

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Χρήστος Σχοινάς, Καθηγητής – Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος, Ε.ΔΙ.Π.
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Φεβρουαρίου 2026 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που προκύπτει από την περιστροφή περί τον άξονα $x'x$, της $y = (x - 1)^{1/2}$, $1 \leq x \leq 2$ είναι ίσο με $E = \pi(5^{3/2} - 1)/6$ τ.μ..

(1,2μ)

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$, και τη γραφική παράσταση της $y = \arcsin x$ είναι ίσο με $-1 + \pi/2$. Δίνεται ότι $(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$.

(1,3μ)

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2}$.

(1,3μ)

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x) = \sinh x$ με κέντρο το 0.

(1,2μ)

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Πότε ένας πίνακας έχει αντίστροφο (δηλαδή είναι αντιστρέψιμος);

β) Να αποδειχτεί ότι, αν ο πίνακας A έχει αντίστροφο, τότε αυτός είναι μοναδικός.

γ) Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις 1 , $\sin x$, $\cos x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου $C(0, \frac{\pi}{2})$.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A .

β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c \lim a_n, \text{ } c \text{ σταθ.}$ $\lim(a_n + \beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n \cdot \beta_n) = \lim a_n \cdot \lim \beta_n$ $\lim \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim \beta_n}, \lim \beta_n \neq 0$ $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \lim a_n \geq 0$ $\lim a_n = \lim a_n $	$\lim(c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0) = \lim(c_k n^k)$ $\lim \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_m} \lim n^{k-m}$
--	--

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)d] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 + a_1 \lambda^2 + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n a_1 \lambda^{k-1} = a_1 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$

Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $|\lambda| < 1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,
αν $|\lambda| \geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$ ή $\lim \sqrt[n]{a_n} = k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι $R = \frac{1}{k}$.

Για $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x \in (-1, 1)$, ισχύει $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$
---	---

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Χρησιμοποιούμε τον τύπο του εμβαδού εκ περιστροφής. Μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις προκύπτει το ολοκλήρωμα της $(4x - 3)^{1/2}$, στο διάστημα $[1, 2]$. Ακολουθεί η αντικατάσταση $4x - 3 = u$ και το αποτέλεσμα έπεται.

(β) Το εμβαδόν είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της $\arcsin x$ από το 0 έως το 1. Για να υπολογιστεί εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) Είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ Εφαρμόζουμε κριτήριο ολοκληρώματος και δείχνουμε ότι και οι δύο σειρές συγκλίνουν. Άρα θα συγκλίνει και η αρχική.

(β) Από τον ορισμό της $\sinh$ και την γνωστή σειρά Taylor της e^x .

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Όταν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός.

β) Έστω A ομαλός τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας και B και Γ δύο αντίστροφοι του. Τότε

$$AB = BA = I \text{ και } A\Gamma = \Gamma A = I.$$

Οπότε

$$B = IB = (\Gamma A)B = \Gamma(AB) = \Gamma I = \Gamma.$$

γ) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0. \quad (1)$$

Τότε παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$\lambda_2 \cos x - \lambda_3 \sin x = 0 \quad (2)$$

και ξαναπαραγωγίζοντας

$$-\lambda_2 \sin x - \lambda_3 \cos x = 0. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_2 \cos x - \lambda_3 \sin x = 0 \\ -\lambda_2 \sin x - \lambda_3 \cos x = 0 \end{cases}$$

ή

$$\begin{cases} \lambda_2 \cos x \sin x - \lambda_3 \sin^2 x = 0 \\ -\lambda_2 \sin x \cos x - \lambda_3 \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $\lambda_3 = 0$. Οπότε $\lambda_2 = 0$ και τελικά $\lambda_1 = 0$. Άρα οι συναρτήσεις $1, \sin x, \cos x$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

α) $|A - \lambda I| = (-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0.$

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = 3$.

Για $\lambda_1 = -3$, $[A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x.$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_1 = [-1 \quad 1]'$.

Για $\lambda_2 = 3$, $[A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x.$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_2 = [1 \quad 2]'$.

β) Με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφό του $T^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$T^{-1}AT = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$