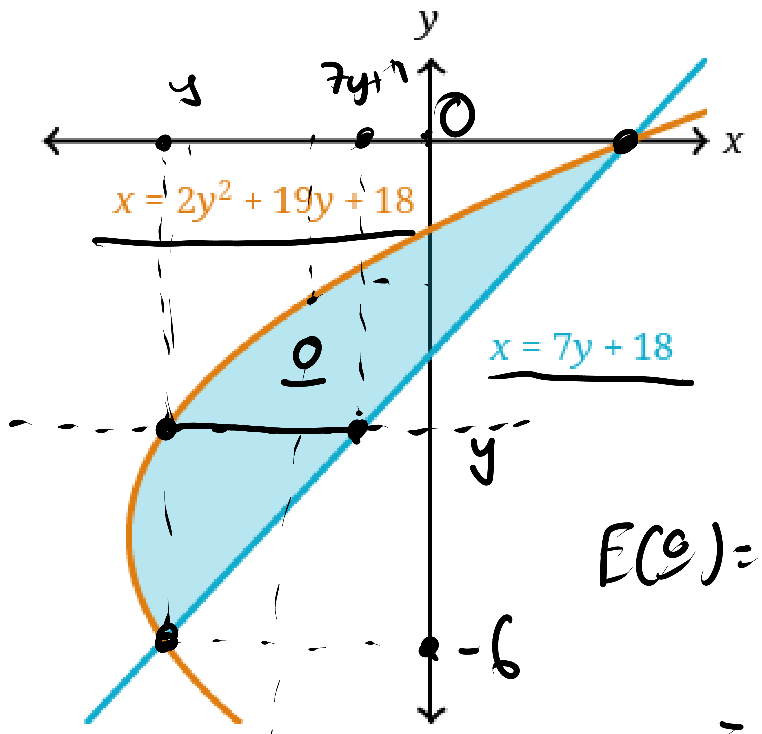




$$(*) = -2\cdot\left(-\frac{(-6)^3}{3}\right) - 12\cdot\left(-\frac{(-6)^2}{2}\right) = -2\cdot\frac{216}{3} + 12\cdot 18 = -144+216 = 72 \text{ τ.μ.}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου με γαλάζιο χρώμα στο παρακάτω σχήμα.



$2y^2+19y+(18-x)=0$

Σημείο τομής:

$2y^2+19y+18 = 7y+18$

$\Leftrightarrow 2y^2+12y=0 \Leftrightarrow 2y(y+6)=0$

$\Leftrightarrow y=0$ ή $y=-6$

$$E(\Omega) = \int_{-6}^{0}\left(7y+18-(2y^2+19y+18)\right)dy =$$

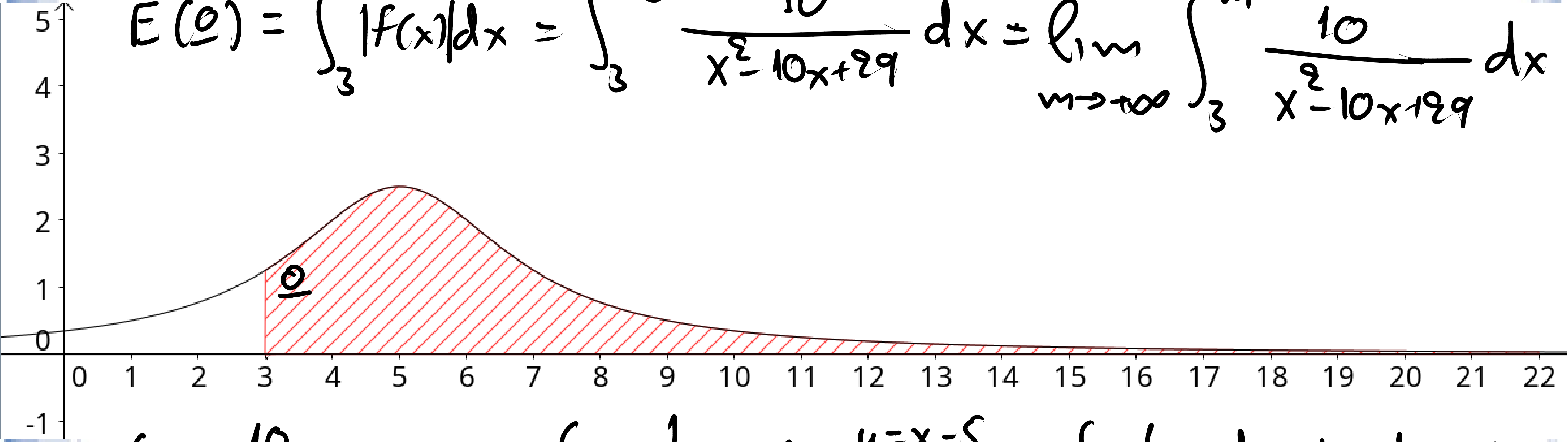
$$= \int_{-6}^{0}(-2y^2-12y)\,dy = -2\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=-6}^{y=0} - 12\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=-6}^{y=0} \overset{(*)}{=}$$

$x^2-10x+29 = \underbrace{x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2}-5^2+29 = (x-5)^2+4$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x’x, την ευθεία x = 3 και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = 10/(x^2 – 10x + 29).

$$E(\Omega) = \int_3^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{10}{x^2-10x+29}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_3^{m} \frac{10}{x^2-10x+29}\,dx$$



$$\int \frac{10}{x^2-10x+29}\,dx = 10\int \frac{1}{(x-5)^2+4}\,dx \overset{u=x-5}{\underset{du=dx}{=}} 10\cdot\int \frac{1}{u^2+2^2}\,du = 10\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}$$

$\Delta = (-10)^2-4\cdot1\cdot29 = 100-116 = -16 < 0$

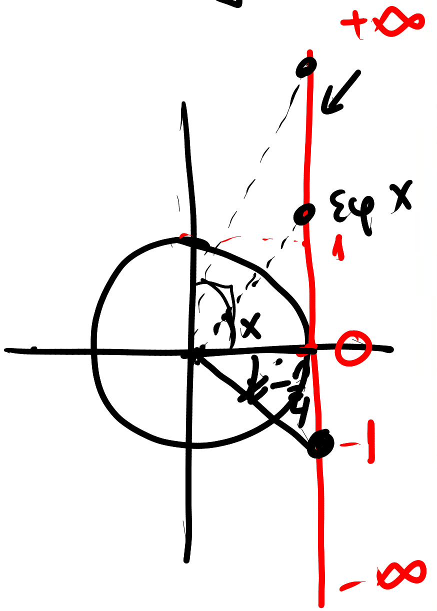
$(*)$

$$\circledast = \frac{10}{2}\arctan\frac{x-5}{2} + c \qquad \Big|\ \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_3^m \frac{10}{x^2-10x+29}\,dx = \frac{10}{2}\left[\arctan\frac{m-5}{2} - \arctan\frac{3-5}{2}\right]$$

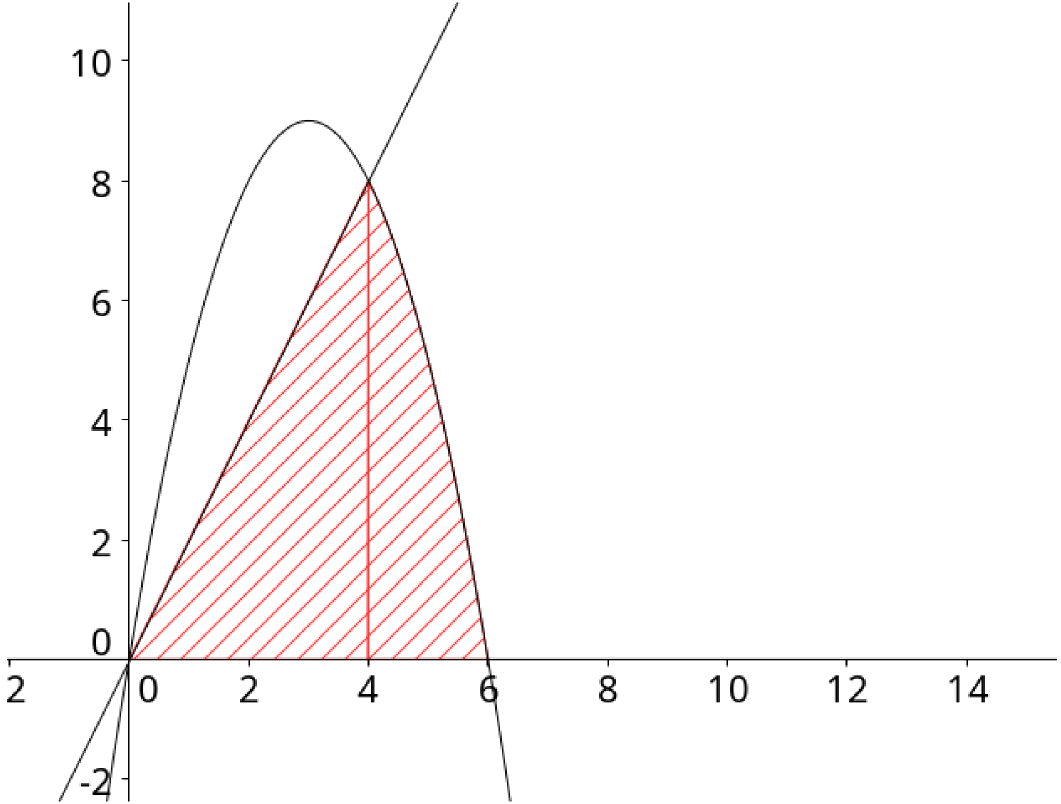
$$E(\Omega) = \lim_{m\to+\infty} \frac{10}{2}\left[\arctan\frac{m-5}{2} - \arctan(-1)\right]$$

$$= 5\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{15\pi}{4}\ \text{τ.μ.}$$



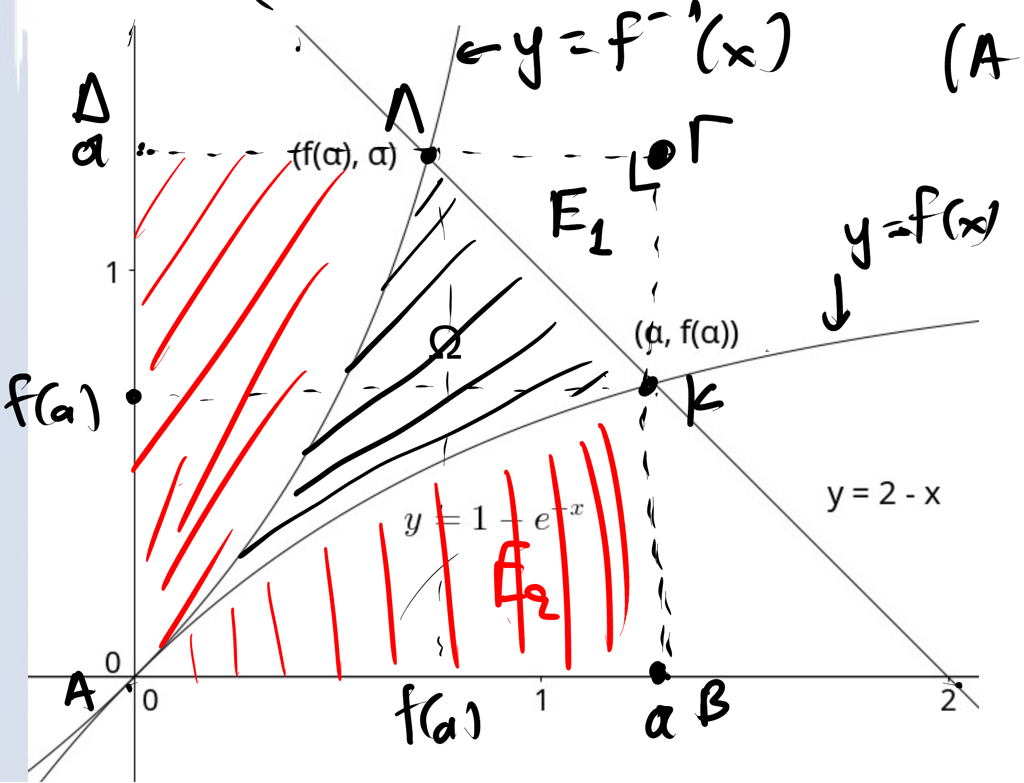
Άσκηση

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x'x, την ευθεία $y = 2x$ και την παραβολή $y = -x^2 + 6x$.



Άσκηση

Αν Ω είναι το χωρίο που περικλείεται από τη συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{-x}$, την αντίστροφή της $y = f^{-1}(x)$ και την ευθεία $y = 2 - x$, να βρείτε το Ε(Ω) ως συνάρτηση του α.



$$(ΑΒΓΔ) = α \cdot α = α^2$$

$$(ΓΚΛ) = \frac{1}{2}(α - f(α))^2$$

$$E_2 = \int_0^α (1 - e^{-x})\,dx = x - (-e^{-x}) \Big|_{x=0}^{x=α}$$

$$= α + e^{-α} - 1$$

$$Ω = (ΑΒΓΔ) - (ΓΚΛ) - 2E_2 =$$

$$\underline{\Theta} = a^2 - \frac{1}{2}\left(a - f(a)\right)^2 - 2\left(a + e^{-a} - 1\right), \text{ όπου } f(a) = 1 - e^{-a}.$$