

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2025 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Ναδειχθεί ότι $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + c, c \in \mathbb{R}$. **(0,5μ)**

(β) Να δείξετε ότι $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \, dx = 2$. **(1,0μ)**

(γ) Να βρεθεί αν υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} \, dx$. **(1,0μ)**

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) Ναδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n} = \frac{15}{6}$. **(1,0μ)**

(β) Να βρεθεί η ακτίνα και το σύνολο σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (x-1)^n$ **(1,5μ)**

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Έστω δύο ομαλοί τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A και B .

(i) Πότε ο B καλείται αντίστροφος του A ;

(ii) Να αποδειχτεί ότι αν ο πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αυτός είναι μοναδικός.

β) Έστω ότι $\vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$ και $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A .

β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c \lim a_n, \quad c \text{ σταθ.}$ $\lim(a_n + \beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n \cdot \beta_n) = \lim a_n \cdot \lim \beta_n$ $\lim \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim \beta_n}, \quad \lim \beta_n \neq 0$ $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \quad \lim a_n \geq 0$ $\lim a_n = \lim a_n $	$\lim(c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0) = \lim(c_k n^k)$ $\lim \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_m} \lim n^{k-m}$
---	--

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)d] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 + a_1 \lambda^2 + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n a_1 \lambda^{k-1} = a_1 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$

Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $|\lambda| < 1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,
αν $|\lambda| \geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$ ή $\lim \sqrt[n]{a_n} = k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι $R = \frac{1}{k}$.

Για $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x \in (-1, 1)$, ισχύει $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$
---	---

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Εφαρμόζουμε δύο φορές κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγωγίσουμε: $(-x\cos x + \sin x + c)' = x\sin x$.

(β) Παρατηρούμε ότι η $f(x) = x\sin x$ είναι άρτια. Άρα

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = 2.$$

(γ) Για $x > 1$, είναι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx < +\infty$.

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Ακολουθεί διπλή εφαρμογή της γεωμετρικής σειράς.

(β) Εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου και βρίσκουμε ότι σειρά συγκλίνει στο $|x - 1| < 1$, δηλαδή στο $(0, 2)$. Για $x = 0$ η σειρά αποκλίνει (αρμονική) και για $x = 2$ η σειρά συγκλίνει (κριτήριο Leibnitz). Τελικά το σύνολο σύγκλισης είναι το $(0, 2]$.

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) (i) Έστω δύο ομαλοί τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A και B .

Αν $AB = BA = I$ τότε ο B ονομάζεται *αντίστροφος* του A .

(ii) Έστω A ομαλός τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και B και Γ δύο αντίστροφοι του.
Τότε

$$AB = BA = I \text{ και } A\Gamma = \Gamma A = I.$$

Οπότε

$$B = IB = (\Gamma A)B = \Gamma(AB) = \Gamma I = \Gamma.$$

β) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

Τότε

$$\lambda_1 (\vec{b}_1 - \vec{b}_2) + \lambda_2 (3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2) + \lambda_3 (2\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2) = \vec{0}$$

Ή

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{b}_1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3)\vec{b}_2 = \vec{0}$$

Ή

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε $\lambda_1 = \frac{7}{2}\lambda_3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$ ή $\lambda_1 = \frac{7}{2}c$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}c$, $\lambda_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Επομένως τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

α) $|A - \lambda I| = (-3 - \lambda)(4 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - \lambda - 20 = (\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -4$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_1 = 5}, [A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8x + 8y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_1 = [1 \ 1]'$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_2 = -4}, [A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 8y = 0 \\ x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}x.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_2 = [-8 \ 1]'$.

β) Με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφό του $T^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$T^{-1}AT = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 40 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$