ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

• Διανυσματικός χώρος

Ορισμός **Διανυσματικός χώρος V πάνω στο σύνολο** $\mathbb{R}$ ή **πραγματικός διανυσματικός χώρος V** λέγεται κάθε σύνολο εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των στοιχείων του V και του πολλαπλασιασμού μεταξύ πραγματικών αριθμών και στοιχείων του V που ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

1) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$
2) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$
3) $\exists\vec{0}\in V$, τέτοιο ώστε $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$
4) $\forall\vec{x}\in V$, $\exists(-\vec{x})\in V$, τέτοιο ώστε $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$
5) $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$
6) $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$
7) $(\lambda\mu)\vec{x}=\lambda(\mu\vec{x})$
8) $1\vec{x}=\vec{x}$

Τότε τα στοιχεία του V καλούνται **διανύσματα**.

Πρόταση α) Αν $\vec{0}'\in V$, τέτοιο ώστε $\vec{x}+\vec{0}'=\vec{x}$, για κάθε $\vec{x}\in V$, τότε $\vec{0}'=\vec{0}$.
β) Έστω $\vec{x}\in V$. Αν υπάρχει $\vec{x}'\in V$ τέτοιο ώστε $\vec{x}+\vec{x}'=\vec{0}$, τότε $\vec{x}'=-\vec{x}$.

Πρόταση α) $0\vec{x}=\vec{0}$, για κάθε $\vec{x}\in V$.
β) $\lambda\vec{0}=\vec{0}$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα Το σύνολο $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σύνολο $\mathbb{R}$, με τις ακόλουθες πράξεις:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n),$$

όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$.

■

Παράδειγμα Έστω $C([a, \beta])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν ορίσουμε τις παρακάτω πράξεις

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε ο $C([a, \beta])$ αποτελεί πραγματικό διανυσματικό χώρο.

■

Παράδειγμα Έστω P το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο P αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$.

• Γραμμική ανεξαρτησία και βάση

Ορισμός Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε τα διανύσματα αυτά θα λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ_i όχι όλοι ίσοι με το μηδέν τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = 0.$$

Σε αντίθετη περίπτωση τα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ θα λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**.

Ορισμός Ένα σύνολο από διανύσματα $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V, λέμε ότι **παράγει** τον V, αν κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$, δηλαδή

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n.$$

Ορισμός Ένα σύνολο από διανύσματα $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V, αποτελεί **βάση** του V, αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον V.

Θεώρημα Τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ ενός διανυσματικού χώρου είναι μία βάση του V αν και μόνον αν κάθε διάνυσμα του χώρου V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$.

Παρατήρηση Τα διανύσματα

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1,0,\ldots,0),\\ \vec{e}_2 &= (0,1,\ldots,0),\\ &\vdots\\ \vec{e}_n &= (0,0,\ldots,1),\end{aligned}$$

αποτελούν μία βάση του χώρου $\mathbb{R}^n$. Η βάση αυτή ονομάζεται **ευκλείδεια** ή **φυσική** ή **κανονική**. Για τον $\mathbb{R}^3$ συχνά χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\begin{aligned}\vec{i} &= (1,0,0),\\ \vec{j} &= (0,1,0),\\ \vec{k} &= (0,0,1).\end{aligned}$$

<u>Παράδειγμα</u> Να δειχτεί ότι τα διανύσματα

$$\vec{u} = (6,2,3,4)\,,\quad \vec{v} = (0,5,-3,1)\,,\quad \vec{w} = (0,0,7,-2)$$

του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Απάντηση</u> Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$$

ή

$$\lambda(6,2,3,4) + \mu(0,5,-3,1) + \nu(0,0,7,-2) = (0,0,0,0)$$

ή

$$(6\lambda,\ 2\lambda + 5\mu,\ 3\lambda - 3\mu + 7\nu,\ 4\lambda + \mu - 2\nu) = (0,0,0,0)$$

ή

$$\begin{cases} 6\lambda = 0 \\ 2\lambda + 5\mu = 0 \\ 3\lambda - 3\mu + 7\nu = 0 \\ 4\lambda + \mu - 2\nu = 0 \end{cases}.$$

Οπότε $\lambda = \mu = \nu = 0$, και κατά συνέπεια τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

■

Παράδειγμα Να δειχτεί ότι τα διανύσματα

$$\vec{u} = (1,-1,0), \quad \vec{v} = (1,3,-1), \quad \vec{w} = (5,3,-2)$$

του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απάντηση Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0}$$

ή

$$\lambda(1,-1,0) + \mu(1,3,-1) + \nu(5,3,-2) = (0,0,0)$$

ή

$$(\lambda + \mu + 5\nu, \ -\lambda + 3\mu + \nu, \ -\mu - 2\nu) = (0,0,0)$$

ή

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ -\lambda + 3\mu + 3\nu = 0 \\ -\mu - 2\nu = 0 \end{array}\right\}$$

από όπου βρίσκουμε $\mu = -2\nu$ και $\lambda = -3\nu$. Έστω $\nu = -1$. Τότε $\mu = 2$ και $\lambda = 3$. Άρα $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

■

<u>Παράδειγμα</u> Έστω P ο χώρος των πολυωνύμων. Να δειχτεί ότι τα πολυώνυμα

$$\vec{x}_1 = 1 - t\,,\;\; \vec{x}_2 = t^3 - 1\,,\;\; \vec{x}_3 = t - t^3\,,\;\; t \in \mathbb{R}\,,$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του χώρου P.

<u>Απάντηση</u> Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1(1-t) + \lambda_2(t^3 - 1) + \lambda_3(t - t^3) = 0\,.$$

Αν επιλέξουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ τότε προκύπτει ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ και $\vec{x}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

■

Θεώρημα Αν τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε ένα τουλάχιστον από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων και αντιστρόφως.

Θεώρημα Αν $k < n$ από τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε τα n διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

Θεώρημα Αν τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ενώ τα $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$.

Παράδειγμα Έστω $P_ν$ ο χώρος των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο από ν. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{\nu-1}.$$

Να δειχτεί ότι τα πολυώνυμα αυτά αποτελούν μία βάση για το χώρο $P_ν$.

Απάντηση Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_{\nu-1} x^{\nu-1} = 0.$$

Τότε

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\nu-1} = 0.$$

Συνεπώς τα διανύσματα $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{\nu-1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω τώρα ένα τυχαίο πολυώνυμο $p(x)$ του χώρου P_ν. Τότε το πολυώνυμο αυτό γράφεται

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{\nu-1} x^{\nu-1}$$

Οπότε τα διανύσματα $1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{\nu-1}$ παράγουν το διανυσματικού χώρου P_ν και επομένως το σύνολο $\{1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^{\nu-1}\}$ αποτελεί βάση του P_ν.

■

Παράδειγμα Έστω $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V. Να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}+\vec{z}$ και $\vec{z}+\vec{x}$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V.

Απάντηση Έστω $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda(\vec{x}+\vec{y})+\mu(\vec{y}+\vec{z})+\nu(\vec{z}+\vec{x})=\vec{0}$$

ή

$$(\lambda+\nu)\vec{x}+(\lambda+\mu)\vec{y}+(\mu+\nu)\vec{z}=\vec{0}$$

ή

$$\begin{cases}\lambda+\nu=0\\ \lambda+\mu=0\\ \mu+\nu=0\end{cases}$$

Οπότε $\lambda=\mu=\nu=0$ και κατά συνέπεια τα διανύσματα $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}+\vec{z}$ και $\vec{z}+\vec{x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα χώρου V.

■

Παράδειγμα Να δειχτεί ότι τα διανύσματα

$$\vec{v}_1 = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{και} \quad \vec{v}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απάντηση Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Τότε

$$\lambda_1(\cos\theta, \sin\theta) + \lambda_2(-\sin\theta, \cos\theta) = \vec{0}$$

ή

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\cos\theta - \lambda_2\sin\theta = 0 \\ \lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$

ή

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\cos^2\theta - \lambda_2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \lambda_1\sin^2\theta + \lambda_2\sin\theta\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$

ή

$$\lambda_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0.$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\lambda_1 = 0$ και κατά συνέπεια $\lambda_2 = 0$.
Άρα τα διανύσματα $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

■

Παράδειγμα Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα του χώρου $C([-\pi,\pi])$.

Απάντηση Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin^2 x + \lambda_3 \cos^2 x = 0.$$

Αν επιλέξουμε $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ τότε υπάρχει μία μη μηδενική λύση για την παραπάνω σχέση και επομένως οι συναρτήσεις 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

■

Παράδειγμα Να βρεθεί η τιμή του $k \in R$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{y} = (1,-2,k)$ να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1 = (3,0,-2)$ και $\vec{x}_2 = (2,-1,5)$ στον $\mathbb{R}^3$.

Απάντηση Αφού το διάνυσμα $\vec{y}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2$$

ή

$$(1,-2,k) = \lambda_1 (3,0,-2) + \lambda_2 (2,-1,5)$$

ή

$$\left.\begin{array}{l} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ -\lambda_2 = -2 \\ -2\lambda_1 + 5\lambda_2 = k \end{array}\right\}$$

απ' όπου βρίσκουμε $\lambda_2 = 2$ και επομένως $\lambda_1 = -1$. Άρα

$$k = 10 + 2 = 12.$$

■

Παράδειγμα Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις 1, e^x, xe^x είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $C([0,1])$.

Απάντηση Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 x e^x = 0.$$

Τότε παραγωγίζοντας την ανωτέρω σχέση προκύπτει

$$\lambda_2 e^x + \lambda_3 e^x + \lambda_3 x e^x = 0$$

και στη συνέχεια παραγωγίζοντας εκ νέου την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\lambda_2 e^x + \lambda_3 e^x + \lambda_3 e^x + \lambda_3 x e^x = 0.$$

Οπότε αφαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε

$$\lambda_3 e^x = 0,$$

που σημαίνει ότι $\lambda_3 = 0$. Κατά συνέπεια $\lambda_2 = 0$ και τελικά $\lambda_1 = 0$.
Δηλαδή αποδείξαμε ότι οι συναρτήσεις 1, e^x, xe^x είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

■

<u>Παράδειγμα</u> Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις 1, $\sin x$, $\cos x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $C\left((0,\frac{\pi}{2})\right)$.

<u>Απάντηση</u> Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1+\lambda_2\sin x+\lambda_3\cos x=0.$$

Τότε παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$\lambda_2\cos x-\lambda_3\sin x=0$$

και ξαναπαραγωγίζοντας

$$-\lambda_2\sin x-\lambda_3\cos x=0.$$

Οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{cases}\lambda_2\cos x-\lambda_3\sin x=0\\ -\lambda_2\sin x-\lambda_3\cos x=0\end{cases}$$

ή

$$\begin{cases}\lambda_2\cos x\sin x-\lambda_3\sin^2 x=0\\ -\lambda_2\sin x\cos x-\lambda_3\cos^2 x=0\end{cases}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $\lambda_3=0$. Οπότε $\lambda_2=0$ και τελικά $\lambda_1=0$. Άρα οι συναρτήσεις 1, $\sin x$, $\cos x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

■

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ότι $\vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$ και $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Απάντηση</u> Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Τότε

$$\lambda_1(\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + \lambda_2(3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2) + \lambda_3(2\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2) = \vec{0}$$

ή

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{b}_1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3)\vec{b}_2 = \vec{0}$$

ή

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε $\lambda_1 = \frac{7}{2}\lambda_3,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$ ή $\lambda_1 = \frac{7}{2}c,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}c,\ \lambda_3 = c,\ c \in \mathbb{R}$. Επομένως τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

■

• Διάσταση διανυσματικού χώρου

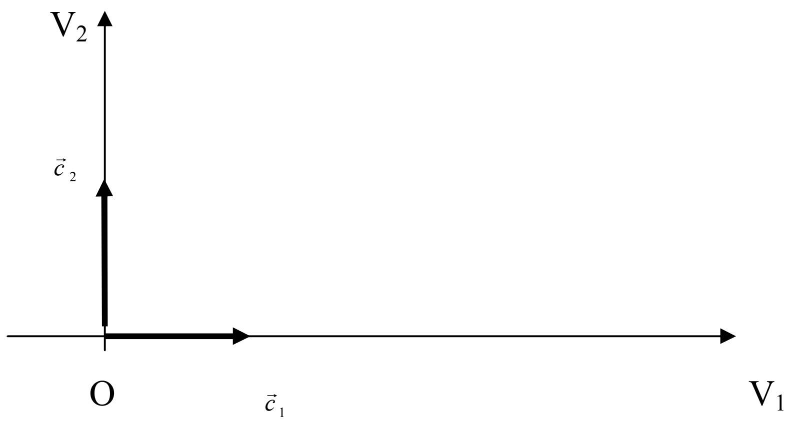
<u>Ορισμός</u> **Διάσταση** ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται το πλήθος των διανυσμάτων οποιασδήποτε βάσης του χώρου και συμβολίζεται με **dimV**.

<u>Θεώρημα</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n < \infty$. Τότε οποιαδήποτε n+1 ή περισσότερα διανύσματα του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Ορισμός</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n < \infty$. Έστω $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n$ μία βάση του V και $\vec{a}$ ένα διάνυσμα που ανήκει στο χώρο V. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, ..., a_n$ τέτοιοι ώστε

$$\vec{a} = a_1\vec{c}_1 + a_2\vec{c}_2 + ... + a_n\vec{c}_n$$

οι οποίοι θα λέγονται **συντεταγμένες** του διανύσματος $\vec{a}$ ως προς τη βάση $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n$. Στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$ τα διανύσματα $\vec{c}_i$ λέμε ότι σχηματίζουν ένα **σύστημα συντεταγμένων**.



Παράδειγμα Έστω $\vec{a}=(4,2)_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}\in\mathbb{R}^2$ δηλαδή έστω ότι το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει συντεταγμένες 4 και 2 ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1=(1,0),\vec{e}_2=(0,1)\}$. Να αποδειχτεί ότι το $\vec{a}=(2,2)_{\{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'\}}$ δηλαδή ότι το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει συντεταγμένες 2 και 2 ως προς τη βάση $\left\{\vec{e}_1{}'=(1,0),\vec{e}_2{}'=(1,1)\right\}$.

Απάντηση Είναι $\vec{a}=(4,2)=4\vec{e}_1+2\vec{e}_2=4(1,0)+2(0,1)$. Τότε

$$\vec{a}=(4,2)=c_1\vec{e}_1{}'+c_2\vec{e}_2{}'=c_1(1,0)+c_2(1,1)$$

και επομένως

$$\begin{cases}c_1+c_2=4\\ c_2=2\end{cases} \quad ή \quad \begin{cases}c_1=2\\ c_2=2\end{cases}$$

Οπότε το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει συντεταγμένες 2 και 2 ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'\}$.

■

Παράδειγμα Έστω ότι V είναι ένας διανυσματικός χώρος ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα

$$\vec{a} = (2,1,3,1), \quad \vec{\beta} = (1,2,0,1), \quad \vec{\gamma} = (-1,1,-3,0).$$

Να βρεθεί η διάσταση του χώρου V.

Απάντηση Έστω $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma} = \vec{0}$.

Τότε $\lambda(2,1,3,1) + \mu(1,2,0,1) + \nu(-1,1,-3,0) = (0,0,0,0)$

ή

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu - \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu + \nu = 0 \\ 3\lambda - 3\nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3\lambda + 3\mu = 0 \\ \lambda = \nu \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \nu = \lambda \\ \mu = -\lambda \end{cases}$$

Έστω λ = 1 τότε μ = -1 και ν = 1 που σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έστω τώρα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$.

Τότε $\lambda(2,1,3,1) + \mu(1,2,0,1) = (0,0,0,0)$

ή

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ 3\lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

που σημαίνει ότι τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς η διάσταση του V είναι ίση με 2.

■