Λογισμός Μίας Μεταβλητής

Αόριστο Ολοκλήρωμα (3ο μέρος)

Χειμερινό Εξάμηνο 2024 – 2025

Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος – Ε.ΔΙ.Π.

Ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων

$$\int 0\,dx = c, \qquad \int dx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x), \;\; \pi.\chi.\; \int x\cos(x)\,dx$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \;\; \pi.\chi.\; \int e^{\cos x}\sin x\,dx$$

$$x \;\; \text{και} \;\; \sqrt{\alpha^2 - x^2}, \;\; \text{θέτουμε } x = \alpha\sin(t), \;\; \pi.\chi.\; \int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx$$

$$x \;\; \text{και} \;\; \sqrt{\alpha^2 + x^2}, \;\; \text{θέτουμε } x = \alpha\sinh(t), \;\; \pi.\chi.\; \int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}}\,dx$$

$$x \;\; \text{και} \;\; \sqrt{x^2 - \alpha^2}, \;\; \text{θέτουμε } x = \alpha\cosh(t), \;\; \pi.\chi.\; \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

$u = u(x) \quad du = u'(x)dx$

Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{(2+x)^2}dx = \int \frac{(2+x)'}{(2+x)^2}dx \overset{u=2+x}{=\!=} \int \frac{1}{u^2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{2+x} + c.$$

Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \overset{u = x - \frac{1}{2}}{=\!=\!=} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du \quad (*)$$

$$a x^2 + \beta x + \gamma = a(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

$$\text{ή} \quad = a(x-\rho)^2$$

$$\text{ή} \quad a\left[\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Συμπλήρωση τετραγώνου στο τριώνυμο

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$(*) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + c$$

Υπόδειξη: $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

Ασκήσεις

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

$$\frac{x = 2\sinh t}{dx = 2\cosh t}$$

$$\int \frac{\cancel{2\cosh t}}{\sinh^2 t \cdot \cancel{2\cosh t}}\,dt = \int \frac{1}{\sinh^2 t}\,dt \,.$$

$$A = \mathbb{R}$$

Ασκήσεις

$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \Rightarrow \cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$

$t = \arcsin\frac{x}{2}, \; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{8\sin^3 t}{\cancel{2\cos t}} \cdot \cancel{2\cos t}\,dt = 8\int \sin^3 t\,dt$$

$4 - x^2 > 0$

$-2 < x < 2$

$$= 8\int \sin^2 t \cdot \sin t\,dt = -8\int (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) \overset{u=\cos t}{=\!=}$$

$$= -8\int (1-u^2)\,du = -8u + 8\frac{u^3}{3} = -8\cos t + 8\frac{\cos^3 t}{3} + c$$

$$= -8\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + \frac{8}{3}\cos^3\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + c.$$

$$= -8\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{8}{3}\left[\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\right]^3 + c.$$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων γινομένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής $\int \cos^n x \sin^m x dx$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αν ένας τουλάχιστον από τους n, m είναι περιττός,

$$\text{θέτουμε} \begin{cases} t = \cos x, & \text{αν το } m \text{ είναι περιττός} \\ t = \sin x, & \text{αν το } n \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

$$\int \cos x \sin x \, dx$$

Σημειώσεις

1. Δοκιμάστε t = sinx και t = cosx. Τι παρατηρείτε;
2. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην 1η περίπτωση της αντικατάστασης.

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^4 x \, (\sin x)' dx \overset{u=\sin x}{=\!=}$$

$$= \int \underbrace{(1-u^2)\cdot u^4}_{u^4-u^6} du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c.$$

$\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2 \qquad (1-u^2)^2 = 1-2u^2+u^4$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^5 x \cdot (\sin x)' dx \overset{u=\sin x}{=\!=}$$

$$= \int (1-u^2)\cdot u^5 du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$$

$$\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx = -\int \cos^3 x \sin^4 x (\cos x)' dx \overset{u=\cos x}{=\!=}$$

$$= -\int u^3 \cdot (1-u^2)^2 du = -\frac{u^4}{4} + 2\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8} + C$$

$$= -\frac{\cos^4 x}{4} + 2\frac{\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^8 x}{8} + C$$

Σημείωση: Δοκιμάστε t = sinx και t = cosx. Τι παρατηρείτε;

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

Αν οι n, m είναι αμφότεροι άρτιοι, υπολογίζονται εκφράζοντας τα $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ συναρτήσει του $\cos 2x$ με τη βοήθεια των σχέσεων

$$\int \cos^n x \sin^m x \, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int \left[1 - \cos^2 2x\right] dx = \frac{1}{4} \int dx - \int \frac{1+\cos 4x}{8} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c.$$

Ολοκλήρωση γινομένων τριγωνομετρικών

$$\int \cosh^5 x \sinh^4 x \, dx = \int \cosh^4 x \sinh^4 x \,(\sinh x)' dx$$

$$= \int (1+\sinh^2 x)^2 \cdot \sinh^4 x \cdot (\sinh x)' dx$$

$$\overset{u=\sinh x}{=} \int (1+u^2)^2 \cdot u^4 du =$$

$$= \frac{u^5}{5} + 2\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + c =$$

$$= \frac{\sinh^5 x}{5} + 2\,\frac{\sinh^7 x}{7} + \frac{\sinh^9 x}{9} + c.$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax+\beta}$, θέτουμε $t=\sqrt[n]{ax+\beta}$,

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx \overset{\sqrt{x+1}=t}{=\!=\!=} \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2t\,dt = 2\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3} = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+c$$

$$t=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+1=t^2 \Leftrightarrow x=t^2-1 \Rightarrow dx=2t\,dt$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax+\beta}$, θέτουμε $t=\sqrt[n]{ax+\beta}$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = \int \frac{(2-t^2)^2}{t}(-2t)\,dt = -2\int (4-4t^2+t^4)\,dt \quad (*)$$

$$t=\sqrt{2-x} \Rightarrow t^2=2-x \Leftrightarrow x=2-t^2 \Rightarrow dx=-2t\,dt.$$

$t>0$

$$(*) = -8t+8\frac{t^3}{3}-2\frac{t^5}{5} = -8\sqrt{2-x}+\frac{8}{3}\left(\sqrt{2-x}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\sqrt{2-x}\right)^5+c.$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax+\beta}$, θέτουμε $t=\sqrt[n]{ax+\beta}$,

$$\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int (t^3-1)\cdot t\cdot 3t^2\,dt = 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^4}{4} = \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^7 - \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4 + c.$$

$$t=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Leftrightarrow x = t^3-1 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$$

$t\in\mathbb{R}$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x και $\sqrt[n]{ax+\beta}$, θέτουμε $t=\sqrt[n]{ax+\beta}$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4-x}}\,dx$$

Ολοκλήρωση άρρητων συναρτήσεων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας άρρητης συνάρτησης:

των x, $\sqrt[n]{ax+\beta}$ και $\sqrt[m]{ax+\beta}$, θέτουμε $t=\sqrt[k]{ax+\beta}$,

όπου k = ΕΚΠ των n, m.

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Ε.Κ.Π.$(2,3)=6$

Θέτω $t=\sqrt[6]{x} \Leftrightarrow x=t^6$.

$\Rightarrow dx=6t^5\,dt$

$$I=\int \frac{\sqrt[3]{t^6}-\sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5\,dt=\int \frac{t^2-t^4}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt=6\int \frac{1-t^2}{1+t}\cdot t^5\,dt$$

$$=6\int (1-t)\cdot t^5\,dt=6\frac{t^6}{6}-6\frac{t^7}{7}=x-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+c.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης, την εκφράζουμε ως άθροισμα απλούστερων (μερικών) κλασμάτων ως εξής:

- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρανομαστή, βρίσκουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης αριθμητή διά παρανομαστή και εφαρμόζουμε τη ταυτότητα της διαίρεσης.

- Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή του κλάσματος που προκύπτει.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Στους παράγοντες του παρανομαστή αντιστοιχούμε μερικά κλάσματα ως εξής:
  - Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x-a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{A}{x-a}$, όπου A σταθερά.
  - Σε κάθε παράγοντα $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\dfrac{A_1}{x-a}, \dfrac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \ldots, A_k$ σταθερές.
  - Σε κάθε δευτεροβάθμιο με αρνητική διακρίνουσα παράγοντα $ax^2+\beta x+\gamma$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{Ax+B}{ax^2+\beta x+\gamma}$, όπου A, B σταθερές.
- Απαλείφουμε τους παρανομαστές και βρίσκουμε τις τιμές των σταθερών A, B, A_i από την ισότητα πολυωνύμων που προκύπτει και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα ολοκληρωμάτων.

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x-a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{A}{x-a}$, όπου A σταθερά.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\overset{x+1}{A}}{x-1} + \frac{\overset{x-1}{B}}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(A+B)x + A - B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} B=-A \\ 2A=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2}. \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε πρωτοβάθμιο παράγοντα $x-a$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\dfrac{A}{x-a}$, όπου A σταθερά.

$$\int \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \overset{(x-2)(x-3)}{\frac{A}{x-1}} + \overset{(x-1)(x-3)}{\frac{B}{x-2}} + \overset{(x-1)(x-2)}{\frac{\Gamma}{x-3}} =$$

$$= \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+\Gamma(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Αριθμητής: $(A+B+\Gamma)x^2+(-5A-4B-3\Gamma)x+6A+3B+2\Gamma$ (*)

(*)
$$A+B+\Gamma=0$$
$$-5A-4B-3\Gamma=0$$
$$6A+3B+2\Gamma=1$$

Επόμενο βήμα: επίλυση 3x3 συστήματος

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε παράγοντα $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\dfrac{A_1}{x-a}, \dfrac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \ldots, A_k$ σταθερές.

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 \\ -A+B &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = B = 1$$

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε παράγοντα $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, αντιστοιχούμε k κλάσματα της μορφής $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}$, όπου $A_1, A_2, \dots, A_k$ σταθερές.

$$\int \frac{x^2}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(\overset{x^2+2x+1}{(x+1)^2}) + B\overset{x^2-1}{(x-1)(x+1)} + \Gamma(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2A+\Gamma)x + A-B-\Gamma}{(x-1)(x+1)^2} \quad (*)$$

$(*)$

$$A+B=1$$

$$2A+\Gamma=0, \quad \Gamma=-2A$$

$$A-B-\Gamma=0$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 3A+B=0 \end{array}\right\} \quad A=\frac{1}{4}, \quad B=\frac{3}{4}$$

$$\Gamma=-\frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{(x^2+x+1)'+3}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

- Σε κάθε δευτεροβάθμιο με αρνητική διακρίνουσα παράγοντα $ax^2+\beta x+\gamma$ αντιστοιχούμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{Ax+B}{ax^2+\beta x+\gamma}$, όπου A, B σταθερές.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$$

$$Bx^2 - Bx + \Gamma x - \Gamma$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+\Gamma)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Αριθμ.: $(A+B)x^2+(A-B+\Gamma)x+A-\Gamma$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+\Gamma=0 \\ A-\Gamma=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} B=-A \\ 2A+\Gamma=0 \\ A-\Gamma=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ \Gamma=-\frac{2}{3} \end{array}$$