Λογισμός Μίας Μεταβλητής

(α) Ασκήσεις στην Ολοκλήρωση
(β) Παραγοντικό – Διωνυμικοί Συντελεστές – Διώνυμο Νεύτωνα
(γ) Όριο
(δ) Γενικευμένο Ολοκλήρωμα (Improper Integral)

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0\,dx = c, \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + c$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{{}^{x^2-x+1)}A}{x+1}+\frac{{}^{x+1)}B x+\Gamma}{x^2-x+1}=\frac{(A+B)x^2+(-A+B+\Gamma)x+A+\Gamma}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -A+B+\Gamma=0 \\ A+\Gamma=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} B=-A \\ -2A+\Gamma=0 \\ A+\Gamma=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B=-\frac{1}{3} \\ \Gamma=\frac{2}{3} \\ A=\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx+\int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x + x^2}\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|\Big|_{x=0}^{x=1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$\int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \cancel{-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|\Big|_{x=0}^{x=1}} \to 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$x-\frac{1}{2}=u$

$dx=du$

$x=0 \to u=-\frac{1}{2}$

$x=1 \to u=\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u}{\sqrt{3}}\Big|_{u=-\frac{1}{2}}^{u=\frac{1}{2}} =$$

$$x^2-x+1 = x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \pi/3\sqrt{3}.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1}\, dx$$

Χρήση του wxMaxima για τον υπολογισμό.

```
f(x) := 1/(x^3 + 1);

partfrac(f(x), x);

integrate(f(x), x);
```

Σημείωση
Η integrate μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα.

Ασκήσεις

$$\int_{-1}^{1} (|x| - |x+1|)\, dx = \int_{-1}^{0} (-x-(x+1))\,dx + \int_{0}^{1} (x-(x+1))\,dx =$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} (-2x-1)\,dx + \int_{0}^{1} (-1)\,dx = -x^2 - x \Big|_{x=-1}^{x=0} + (-x)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= 0 - 1 = -1.$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & x+1 \geq 0 \text{ ή } x \geq -1 \\ -x-1, & x+1 < 0 \text{ ή } x < -1 \end{cases}$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

$$x^4+1 = \underbrace{x^4+2x^2+1}-2x^2 = (x^2+1)^2 - \underbrace{2x^2}_{(\sqrt{2}x)^2} =$$

$$= (x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+\sqrt{2}x+1} \quad \ldots$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

Χρήση του wxMaxima για τον υπολογισμό.

```
f(x) := 1/((x^2 + sqrt(2)*x + 1)*(x^2 - sqrt(2)*x + 1));

partfrac(f(x), x);

integrate(f(x), x);
```

Σημείωση
Η integrate μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα.

$$I_0 = \int_1^e \ln^0 x\, dx = \int_1^e 1\, dx = e-1$$

Ασκήσεις

(α) Να βρεθεί αναγωγικός τύπος για το ολοκλήρωμα: $I_n = \int_1^e \ln^n x\, dx$

(β) Να υπολογιστεί το $\int_1^e \ln^2 x\, dx = I_2$

$$I_n = \int_1^e \ln^n x\, dx = \int_1^e (x)' \ln^n x\, dx = x \cdot \ln^n x \Big|_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x \cdot (\ln^n x)' dx$$

$$= e - \int_1^e x \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot (\ln x)' dx = e - n \int_1^e \ln^{n-1} x\, dx = e - n \cdot I_{n-1}$$

(α) Άρα, $I_n = e - n \cdot I_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. (ή $n \in \mathbb{Z}$)

(β) $I_2 = e - 2 \cdot I_1 = e - 2(e - I_0) = e - 2(e - (e-1)) = e - 2.$

$$dx = \frac{du}{2e^{2x}} = \frac{du}{2(u-1)}$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx \quad \frac{e^x = u}{e^x dx = du} \quad \int_1^e \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{u}.$$

$$dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\frac{1}{(1+u^2)u} = \frac{Au+B}{1+u^2} + \frac{\Gamma}{u}$$

$$\frac{1}{u\cdot(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}.$$

Εναλλακτικά $e^{2x} = u-1$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx \quad \frac{1+e^{2x} = u}{2e^{2x}dx = du} \quad \int_2^{1+e^2} \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2(u-1)}$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx = \int_2^{1+e^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2(u-1)}\,du = \frac{1}{2}\int_2^{1+e^2}\frac{1}{\sqrt{u}(u-1)}\,du \; (*)$$

Θέτω $1+e^{2x}=u \Rightarrow 2e^{2x}dx = du \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2e^{2x}}du = \frac{1}{2(u-1)}du$

$(*)$ Θέτω $u = t^2 \Rightarrow du = 2t\,dt$

και $\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{t\cdot(t^2-1)}\cdot 2t\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{t^2-1}\,dt \rightsquigarrow \frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{(A-B)u + A+B}{(1-u)(1+u)} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A-B=0 \end{array}\right\} A=B=\frac{1}{2}$$

Ασκήσεις

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x} dx \xlongequal{u=\sin x} \int \frac{1}{1-u^2} du$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx \ \underset{x=\arcsin u}{\overset{u=\sin x}{=\!=}} \ \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1-u} du + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{1+u} du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-u| \Big|_{u=1/2}^{u=\sqrt{2}/2} + \frac{1}{2}\ln|1+u| \Big|_{u=1/2}^{u=\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \, dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} = -\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| + \ln|\cos 0| = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\tan x}\, dx = \int_0^{\sqrt[4]{3}} u \cdot \frac{2u}{1+u^2} du = 2\int_0 \frac{u^2}{1+u^4} du \,.$$

Θέτω $u = \sqrt{\tan x} \Longrightarrow u^2 = \tan x \Longrightarrow 2u\,du = (1+\tan^2 x)dx \Longleftrightarrow 2u\,du = (1+u^4)dx$

$$\frac{u^2}{1+u^4} = \frac{u^2}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)} = \frac{Au+B}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{\Gamma u+\Delta}{u^2+\sqrt{2}u+1} \quad \dots$$

Ασκήσεις

$$J$$

11

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx \xrightarrow[dx = -du]{x = \frac{\pi}{2} - u} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos u}{\cos u + \sin u}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\cos u + \sin u}\,du$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα, $\left.\begin{aligned} I + J &= \frac{\pi}{2} \\ I &= J \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}.$

Ασκήσεις

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^{n} x \, dx$$

Τελεστής Παραγοντικό
Διωνυμικοί Συντελεστές
Διώνυμο Νεύτωνα

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

Παραγοντικό

Ορισμός
Για κάθε n є N, ορίζουμε **n! = 1 · 2 · 3 · … · n.**
Διαβάζουμε **“n παραγοντικό”**

$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$

Άσκηση. Υπολογίστε τα:

1! = 1

2! = $1 \cdot 2 = 2$

3! = $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

4! = 24

5! = 120

$$\frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 380.$$

$$\frac{99!}{100!} = \frac{\cancel{99!}}{100 \cdot \cancel{99!}} = 0{,}01$$

$$\ln(n!) = \ln \prod_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Παραγοντικό

Ορισμός
Για κάθε n ϵ N, ορίζουμε **n! = 1 · 2 · 3 · … · n.**

Άσκηση
Αποδείξτε ότι 0! = 1.

$$n! = n \cdot (n-1)! \iff (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Για $n=1$: $0! = \frac{1!}{1} = 1.$

Διωνυμικοί Συντελεστές

Ορισμός
Για κάθε k, n є N, k < n, ορίζουμε $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (διαβάζουμε **"n ανά k"**).

Άσκηση
Υπολογίστε τα εξής:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot \cancel{4!}} = 35.$$

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{2\cdot \cancel{6!}} = 28.$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{8\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}} = 252.$$

Διωνυμικοί Συντελεστές

Ορισμός
Για κάθε k, n ϵ N, k < n, ορίζουμε $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (διαβάζουμε **"n ανά k"**).

Άσκηση
Δείξτε ότι:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = n.$$

Διωνυμικοί Συντελεστές & Το Τρίγωνο του Pascal

Έστω x_{ij}, το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης.

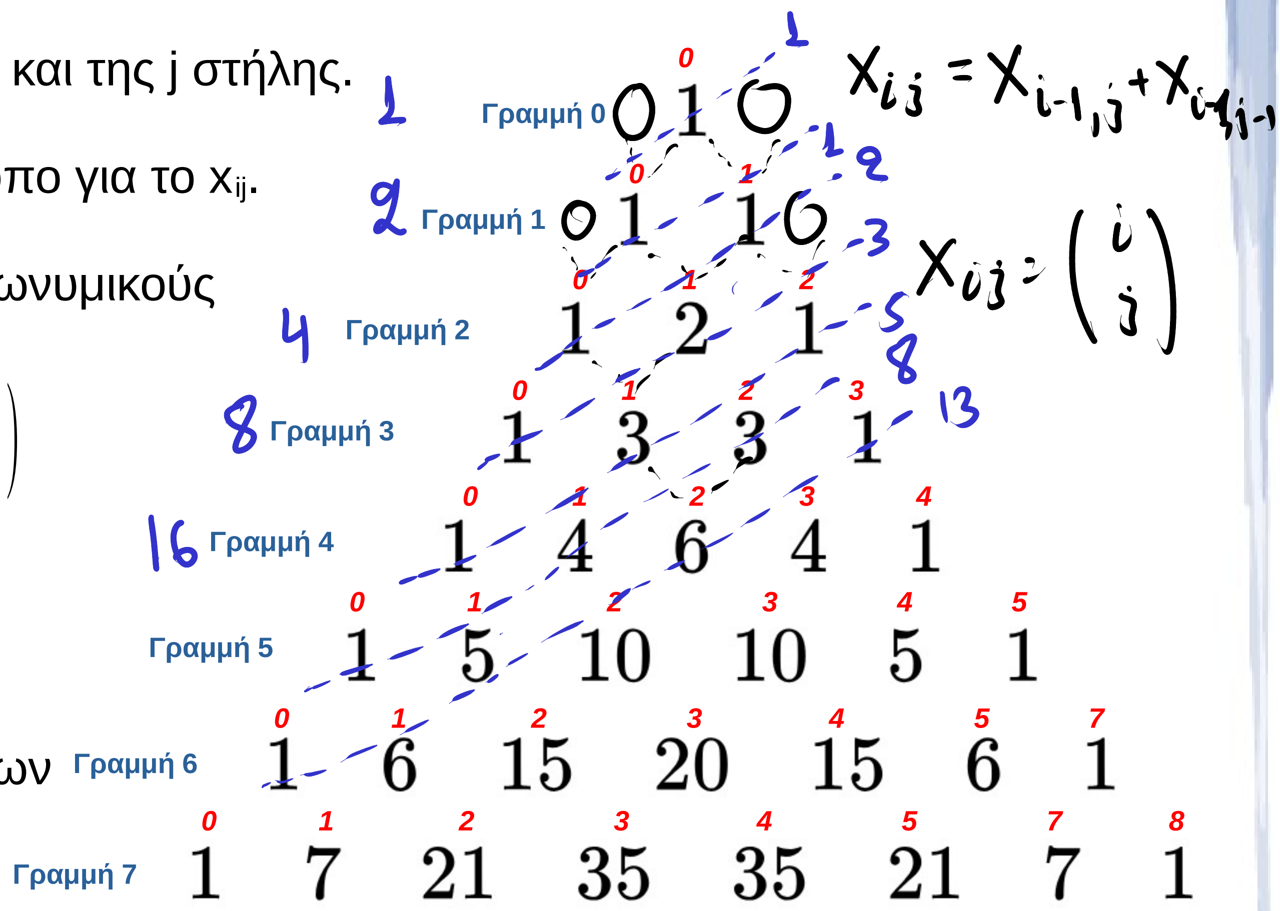
(α) Καταγράψτε τον αναδρομικό τύπο για το x_{ij}.

(β) Ποια η σχέση των x_{ij} με τους διωνυμικούς Συντελεστές;

(γ) Δείξτε ότι $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

(δ) Υπολογίστε τα αθροίσματα των διαγωνίων. Ποια ακολουθία Σχηματίζεται;

(ε) Βρείτε το άθροισμα των στοιχείων της n – οστής γραμμής.



$$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

Διώνυμο Νεύτωνα

- Για $n=1$ ισχύει
- Έστω ότι ισχύει για $n=k\in\mathbb{N}$.
- Δείχνουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.

Ορισμός

Για κάθε x, y ϵ R και n ϵ N, είναι $\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Απόδειξη: Με επαγωγή.
Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://math.stackexchange.com/a/2403222/664787

Εφαρμογή

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k \cdot y^{1-k} = \overbrace{\binom{1}{0} x^0 \cdot y^1}^{k=0} + \overbrace{\binom{1}{1} x^1 \cdot y^0}^{k=1} = y + x.$$

$$(x+y)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k \cdot y^{2-k} = \cancelto{1}{\binom{2}{0}} x^0 \cdot y^2 + \binom{2}{1} x^1 \cdot y^1 + \cancelto{1}{\binom{2}{2}} x^2 \cdot y^0 = y^2 + 2xy + x^2.$$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x y^2 + \binom{3}{2} x^2 y + \binom{3}{3} x^3 y = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} y^4 + \binom{4}{1} x y^3 + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x^3 y + \binom{4}{4} x^4 = y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4$$

$$(1-x)^4 = \binom{4}{0} (-x)^4 + \binom{4}{1} 1(-x)^3 + \binom{4}{2} (-x)^2 + \binom{4}{3} (-x)^1 + \binom{4}{4} = \underline{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$$

Άσκηση

(α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ $= \dfrac{22}{7} - \pi > 0$

(β) Να δείξετε ότι $\pi < \dfrac{22}{7}$.

$\pi < \dfrac{22}{7}$.

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$$

Όριο

Όριο

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή

"το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, να ισχύει:

$d(x, x_0) < \delta$.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$d(f(x), \ell) < \varepsilon$

Όριο

Απαραίτητη προϋπόθεση για να έχει νόημα το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι να μπορεί το x να *ταξιδέψει* ως το x_0. Ισοδύναμα, πρέπει στο πεδίο ορισμού να υπάρχει ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β)

Παραδείγματα ορίων που δεν έχουν νόημα.

- Το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 1}$ δεν έχει νόημα γιατί το πεδίο ορισμού της ρίζας είναι $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ το οποίο δεν περιέχει κάποια περιοχή του 0.
- Το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan x$ δεν έχει νόημα γιατί το πεδίο ορισμού της $f(x) = \tan x$ είναι το $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ το οποίο δεν περιέχει κάποια περιοχή του $+\infty$.

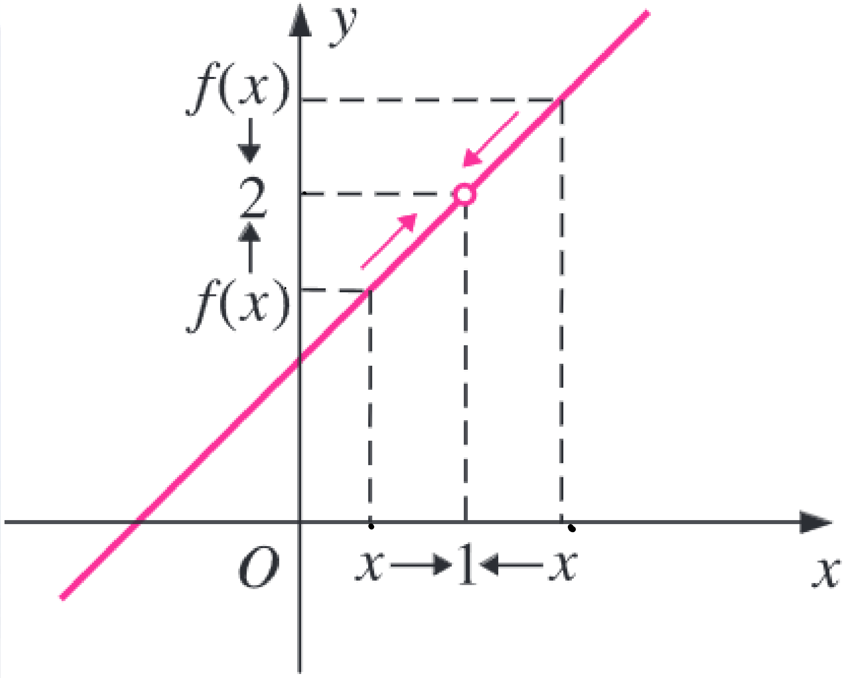
Όριο

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad A_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \neq 1, \quad f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1$$

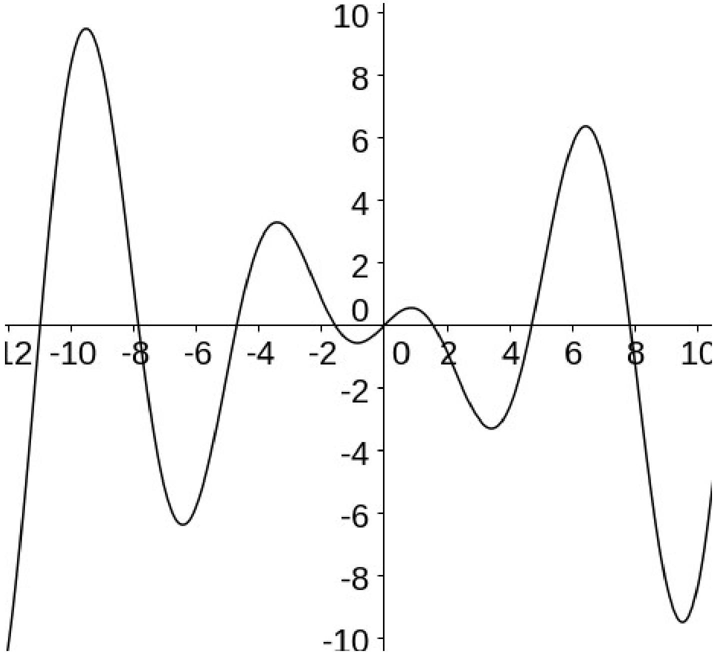
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$



Όριο

Όταν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$\lim\limits_{x \to 0} x.\cos(x)$ $= 0 \cdot \cos(0) = 0 \cdot 1 = 0.$

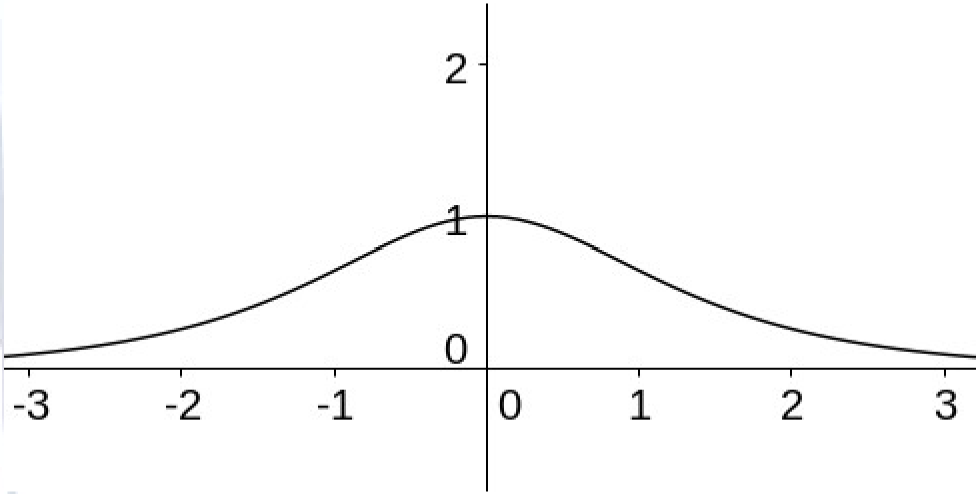


Όριο

Όταν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cosh(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cosh 0 = \frac{e^{0} + e^{-0}}{2} = 1$$

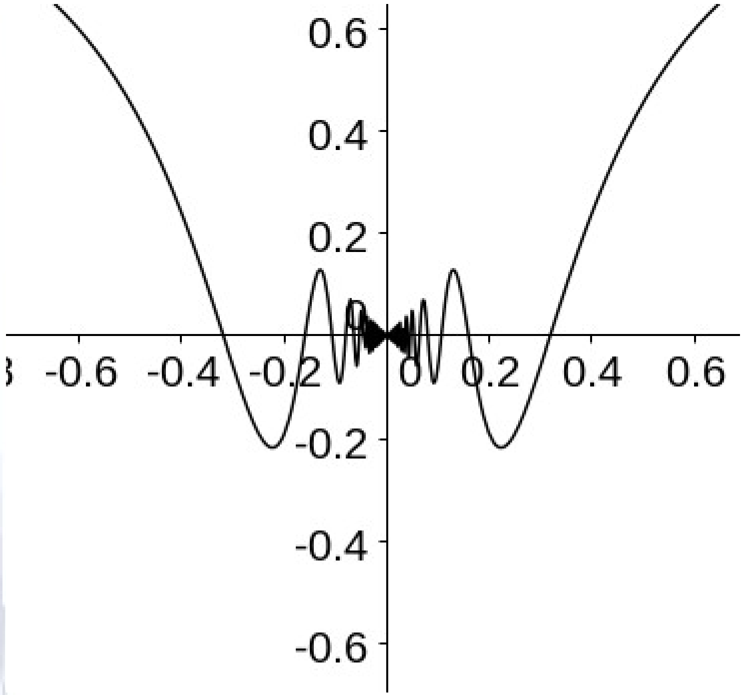


Όριο

Όριο Μηδενικής x Φραγμένης = Μηδενική

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0 .$$

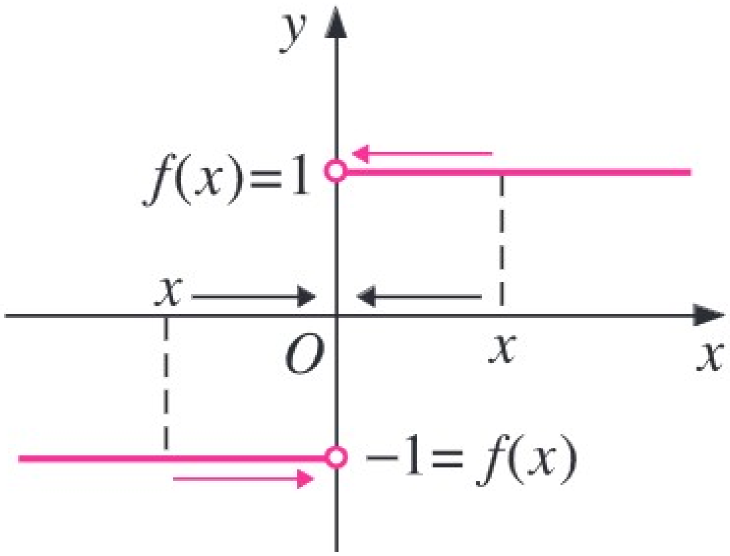
$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$$



Όριο

Όταν το όριο παίρνει διαφορετικές τιμές όταν $x \to x_0$, από διαφορετικές διαδρομές, τότε το όριο δεν υπάρχει.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

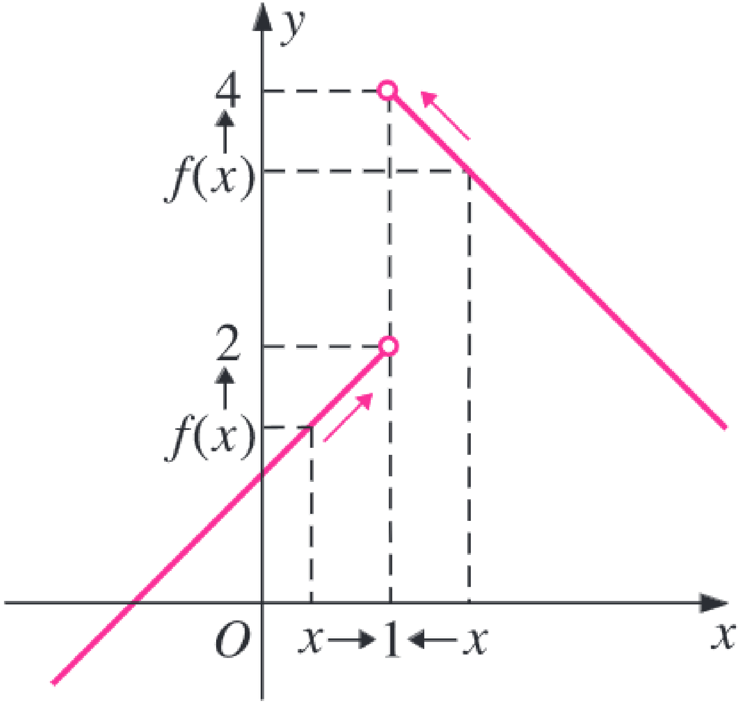


$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{-x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Όριο

Αν $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρεθούν τα $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -1+5 = 4$

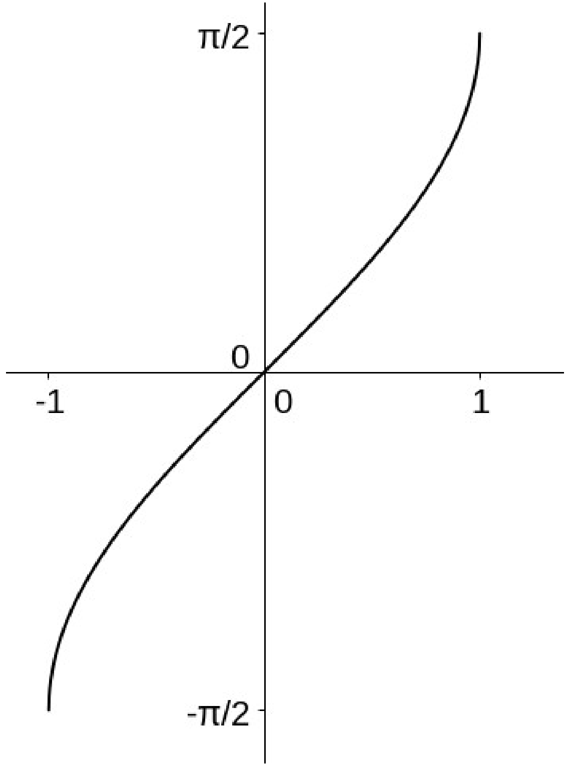
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$: ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ

$\arcsin x : [-1, 1] \rightsquigarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

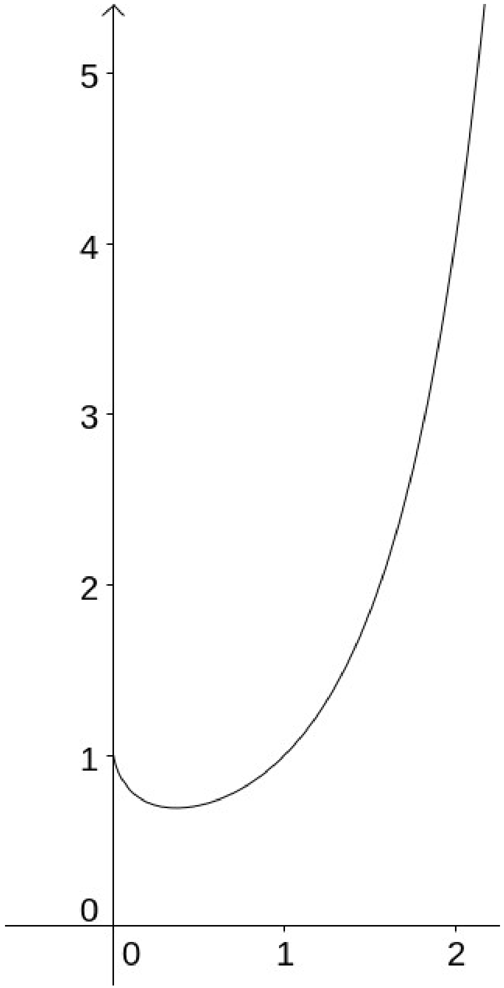
Όριο

$$\lim_{x \to 1^-} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \to -1^+} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0.$$



Όριο

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \to \frac{(-\infty)}{(+\infty)} \underset{DLH}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Άρα, $\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1.$

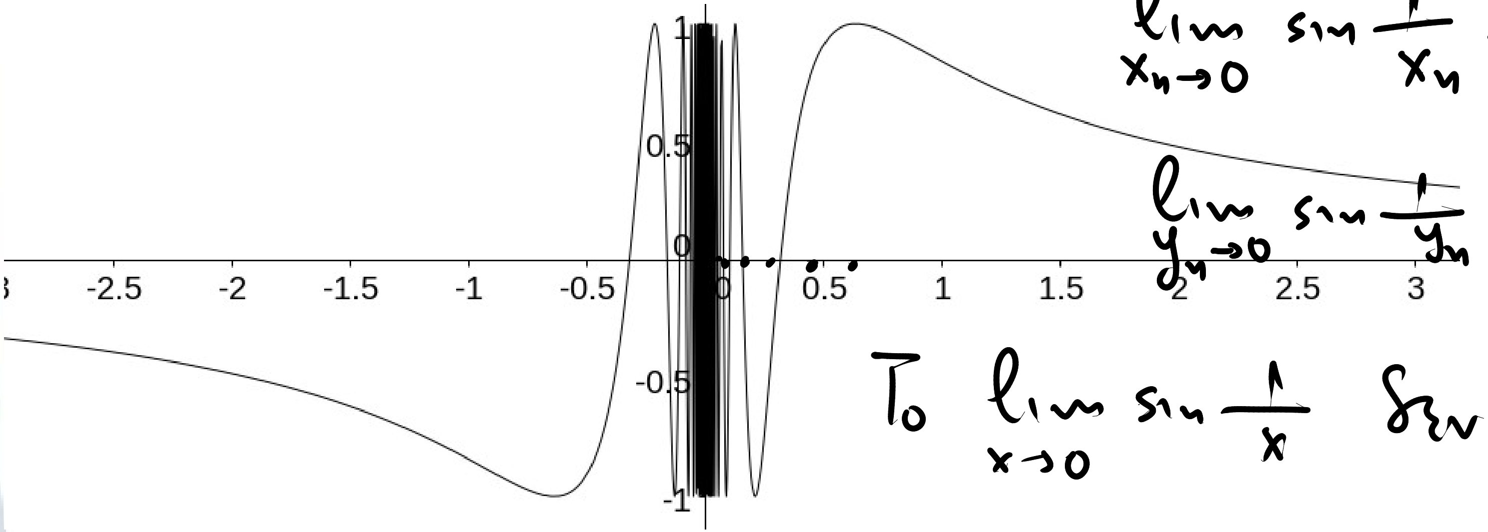
Όριο

$$\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$$

$n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad , \quad \sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{3}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad , \quad \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



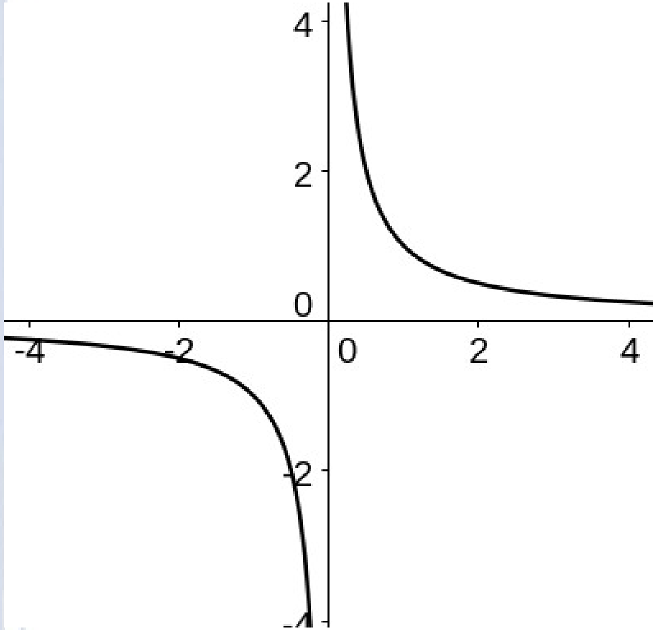
$$\lim_{x_n \to 0} \sin\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2} \; ,$$

$$\lim_{y_n \to 0} \sin\frac{1}{y_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; .$$

Το $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Άπειρο Όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$

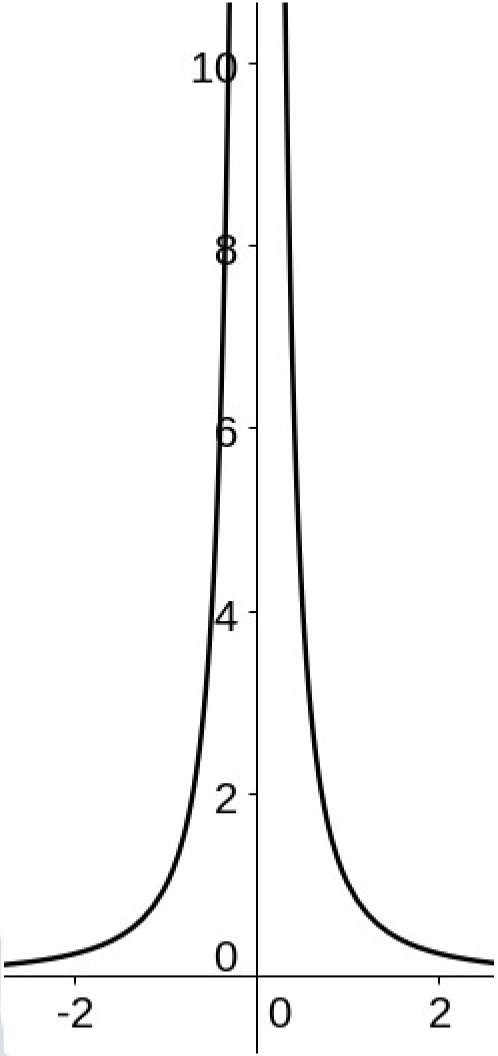


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$: Δεν υπάρχει.

Άπειρο Όριο

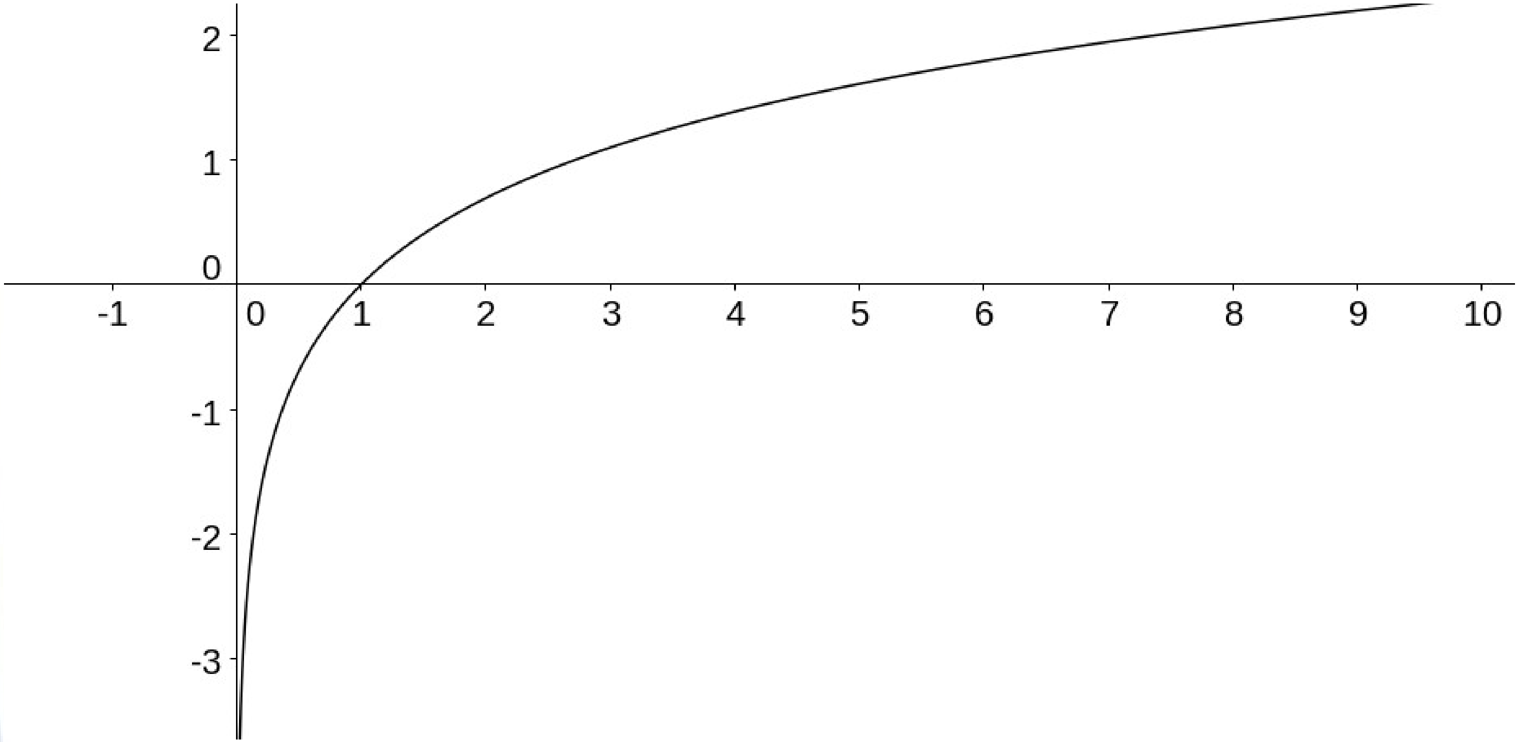


$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

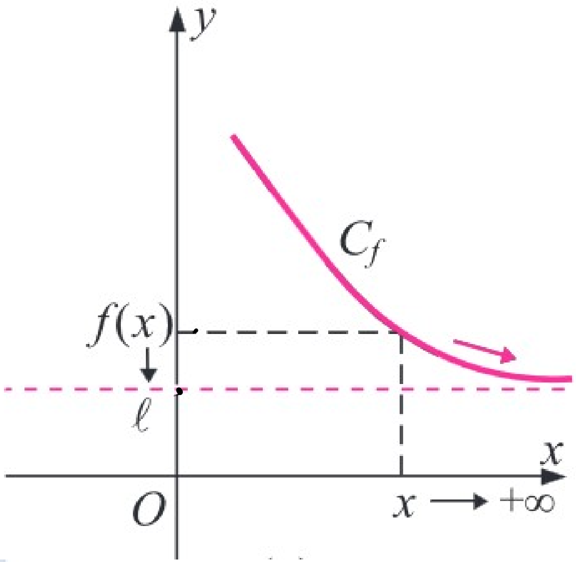
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

Άπειρο Όριο

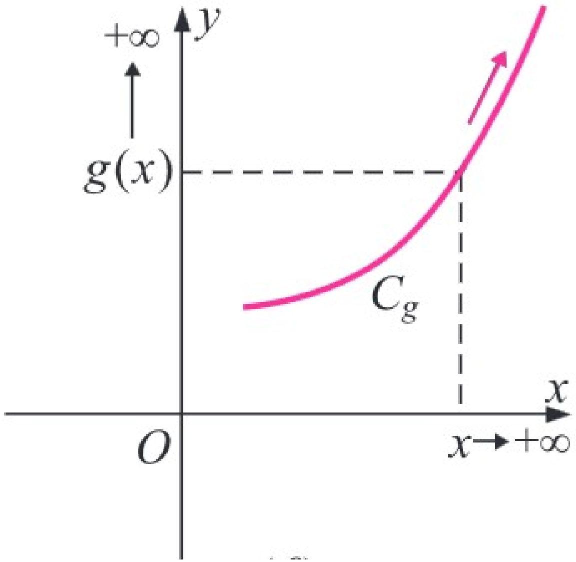
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$



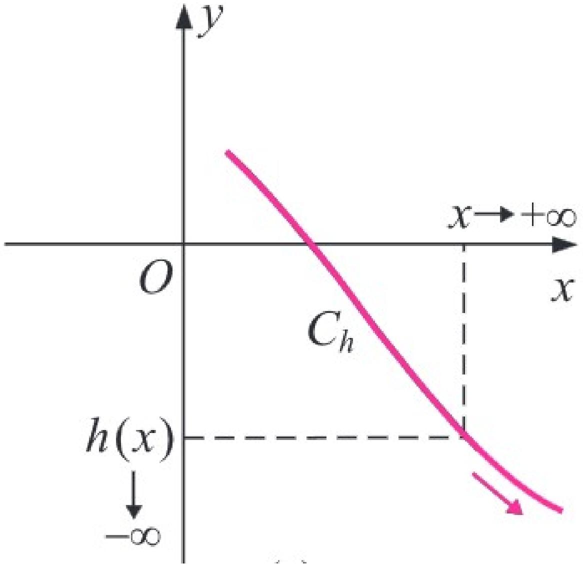
Όριο στο +∞



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



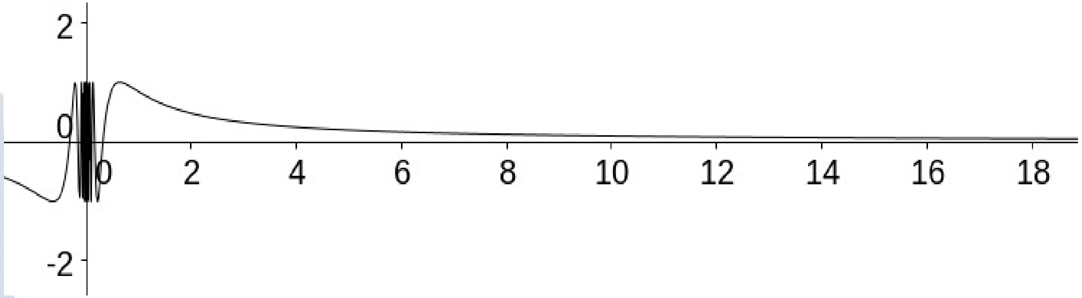
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$



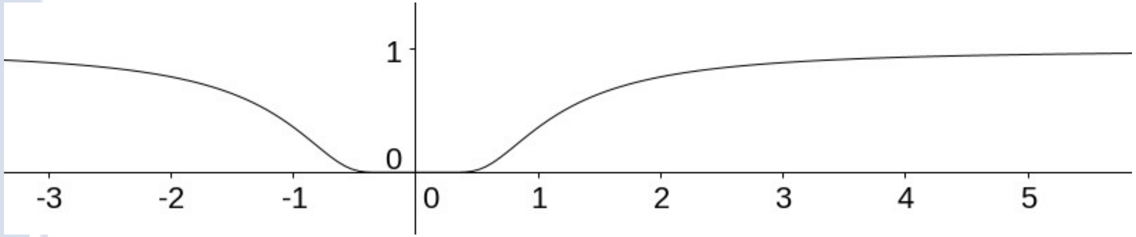
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$$

Όριο στο $+\infty$

Όταν η f είναι συνεχής στο $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to +\infty} g(x))$.



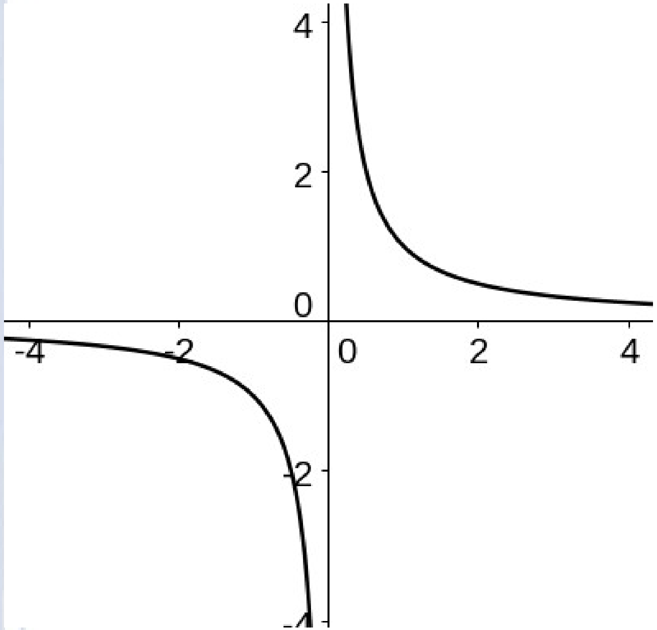
$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right) = \sin 0 = 0.$$



$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^2}} = e^{0} = 1.$$

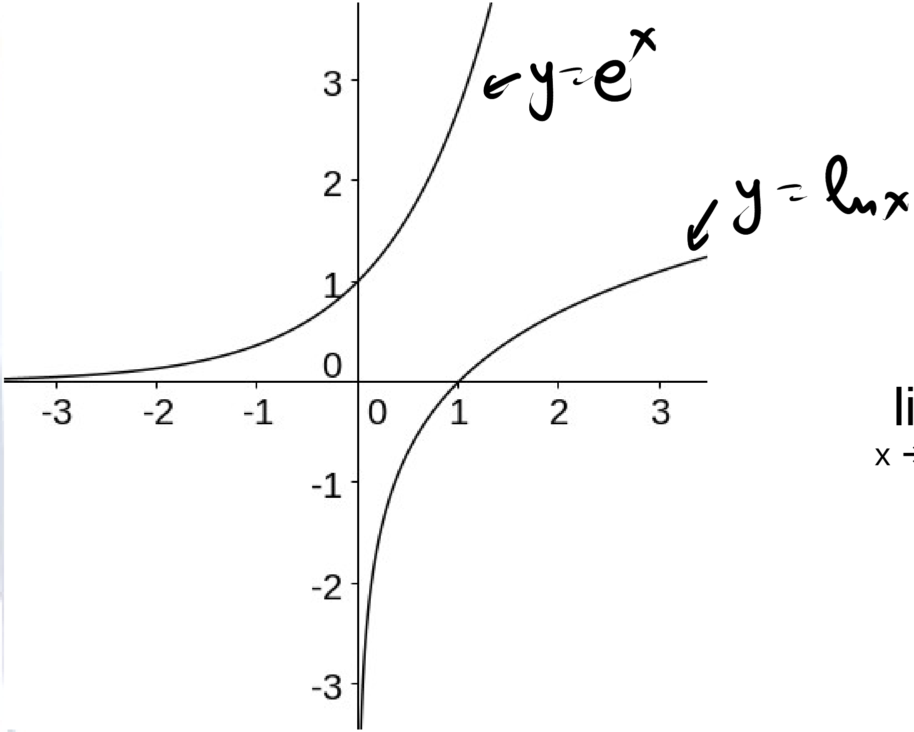
Όριο στο +∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



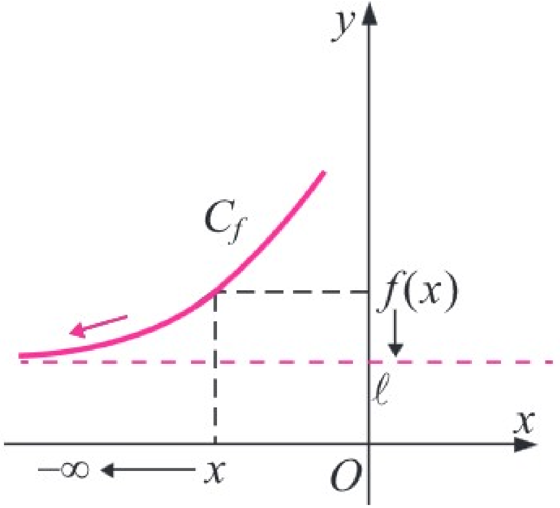
Όριο στο $+\infty$

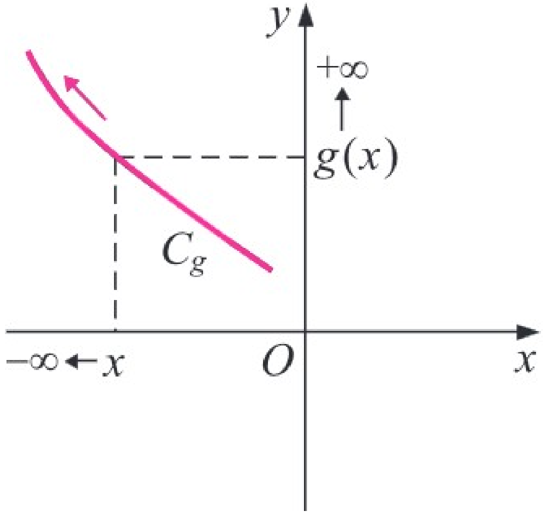
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

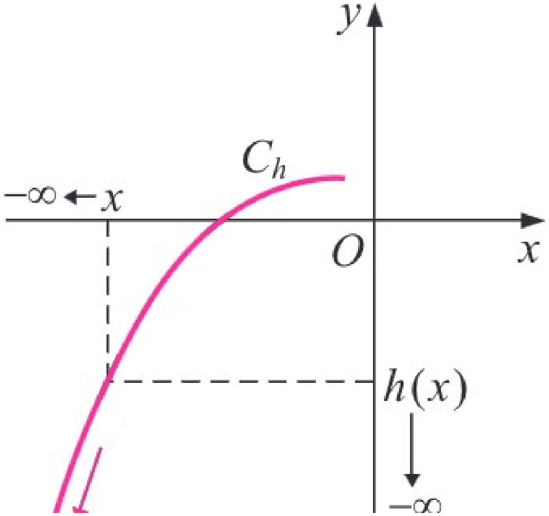


$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Όριο στο -∞







$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \left(e^x + 1\right) = 0 + 1$

Όριο στο ±∞

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

$\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{-3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3} \begin{cases} \xrightarrow{x\to 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x\to 0^-} -\infty \end{cases}$ ΔΕΝ ΥΠ.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-3} = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^{-3} = 0$

Όριο στο $\pm\infty$

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \text{ και } \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(4x^5+x^2-30x+2) = \lim_{x\to+\infty}(4x^5) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5+x^2-30x+2) = \lim_{x\to-\infty}(4x^5) = -\infty$$

Όριο στο $\pm\infty$

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq 0, \beta_\kappa\neq 0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-30x+2}{3x^4-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5}{3x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-30x+2}{3x^5-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5}{3x^5}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-30x+2}{3x^6-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5}{3x^6}=\frac{4}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Κανόνας De l' Hospital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

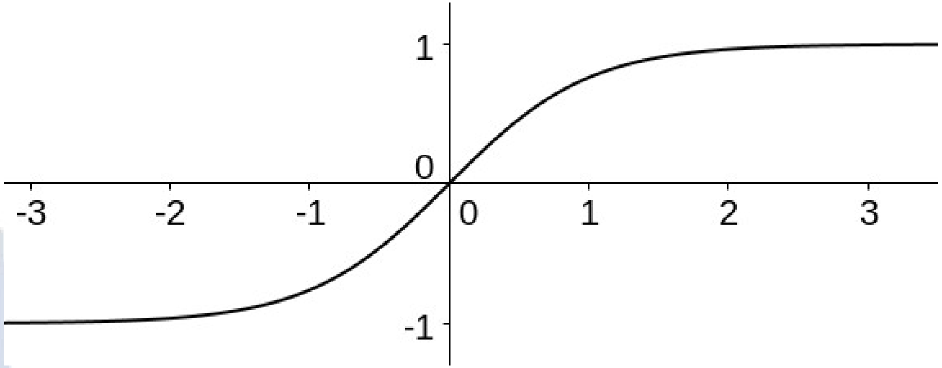
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x + x^2} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x + 2x} \underset{DLH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x + 2} \underset{DLH}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

Κανόνας De l’ Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-2e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Κανόνας De l’ Hospital



$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Όριο Ακολουθίας Αριθμών (μόνο στο +∞)

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbf{R}$.

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n \to +\infty} n^{-3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(4n^5 + n^2 - 30n + 2\right) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{ορισμός})$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4n^5 - 30n + 2}{3n^4 - 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4n^5}{3n^4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{3} n = +\infty.$$

Αλλαγή Μεταβλητής στο Όριο

Έστω α, β, γ ϵ R U {±∞}. Τότε ισχύει

$$\lim_{x \to \alpha} f(g(x)) = \lim_{g(x) \to \beta} f(g(x)) = \lim_{y \to \beta} f(y), \text{ όπου } \beta = \lim_{x \to \alpha} g(x)$$

με τις εξής προϋποθέσεις:

(α) Να υπάρχει το $\lim_{y \to \beta} f(y) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(β) Μία από τις παρακάτω συνθήκες να τηρείται:

(i) β, γ ϵ R και η f είναι συνεχής στο β.

(ii) β ϵ R και g(x) ≠ β σε μία περιοχή του α.

(iii) β = -∞ ή β = +∞.

Πηγή: Protter, M. H., Morrey, C. B. J. (2012). A First Course in Real Analysis. Suiça: Springer New York.

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: Pedro (https://math.stackexchange.com/users/70305/pedro), Change of Variables in Limits (Part 1), URL (version: 2023-05-04): https://math.stackexchange.com/q/4692315

Όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \underset{\lim\limits_{x\to 0} y = 0}{\overset{y=x^2}{=\!=}} \lim_{y\to 0^+} \frac{1-e^{-y}}{y} \overset{DLH}{=\!=} \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{-y}}{1} = 1.$$

Όριο

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}$$

Όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} \xRightarrow{x+8=u^3} \lim_{u \to 2} \frac{u-2}{u^3-8} \xRightarrow{DLH} \lim_{u \to 2} \frac{1}{3u^2} = \frac{1}{12}.$$

$$x+8 = u^3$$

$$u = \sqrt[3]{x+8}$$

$$\lim_{x \to 0} u = 2$$

Όριο

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \overset{m=2n}{=\!=} \sqrt{\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}} = \sqrt{e}$$

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Συνηθισμένα Όρια που Δεν Υπάρχουν: $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει.

Ο λόγος είναι πως παίρνει διαφορετική τιμή καθώς το x πλησιάζει το 0 από αριστερά και από δεξιά.

Πιο συγκεκριμένα $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$

Συνηθισμένα Όρια που Δεν Υπάρχουν: $\lim_{x \to +\infty} \sin x$

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Επιλέγουμε τις ακολουθίες $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{N}$. Είναι $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$,

άρα οι $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει το x το $+\infty$.

Αν το όριο υπήρχε τότε θα έπρεπε να είναι $\lim_{x_n \to +\infty} \sin x_n = \lim_{y_n \to +\infty} \sin y_n$

Όμως, $\lim_{x_n \to +\infty} \sin x_n = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\lim_{y_n \to +\infty} \sin y_n = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Άρα, το $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ δεν υπάρχει.

Συνηθισμένα Όρια που Δεν Υπάρχουν

Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Αντίστοιχα, μπορεί να δειχθεί ότι

- το $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ δεν υπάρχει.
- το $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Συνηθισμένα Όρια που Δεν Υπάρχουν

Δείξτε ότι το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ δεν υπάρχει.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Ένα διάστημα Δ λέγεται **φραγμένο** αν $\exists a \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η απόσταση δύο οποιονδήποτε σημείων του να είναι μικρότερη του α,

$$d(M_1, M_2) \le a, \quad \forall M_1, M_2 \in \Delta.$$

Παραδείγματα

Φραγμένα διαστήματα:	(0, 10],	[-3, 3],	(-100, -1)
Μη Φραγμένα διαστήματα:	(-∞, 3],	(-∞, +∞),	(-1, +∞)

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Μία συνάρτηση f λέγεται **φραγμένη** σε ένα διάστημα Δ του $\mathbb{R}$ αν δεν απειρίζεται στο Δ, δηλαδή αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

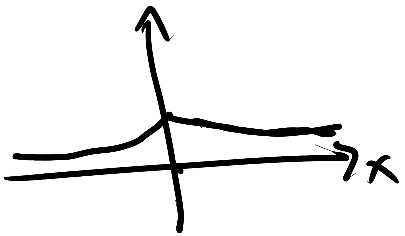
$$-M \leq f(x) \leq M$$

Παραδείγματα

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ φραγμένη στο (1, 3) αλλά μη φραγμένη στο (0, 3).

f(x) = x, φραγμένη στο (-5, 10] αλλά μη φραγμένη στο (-5, +∞).

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$



f(x) = $e^{-|x|}$ φραγμένη στο R.

f(x) = e^x, lnx, x^2, μη φραγμένες στο R.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός **Γενικευμένο ολοκλήρωμα** είναι ένα ολοκλήρωμα στο οποίο είτε το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι φραγμένο, είτε η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Υπάρχουν τα εξής είδη γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

- Φραγμένης συνάρτησης σε μη φραγμένο διάστημα
- Μη φραγμένης συνάρτησης σε φραγμένο διάστημα
- Μη φραγμένης συνάρτησης σε μη φραγμένο διάστημα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Αν για μία συνεχή στο $[a,+\infty)$ συνάρτηση f υπάρχει το $\lim_{m\to+\infty}\int_a^m f(x)dx$, τότε ονομάζουμε την τιμή του **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a,+\infty)$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{m\to+\infty}\int_a^m f(x)dx.$$

Αντίστοιχα, για μία συνεχή στο $(-\infty,a]$ συνάρτηση f ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{m\to-\infty}\int_m^a f(x)dx,$$

$\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_0^m \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \arctan x \Big|_{x=0}^{x=m}$$

$$= \lim_{m\to+\infty} [\arctan m - \arctan 0]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη: Για κάποιο β > 0, ορίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα [0, β], θυμηθείτε ότι (arctan x)’ = $1/(1+x^2)$ και πάρτε το όριο καθώς β → +∞.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_0^m e^{-x}\,dx = \lim_{m\to+\infty} -e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=m}$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left[-\overset{\to 0}{e^{-m}} + \overset{1}{e^{0}}\right] = (0+1) = 1.$$

Υπόδειξη: Για κάποιο β > 0, υπολογίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα [0, β], και πάρτε το όριο καθώς β → +∞.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{m \to -\infty} \int_{m}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{m \to -\infty} \ln|x| \Big|_{x=m}^{x=-1} =$$

$$= \lim_{m \to -\infty} \left[\ln|-1| - \ln|m| \right] = (0 - \infty) = -\infty.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{m\to+\infty}\int_0^m e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{m\to+\infty}\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{x=0}^{x=m} \circledast$$

$$I=\int e^{-x}\cos x\,dx = -\int (e^{-x})'\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx =$$

$$= -e^{-x}\cos x + \int (e^{-x})'\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \underbrace{\int e^{-x}\cos x\,dx}_{I}$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^{-x}(\sin x-\cos x) \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)$$

$$\circledast = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-m}(\sin m-\cos m)+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_1^m \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2}\ln^2 m = +\infty.$$

$$\int_1^m \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^m \ln x \cdot (\ln x)'\,dx = \int_1^m \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]'dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{x=1}^{x=m}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln^2 m - \ln^2 1\right] = \frac{1}{2}\ln^2 m.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν ~~υπάρχει~~ συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{m\to+\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^m = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx > \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\,dx = +\infty.$$

$\Rightarrow$ Αποκλίνει

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$$

$$x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

$$y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

$$\cos x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos y_n = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{m\to+\infty} \int_0^m \sin x \, dx = \lim_{m\to+\infty} \left[-\cos x\right]_{x=0}^{x=m}$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \left[-\cos m + \cos 0\right] : \text{Δεν υπάρχει!}$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x^n (e^{-x})' dx =$$

$$= -x^n e^{-x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} (x^n)' \cdot e^{-x} dx$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot e^{-x} + 0^n \cdot e^{-0} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n \cdot \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n) = n \cdot \Gamma(n-1)$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = n \cdot \Gamma(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-2) = \cdots = n!$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Για μία συνεχή στο (-∞, +∞) συνάρτηση f, ορίζουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Αν τα επιμέρους ολοκληρώματα υπάρχουν για κάθε α ϵ R, τότε λέμε ότι και το διπλά άπειρο ολοκλήρωμα υπάρχει.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx = -\infty + \infty : \text{Δεν υπάρχει.}$$

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x\to-\infty}^{x=0} = \frac{0^2}{2} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2} = -\infty$$

$$\int_{0}^{+\infty} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = +\infty$$

Σημείωση: Προσέξτε ότι για πεπερασμένο α > 0, το $\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,dx$ υπάρχει και είναι ίσο με 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} x\,dx = \lim_{m\to+\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-m}^{m}$$

Λάθος Τρόπος Υπολογισμού!!

$$= \lim_{m\to+\infty} \left[\frac{m^2}{2} - \frac{(-m)^2}{2}\right] = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0.$$

Κύρια τιμή κατά Cauchy.

Δεν είναι ο κανονικός ορισμός του $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

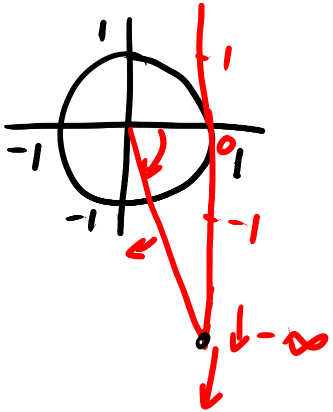
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha} x e^{-x^2}\,dx + \int_{\alpha}^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_{x\to-\infty}^{x=\alpha} - \frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_{x=\alpha}^{x\to+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\alpha^2} + \frac{1}{2} \overbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2}}^{\to 0} - \frac{1}{2} \overbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}}^{\to 0} + \frac{1}{2} e^{-\alpha^2} = 0.$$

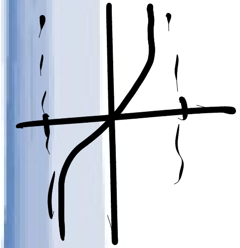
$$\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (-x^2)' e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \left(e^{-x^2}\right)' dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

$\arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{x^2+25}\,dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^2+25}\,dx$$



$$= \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}\Big|_{x\to-\infty}^{x=a} + \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}\Big|_{x=a}^{x\to+\infty}$$

$$= \cancel{\frac{1}{5}\arctan\frac{a}{5}} - \frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x}{5} + \frac{1}{5}\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{5} - \cancel{\frac{1}{5}\arctan\frac{a}{5}}$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5}.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Αν για μία συνεχή στο $[a, \beta)$ συνάρτηση f υπάρχει το $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$, τότε ονομάζουμε την τιμή του **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a, \beta)$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x)dx.$$

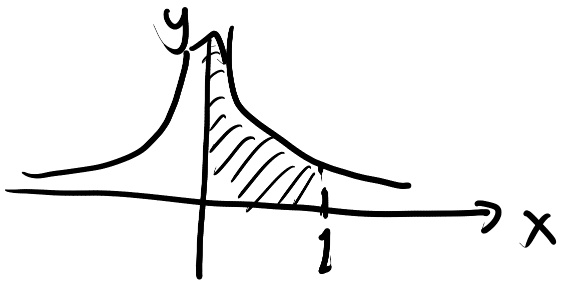
Αντίστοιχα, για μία συνεχή στο $(a, \beta]$ συνάρτηση f ορίζουμε

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty .$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon} = -1 + \frac{1}{\varepsilon}$$



Υπόδειξη: Για κάποιο $\varepsilon > 0$, ορίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[\varepsilon, 1]$ και πάρτε το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1^-}\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1^-}\left[-2\left(\sqrt{1-\varepsilon}-1\right)\right] = 2.$$

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -\int_0^{\varepsilon}\frac{(1-x)'}{\sqrt{1-x}}dx \overset{u=1-x}{=\!=} -\int_1^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{u}}du =$$

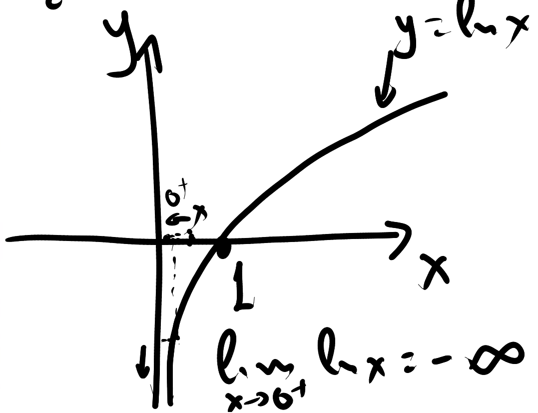
$$= -\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^{1-\varepsilon} = -2\left[\sqrt{u}\right]_1^{1-\varepsilon} = -2\left(\sqrt{1-\varepsilon}-1\right).$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\ln^2\varepsilon\right] = -\infty$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_\varepsilon^1 \ln x\,(\ln x)'\,dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \frac{1}{2}\left[\ln^2 1 - \ln^2\varepsilon\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\ln^2\varepsilon$$



Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \lim_{\delta \to 1^+} \int_\delta^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \lim_{\delta \to 1^+} \left[2\left(1-\sqrt{\ln \delta}\right) \right] = 2.$$

$$\int_\delta^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx = \int_\delta^e \frac{(\ln x)'}{\sqrt{\ln x}}\,dx \xRightarrow{u=\ln x} \int_{\ln \delta}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$= \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_{u=\ln\delta}^{u=1} = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\ln \delta}\right]$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \lim_{m\to +\infty}\int_1^m \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1} + \lim_{m\to +\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_{x=1}^{x=m}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) + \lim_{m\to +\infty}\left(2\sqrt{m} - 2\right)$$

$$= 2 + \infty = +\infty .$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx + \lim_{m\to+\infty} \int_1^m \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx \; (*)$$

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx \;\overset{t=\sqrt{x}}{\underset{\substack{x=t^2 \\ dx=2t\,dt}}{=\!=\!=}}\; \int \frac{1}{(1+t^2)\cdot \cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt = 2\arctan t + c$$

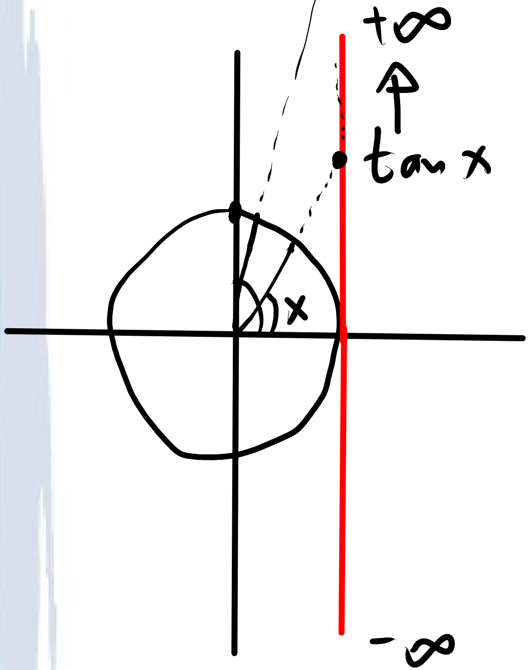
$$= 2\arctan\sqrt{x} + c$$

$$(*) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_{x=\varepsilon}^{x=1} + \lim_{m\to+\infty}\Big[2\arctan\sqrt{x}\Big]_{x=1}^{x=m} =$$

Υπόδειξη: Διαχωρίστε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη [0, 1] και [1, +∞). Στο πρώτο απομονώστε την ανωμαλία θεωρώντας ε > 0 και ορίστε το ολοκλήρωμα στο διάστημα [ε, 0]. Στο δεύτερο θεωρείστε β > 1 και ορίστε το ολοκλήρωμα στο [1, β]. Μετά πάρτε τα όρια καθώς ε → 0 και β → ∞.

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\arctan\sqrt{1} - 2\arctan\sqrt{\varepsilon}\right) + \lim_{n\to+\infty}\left(2\arctan\sqrt{n} - 2\arctan\sqrt{1}\right)$$

$$= \cancel{2\cdot\frac{\pi}{4}} - 2\cdot 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} - \cancel{2\cdot\frac{\pi}{4}} = \pi .$$

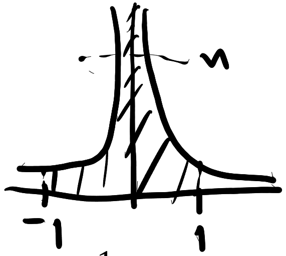


$$\lim_{n\to+\infty} \arctan\sqrt{n}$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Αν για μία συνεχή στο $[a,\gamma)\cup(\gamma,\beta]$ συνάρτηση f υπάρχει το $\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{\gamma-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\gamma+\varepsilon_2}^{\beta} f(x)dx$, τότε ονομάζουμε την τιμή του **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της f στο $[a,\beta]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{\gamma-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\gamma+\varepsilon_2}^{\beta} f(x)dx.$$



Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\zeta \to 0^+} \int_{\zeta}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \quad (*)$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

$$(*) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=\varepsilon} + \lim_{\zeta \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=\zeta}^{x=1} = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \left(-\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\zeta \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\zeta}\right)$$

$$= +\infty + \infty = +\infty$$

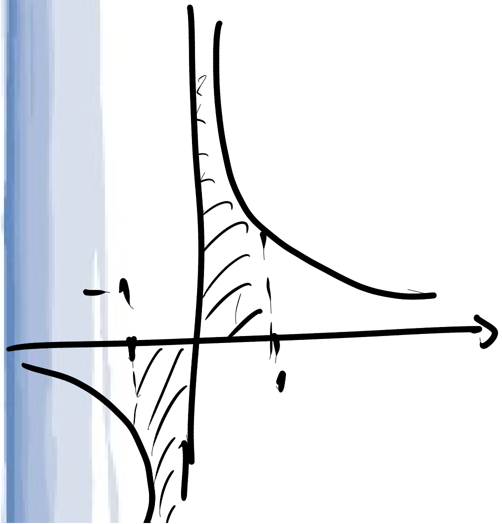
Υπόδειξη: Η συνάρτηση δεν ορίζεται στο 0 και [-1, 1] = [-1, 0) U (0, 1].

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\zeta \to 0^+} \int_{\zeta}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^-} \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\zeta \to 0^+} \Big[\ln|x|\Big]_{\zeta}^{1}$$

$$= \underbrace{\ln|\varepsilon| - \ln 1}_{\varepsilon \to 0^-} + \underbrace{\ln|1| - \ln|\zeta|}_{\zeta \to 0^+} = \text{ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ}$$

$$-\infty \qquad + \infty$$



$$\int \frac{1}{(x-3)^2}dx \;\underset{du=dx}{\overset{u=x-3}{=}}\; \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}+c = -\frac{1}{x-3}+c.$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2}dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_2^{3-\varepsilon} \frac{1}{(x-3)^2}dx + \lim_{\sigma\to 0^+}\int_{3+\sigma}^{4} \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Θεώρημα</u> Αν $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, \beta)$, $(\beta \in \mathbb{R}$ ή $\beta = +\infty)$, τότε:

- Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta g(x)dx$ *συγκλίνει*,

  τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ *συγκλίνει*.

- Αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ *δεν συγκλίνει*,

  τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta g(x)dx$ *δεν συγκλίνει*.

Αντίστοιχη πρόταση ισχύει αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $(a, \beta]$, $(a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty)$.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν συγκλίνουν τα

$$\int_{1}^{+\infty} xe^{x}\,dx \geq \int_{1}^{+\infty} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty.$$

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}\ln x}\,dx \leq \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x^{2}}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=e}^{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} < +\infty$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

<u>Θεώρημα</u> Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,\beta)$, ($\beta \in \mathbb{R}$ ή $\beta = +\infty$).
Τότε, αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta |f(x)|dx$ συγκλίνει,
τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ συγκλίνει.

$$\left|\int_a^\beta f(x)dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$$

$|\sin x| \leq 1$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν συγκλίνουν τα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

. Είναι $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$.

Άρα $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ συγκλίνει $(< +\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt[5]{x}}\,dx$$

$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[5]{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$. Είναι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx < +\infty$,

άρα $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[5]{x}} dx < +\infty$.

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

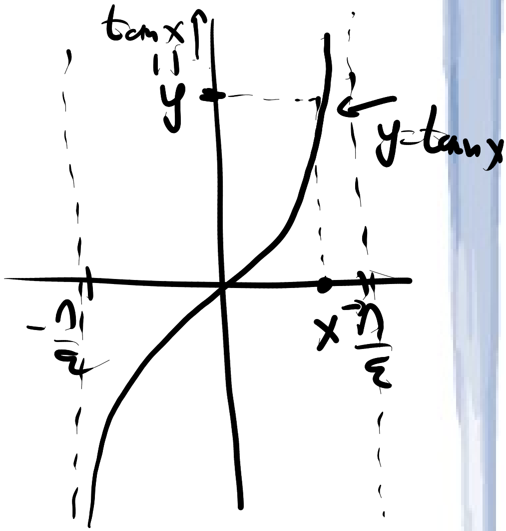
$$= \left[\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right]_{x=1}^{x\to+\infty} = \left[-2\frac{1}{\sqrt{x}} \right]_{x=1}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+2\right) = 2 < +\infty.$$

Υπόδειξη: Συγκρίνετε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση με την $1/(x^3)^{½}$.

Άρα, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx < +\infty$.

$\arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα



Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx$$

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{1+x^2} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}\, dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \left[\arctan x\right]_{x=1}^{x \to +\infty} = \lim_{x \to +\infty} \left[\arctan x - \arctan 1\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < +\infty. \text{ Άρα, } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx < +\infty.$$

$$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5} = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^4} \qquad \left[\frac{1}{x^4}\right]_1^{+\infty} = \lim \frac{1}{x^4} \to 0 - 1$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\left(1+x^2\right)}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx < +\infty .$$

$$\left[\frac{1}{x^3(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x^3} + \frac{\Delta x + E}{1+x^2}\right]$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3\cdot(1+x^2)}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_{x=1}^{x\to+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} < +\infty \text{ Άρα συγκλίνει.}$$

Γενικευμένο Ολοκλήρωμα

Βρείτε αν υπάρχει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^x + x^2}\, dx$$