Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Εμβαδόν χωρίου

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Θεμελιώδη Θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Περιεχόμενα

1. Εμβαδόν χωρίου Ω.

2. Ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ όπου f συνεχής στο [α, β].

3. Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [\alpha, \beta]$

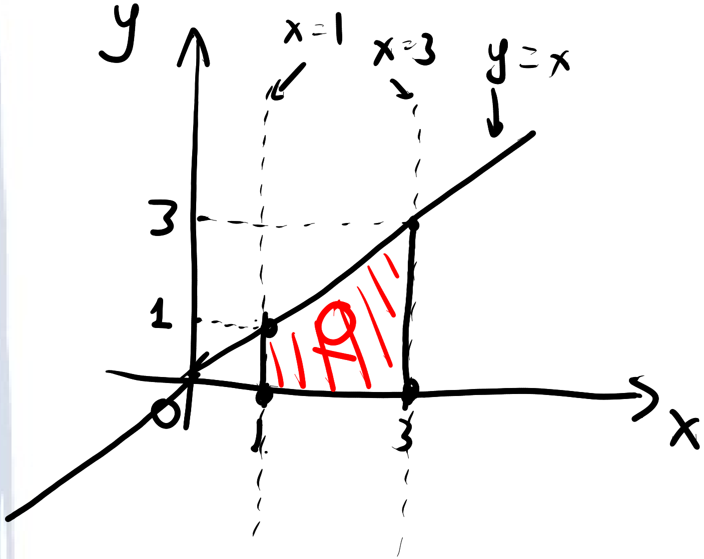
4. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει F’(x) = f(x).

5. Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού $\left(\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx\right)' = f(x)$

6. Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Εμβαδόν χωρίου

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την y = f(x), τον άξονα x’x και τις ευθείες x = 1 και x = 3.



$$E = \frac{1+3}{2} \cdot 2 = 4 \text{ τ.μ.}$$

Εμβαδόν χωρίου (άθροισμα Riemann)

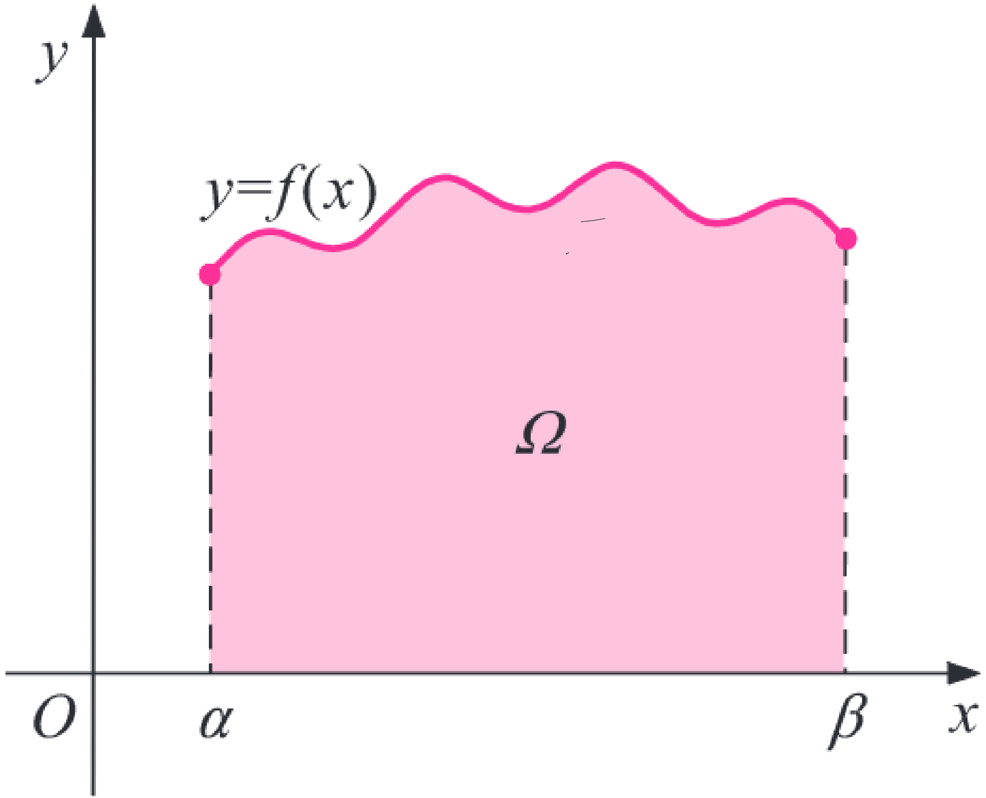
Έστω μία συνάρτηση f, συνεχής στο [α, β] και μη αρνητική ($f(x) \geq 0$) για κάθε x є [α, β]

Αναζητούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται:

α) Από τη γραφική παράσταση της f.

β) Τον άξονα των x

γ) Τις ευθείες x = α και x = β.



Χωρίζουμε το [α, β] σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = (\beta - \alpha)/n$.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta.$$

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

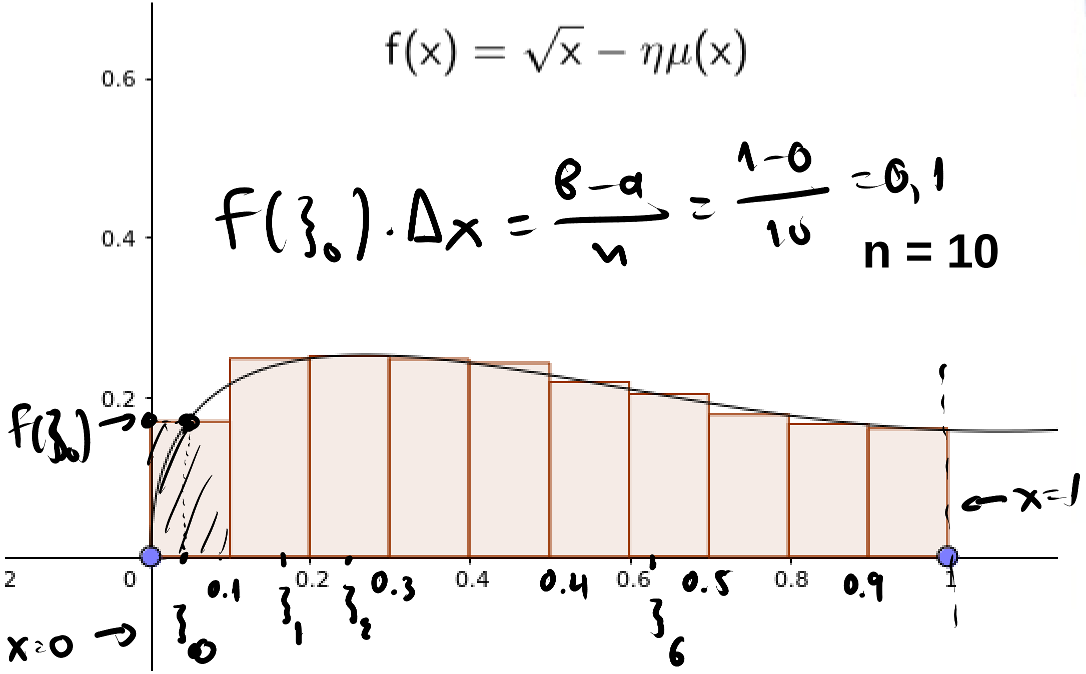
Έστω, $\mathbf{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\Delta x$

Το $\mathbf{S_n}$ είναι μία εκτίμηση του Ε(Ω).

Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι
- συνεχής στο [α, β],
- φραγμένη στο [α, β],

τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{S_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\Delta x$$



Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω.**

Άθροισμα Riemann

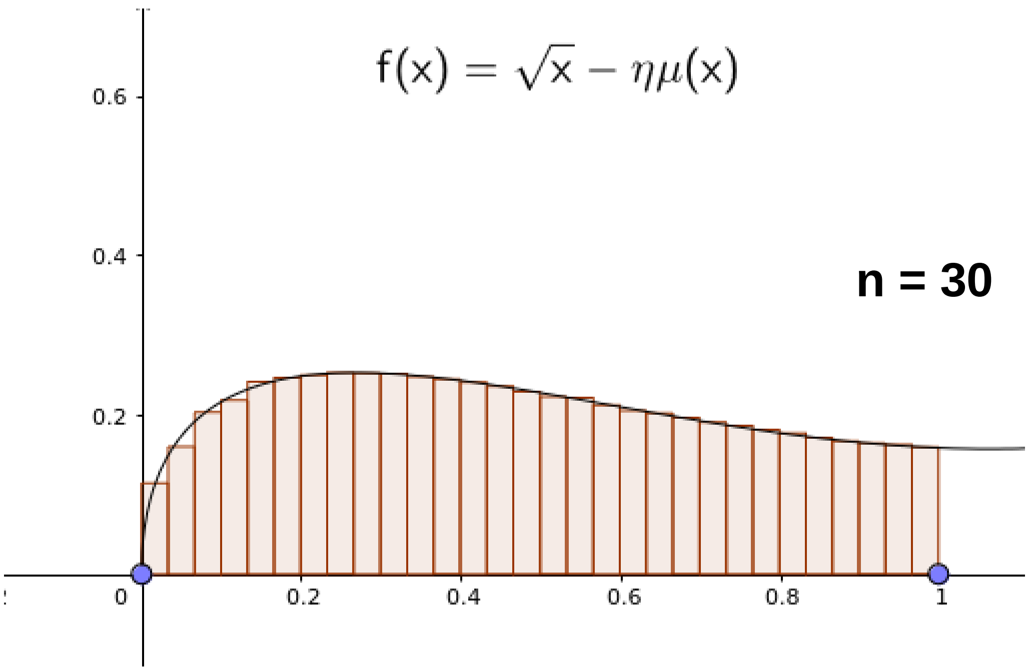
Χωρίζουμε το [α, β] σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους Δx = (β – α)/n.

$$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta.$$

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, k = 1, 2, …, n-1, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

Έστω, $\mathbf{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\mathbf{\Delta x}$

Το $\mathbf{S_n}$ είναι μία εκτίμηση του Ε(Ω).



n = 30

Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι
- συνεχής στο [α, β],
- φραγμένη στο [α, β],

τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{S_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\mathbf{\Delta x}$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω.**

Χωρίζουμε το [α, β] σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους Δx = (β – α)/n.

$\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta$.

Επιλέγουμε τυχαία ένα $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, k = 1, 2, …, n-1, και σχηματίζουμε το ορθογώνιο με βάση Δx και ύψος $f(\xi_k)$.

Έστω, $\mathbf{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\Delta x$

Το $\mathbf{S_n}$ είναι μία εκτίμηση του Ε(Ω).

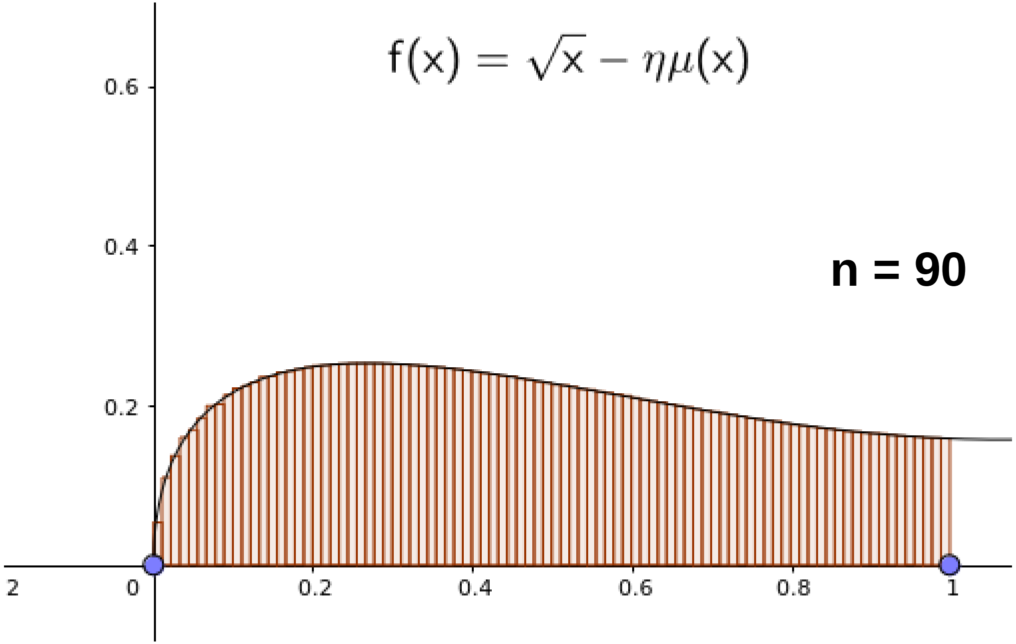
Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι

- συνεχής στο [α, β],
- φραγμένη στο [α, β],

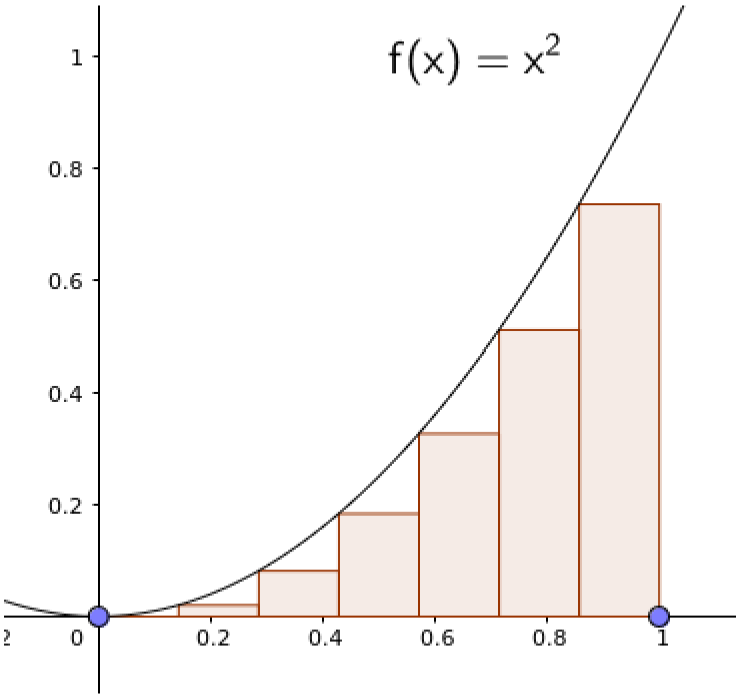
τότε υπάρχει το όριο

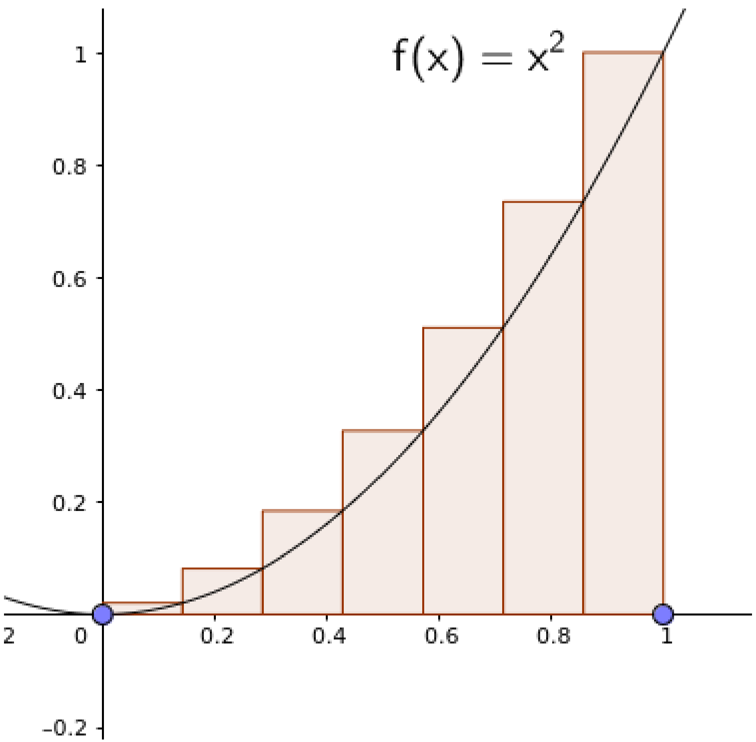
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{S_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(\xi_k)\Delta x$$

Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν Ε(Ω) του χωρίου Ω.**



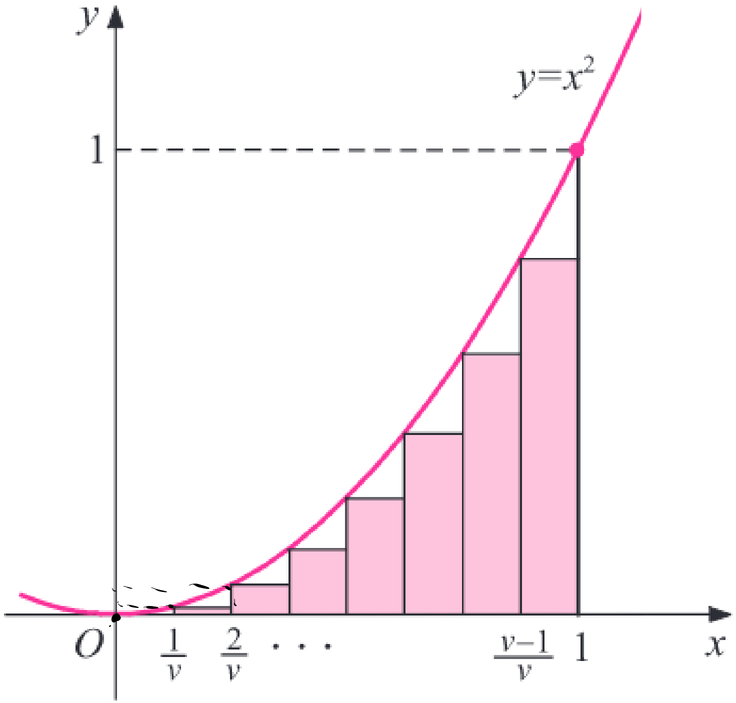
Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου





Όταν το άθροισμα Riemann συγκλίνει τότε είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k.
Ο υπολογισμός του ορίου είναι πιο εύκολος όταν τα σημεία ξ_k επιλέγονται να είναι
(α) τα ακραία σημεία κάθε διαστήματος διαμέρισης (αριστερό ή δεξί)
(β) τα σημεία του διαστήματος όπου η συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου



$\Delta x = \frac{1}{\nu}$

$f(\xi_i)\cdot\Delta x$

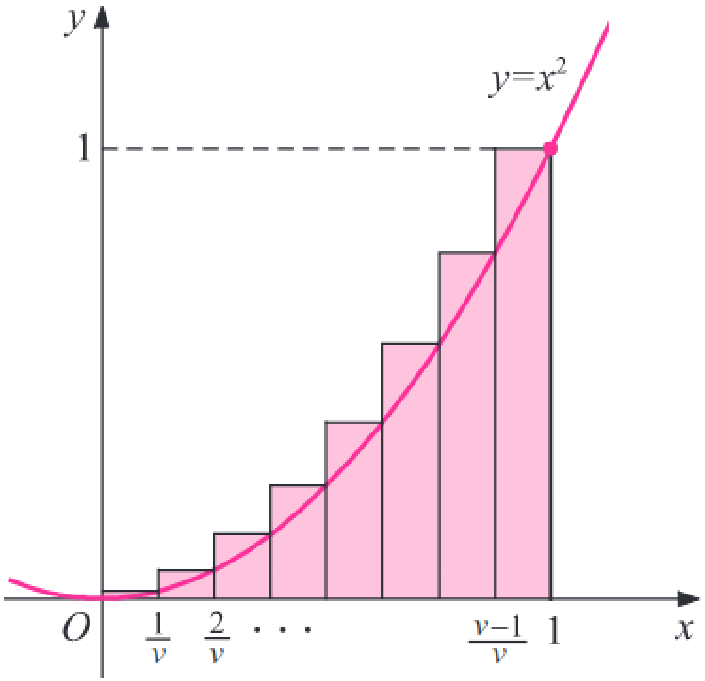
$$\varepsilon_\nu = f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2 - 3\nu + 1}{6\nu^2}. \xrightarrow{\nu\to+\infty} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Επιλογή αριστερού και δεξιού άκρου



$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}.$$

Παρατήρηση
Προσέξτε πως μέχρι το σημείο αυτό δεν έχει γίνει αναφορά στην έννοια του ολοκληρώματος.

Εφαρμογή Geogebra: https://www.geogebra.org/m/dhGhwDdx

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_1, x_2, \ldots, x_n = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε n ισομήκη υπο-διαστήματα μήκους $\Delta x = (\beta - \alpha) / n$. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ σε κάθε υποδιάστημα και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο του S_n, δηλαδή το $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$, υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων τιμών ξ_k. Την τιμή του ορίου αυτού την ονομάζουμε **ορισμένο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και τη συμβολίζουμε με $\boxed{\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x}$.

Επίδειξη αθροισμάτων Riemann: https://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/integration_riemann_sum.html

Έστω α < β και c ϵ R. Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Εμβαδόν

Ορισμένο Ολοκλήρωμα ≠ Εμβαδόν

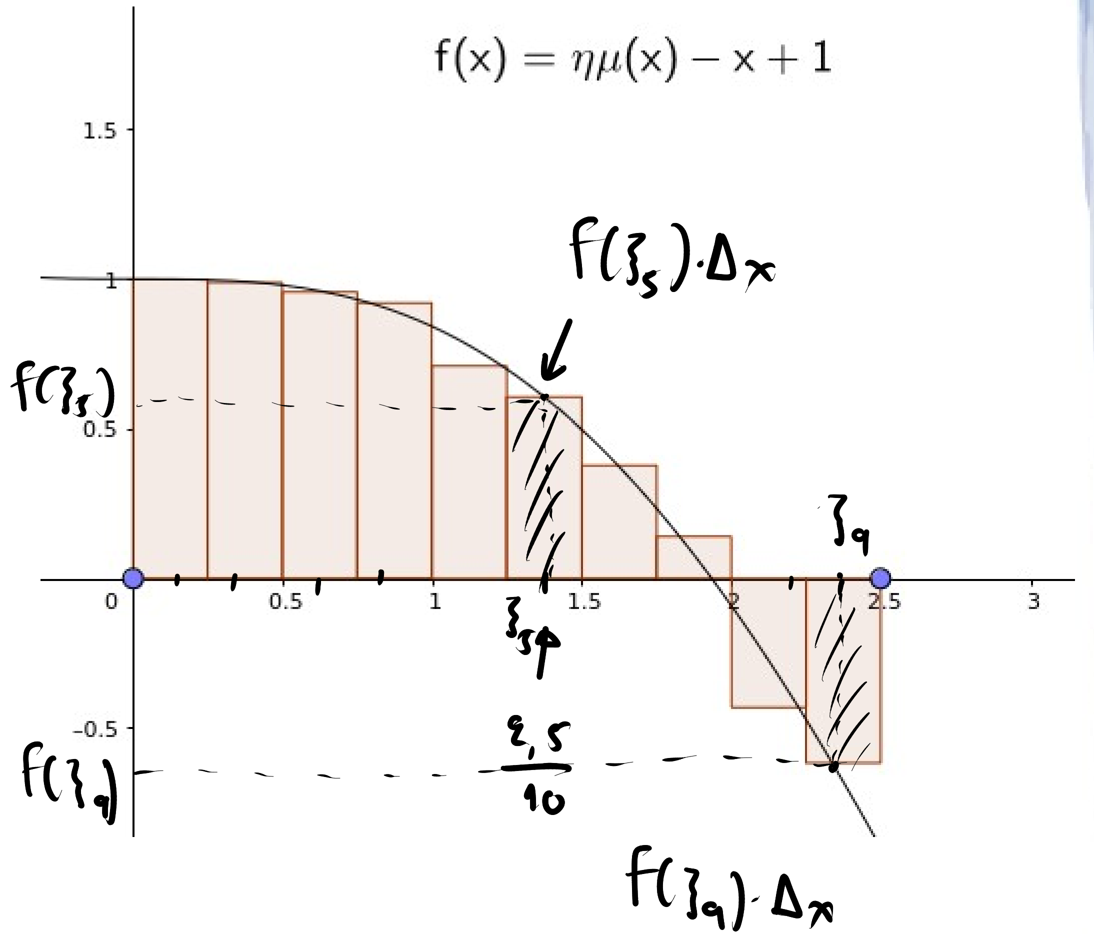
Όταν η συνάρτηση παίρνει και αρνητικές τιμές, τα γινόμενα

$$\Delta x \cdot f(\xi_k)$$

δεν εκφράζουν εμβαδόν ορθογωνίου.

Στην περίπτωση αυτή το ορισμένο ολοκλήρωμα δεν είναι εμβαδόν...

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x$$

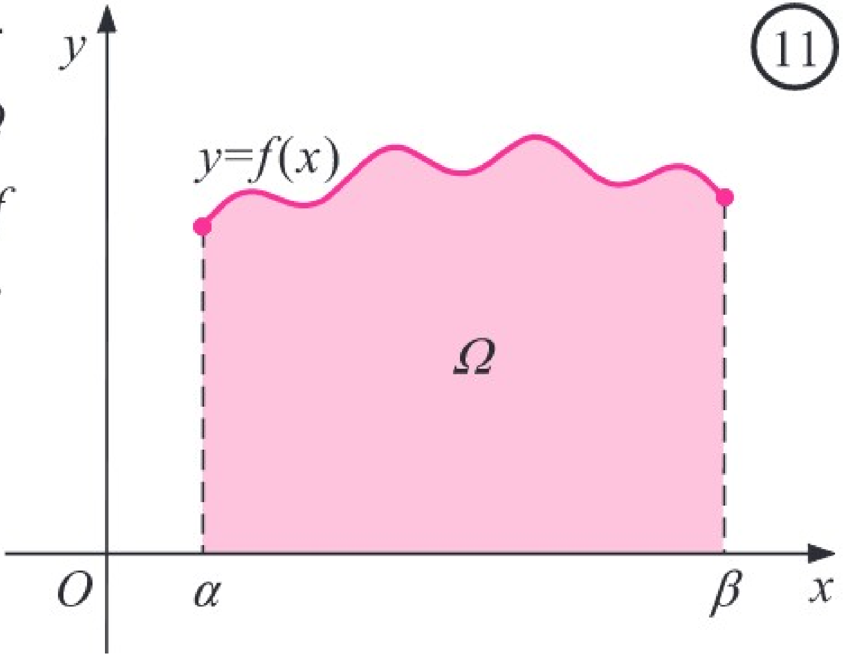


Ορισμένο Ολοκλήρωμα = Εμβαδόν

… όμως, όταν η f είναι μη αρνητική στο [α, β], τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι εμβαδόν.

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega).$$

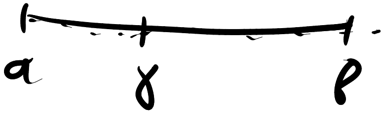


$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x$

Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

1. $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx, \quad a,\beta,\gamma \in \Delta_f$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$



$\alpha<\beta$ 3. $\int_\beta^a f(x)dx = -\int_a^\beta f(x)dx$ ← ορισμός

4. $\int_a^\beta \left(\kappa f(x) + \lambda g(x)\right)dx = \kappa\int_a^\beta f(x)dx + \lambda\int_a^\beta g(x)dx, \quad \kappa,\lambda \in \mathbb{R}$

5. Αν $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$

6. Αν $f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a,\beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x)dx \leq \int_a^\beta g(x)dx$

7. $\left|\int_a^\beta f(x)dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|dx$

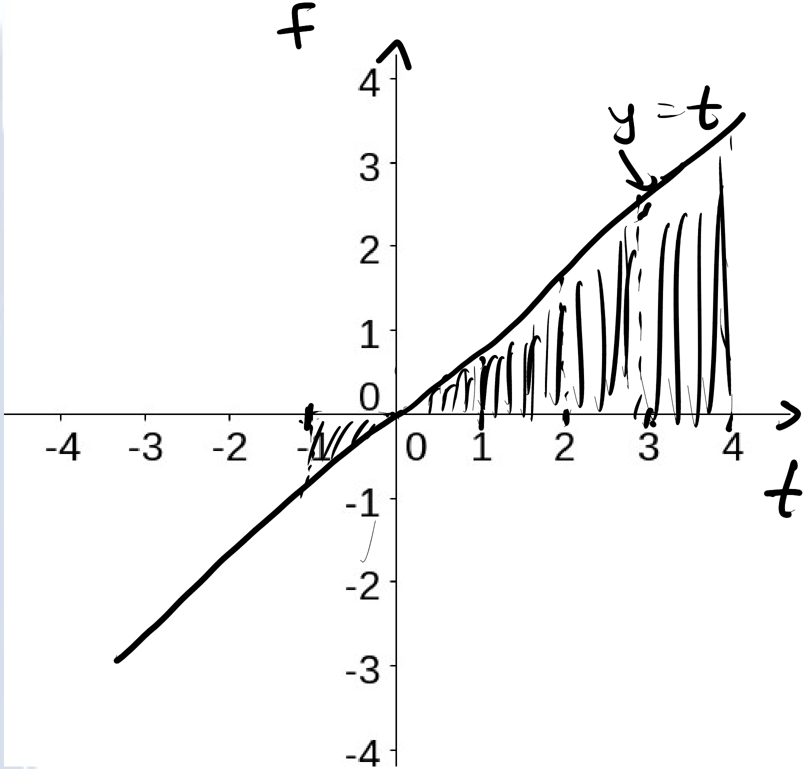
$|a+\beta| \leq |a|+|\beta| \qquad |\sum a_n| \leq \sum |a_n|$

$$\int_a^{\beta} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta x$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,\ x \in [\alpha, \beta]$

$$F(-1) = \int_0^{-1} f(t)\,dt = -\int_{-1}^{0} t\,dt$$

Έστω f(x) = x. Να σχεδιαστεί η $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



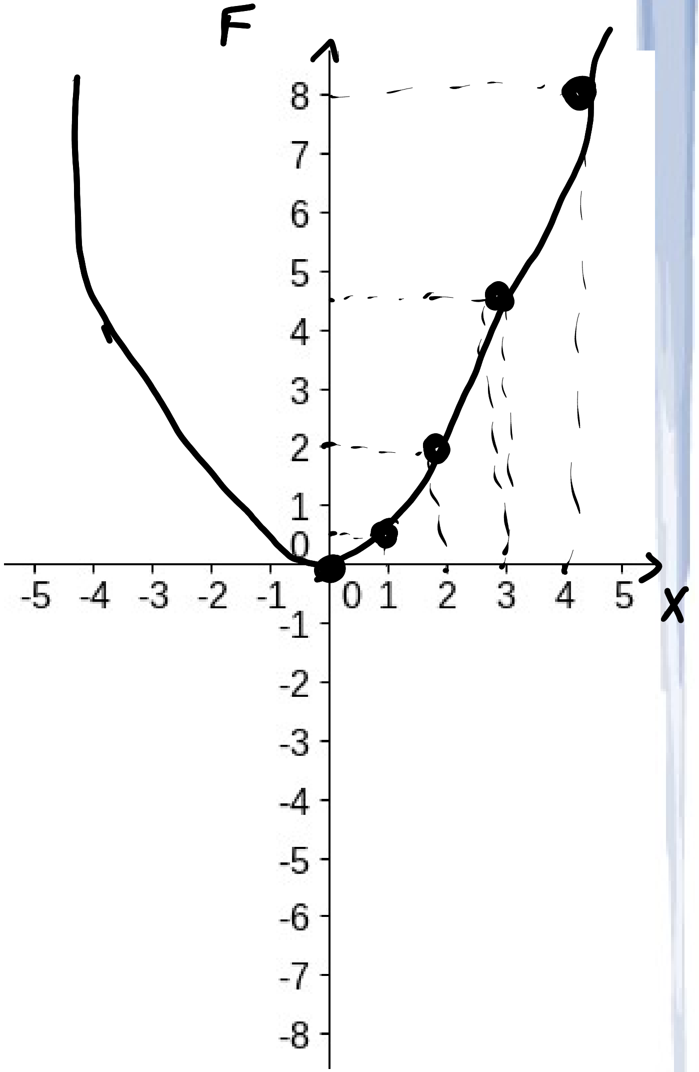
$$F(0) = \int_0^0 t\,dt = 0$$

$$F(1) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$F(2) = \int_0^2 t\,dt = 2$$

$$F(3) = \int_0^3 t\,dt = \frac{9}{2}$$

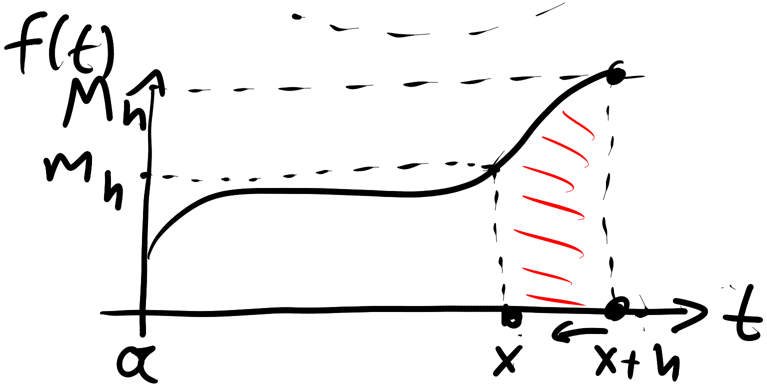
$$F(4) = \int_0^4 t\,dt = 8$$



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

Ορισμένες σκέψεις για την $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$



$$\int_x^{x+h} m_h\,dt \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le \int_x^{x+h} M_h\,dt.$$

$$\Longrightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

$$m_h \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \le M_h$$

$$m_h = \min\{f(x),\ x\in[x_k, x_k+h]\}$$

$$M_h = \max\{f(x),\ x\in[x_k, x_k+h]\}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \ x \in \Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Είναι θεμελιώδες γιατί ενοποιεί με ακρίβεια δύο φαινομενικά πολύ διαφορετικά μέρη της μαθηματικής ανάλυσης, τη διαφοροποίηση και την ολοκλήρωση. Το $1^{ο}$ Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού δηλώνει πως ο ρυθμός μεταβολής του ολοκληρώματος στο διάστημα [α, x] είναι ίσος με την τιμή της συνάρτησης στο x.

Άσκηση

Αν $F(x) = \int_{-5}^{x} (t^2 + \sin t)dt$,

(α) Να βρεθεί η F'(x) (α) Από 1ο Θ.Θ.Ο.Λ. $F'(x) = \left(\int_{-5}^{x} (t^2 + \sin t)dt\right)' = x^2 + \sin x$.

(β) Να βρεθεί η F(x)

(γ) Να βρεθεί το $\int_{-5}^{5} (t^2 + \sin t)dt$, $= F(5) = \frac{5^3}{3} - \cos 5 + \frac{125}{3} + \cos 5 = \frac{250}{3}$.

(β) $F'(x) = x^2 + \sin x \Rightarrow F(x) = \int (x^2 + \sin x)dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$.

Επιπλέον, $F(-5) = \int_{-5}^{-5} (t^2 + \sin t)dt = 0 \iff -\frac{125}{3} - \cos(-5) + c = 0 \iff$

$\iff c = \frac{125}{3} + \cos 5$ και $F(x) = \frac{x^3}{3} - \cos x + \frac{125}{3} + \cos 5$.

Άσκηση

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ ως προς τη μονοτονία.

<u>Λύση</u>

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' \overset{\text{Θ.Θ.Ο.Λ.}}{=\!=\!=} e^{-x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

Ασκήσεις

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Υπολογίστε τα παρακάτω ~~ολοκληρώματα~~:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_4^x e^{t^2}\,dt\right) = e^{x^2}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \cos\left(t^3\right)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\int_1^x \cos\left(t^3\right)dt\right) = -\cos\left(x^3\right).$$

Πόρισμα

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$$

Απόδειξη

Αν $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, τότε $\int_a^{g(x)} f(t)dt = F(g(x))$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = [F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Άσκηση

Υπολογίστε το ~~ολοκλήρωμα~~:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t\,dt = \sin(x^2)\cdot(x^2)' = 2x\sin(x^2).$$

Η συνάρτηση F ως μια παράγουσα της f

Έστω f: [α, β] → R, συνεχής. Σε προηγούμενα μαθήματα, συμβολίσαμε το σύνολο όλων των παραγουσσών της f ως το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)\, dx$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι $\left(\int_{\alpha}^{x} f(\cancel{x}\,t)\, d\cancel{x}\,t\right)' = f(x)$, δηλαδή ότι η $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(\cancel{x}\,t)\, d\cancel{x}\,t$

είναι μία παράγουσα της f.

Καθώς όλες οι παράγουσες διαφέρουν κατά μία σταθερά, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα παραπάνω σύμβολα σε μία σχέση ως εξής:

$$\int f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Είναι θεμελιώδες γιατί ενοποιεί με ακρίβεια δύο φαινομενικά πολύ διαφορετικά μέρη της μαθηματικής ανάλυσης, τη διαφοροποίηση και την ολοκλήρωση.

Το 2$^{\text{ο}}$ Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού προσφέρει τη δυνατότητα εύκολου υπολογισμού ενός ολοκληρώματος.

Μία απόδειξη για τα θεμελιώδη θεωρήματα μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://mathscholar.org/2019/02/simple-proofs-the-fundamental-theorem-of-calculus/

Απόδειξη 2ου Θ.Θ.Ο.Λ.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c = G(\alpha)$.
Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha). \blacksquare$$

Ασκήσεις

$$\int_a^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(a) = G(t)\Big|_a^\beta$$

$$\int_a^\beta f'(t)\,dt = f(\beta) - f(a).$$

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^2 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2.$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = e - 1.$$

$$\int_0^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{t^4+1}\right) dt = \frac{t^2}{t^4+1}\Big|_{t=0}^{t=2} = \frac{2^2}{2^4+1} - \frac{0^2}{0^4+1} = \frac{4}{17}.$$

Ασκήσεις

$$\int_{1}^{4} dx = \int_1^4 1\,dx = x \Big|_1^4 = 4 - 1 = 3.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}e^{2\cdot 2} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 0} = \frac{1}{2}e^{4} - \frac{1}{2}.$$

$$(e^{2x})' = e^{2x}\cdot(2x)'$$

Ασκήσεις

$$\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{1}{3}\cos(3\pi) + \frac{1}{3}\cos(3\cdot 0) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Ασκήσεις

$$\int_{0}^{\pi/2} \left(e^{2x} - 2\cos x\right) dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_1^8 x^{\frac{2}{3}}dx = \left.\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right|_{x=1}^{x=8} = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_1^8 =$$

$$= \frac{3}{5}\left(8^{\frac{5}{3}} - 1^{\frac{5}{3}}\right) = \frac{3}{5}(32-1) = \frac{93}{5}.$$

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\int_a^\beta \left(u(x)\cdot v(x)\right)' dx = \int_a^\beta u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int_a^\beta u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_{x=a}^{x=\beta} = \int_a^\beta u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int_a^\beta u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x)'\,dx = x\cdot\sin x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0 - (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot(\ln x)'dx =$$

$$= e\cdot \overset{1}{\cancel{\ln e}} - 1\cdot \overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \int_1^e dx = e - 0 - (e-1) = 1.$$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση Ι: $\displaystyle\int_{\alpha}^{b} f(\varphi(x))\overbrace{\varphi'(x)dx}^{du}$

Θέτουμε $\varphi(x) = u \Rightarrow \varphi'(x)dx = du$ και $\displaystyle\int_{\alpha}^{b} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f(u)du$.

Προϋποθέσεις

- f συνεχής στο [φ(α), φ(b)]
- φ είναι συνεχής και με συνεχή παράγωγο στο [α, b].

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx &= \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx \\ &= (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du,\end{aligned}$$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση Ι: $\int_{\alpha}^{b} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(b)} f(u)du$

$$\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=2} (x^2+1)'\cdot\cos(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin u\Big|_{u=1}^{u=5} = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1)$$

Θέτω $u = x^2+1 \Rightarrow du = (x^2+1)'dx$

Για $x=0$, $u = 0^2+1 = 1$

Για $x=2$, $u = 2^2+1 = 5$

Αλλαγή μεταβλητής σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Περίπτωση ΙΙ: $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$

Θέτουμε $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ και $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$.

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = (*)$$

Θέτω $x = \sin t \Longleftrightarrow t = \arcsin x$

$x = 0 \rightarrow t = \arcsin 0 = 0$

$x = 1 \rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

$1 - x^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$dx = \cos t\, dt$

$$(*) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{1}{4}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}^{\,0} = \frac{\pi}{4}.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(4-x^2)'}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \;\underset{\substack{x=0\to u=4\\ x=1\to u=3}}{\overset{u=4-x^2}{=\!=\!=}}\; -\frac{1}{2}\int_4^3 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{u=4}^{u=3} = -\sqrt{u}\,\Bigg|_{u=4}^{u=3} = -\sqrt{3}+\sqrt{4} = 2-\sqrt{3}.$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 x\sin^2 x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{e}^{1} x \ln x \; dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x}}\,dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

Ασκήσεις

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx$$

Ασκήσεις

Να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{e^4} \le \displaystyle\int_1^2 e^{-x^2}\,dx \le \dfrac{1}{e}$.

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$f:\text{άρτια} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$f:\text{περιττή} \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-1}^{1} \sin x \cos^4 x \, dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-1}^{1} x^3 \cos^3 x \, dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-2}^{2} \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) dx$$

Ολοκλήρωση άρτιων και περιττών συναρτήσεων

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

Ασκήσεις

Ασκήσεις

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{1}^{e} x^3 \ln x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^3(x)\sin^2(x)\, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$$

Ασκήσεις

$$\int_{0}^{1} \cosh x \, dx$$

Ασκήσεις

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$