

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ. : Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Φεβρουαρίου 2025 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να δείξετε ότι $\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + c, c \in \mathbb{R}$. (1,0μ)

(β) Να δείξετε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}$. (0,6μ)

(γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x , την ευθεία $x + y = 2$, και την παραβολή $y = x^2$. (0,9μ)

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να εξετάσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{4n-2} \right)^n$ (0,8μ)

(β) Να δειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^n = \frac{1}{(1+x)^2}, |x| < 1$. (1,7μ)

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Να αναφερθούν τέσσερις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

β) Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ, μ , αν

$$\kappa(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + \lambda(-2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \mu\vec{w} = \vec{u} + 4\vec{v} + 2\vec{w}.$$

όπου $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός πραγματικού διαν. χώρου.

γ) Να υπολογιστεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 & 2012 & 2013 \\ 2014 & 2015 & 2016 & 2017 \\ 2018 & 2019 & 2020 & 2021 \\ 2022 & 2023 & 2024 & 2025 \end{vmatrix}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A .

β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c \lim a_n, \quad c \text{ σταθ.}$ $\lim(a_n + \beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n \cdot \beta_n) = \lim a_n \cdot \lim \beta_n$ $\lim \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim \beta_n}, \quad \lim \beta_n \neq 0$ $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \quad \lim a_n \geq 0$ $\lim a_n = \lim a_n $	$\lim(c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0) = \lim(c_k n^k)$ $\lim \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_m} \lim n^{k-m}$
---	--

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)d] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 + a_1 \lambda^2 + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n a_1 \lambda^{k-1} = a_1 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$

Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $|\lambda| < 1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,
αν $|\lambda| \geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Αν $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$ ή $\lim \sqrt[n]{a_n} = k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι $R = \frac{1}{k}$.

Για $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x \in (-1, 1)$, ισχύει $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$
---	---

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

(α) Γράφουμε $e^{-x} = -(e^{-x})'$ και εφαρμόζουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία δύο φορές. Αν I είναι το αρχικό ολοκλήρωμα καταλήγουμε στην εξίσωση

$$I = e^{-x}(\cos x - \sin x) - I,$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, αρκεί η παραγωγή της $2^{\text{ου}}$ μέλους.

(β) Το όριο της $e^{-x}(\cos x - \sin x)$ στο $+\infty$ είναι 0 (μηδενική επί φραγμένη). Το αποτέλεσμα προκύπτει από τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος.

(γ) Η ευθεία και η παραβολή τέμνονται για $x = 1$. Υπολογίζουμε το εμβαδόν από τα δύο επιμέρους χωρία. Το πρώτο δίνεται από το $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, ενώ το δεύτερο από το $\int_1^2 (2 - x) dx = \frac{1}{2}$. Τελικό αποτέλεσμα: $E = 5/6$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

(α) Εφαρμόζουμε κριτήριο ρίζας για τις σειρές και βρίσκουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

$$\begin{aligned} (\beta) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-x)^{n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} ((-x)^n)' = -\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}, |x| < 1. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Ιδιότητες: $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$, $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{\beta}\|$, $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \|\vec{a}\| \|\vec{\beta}\| \cos \theta$, $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β) Η

$$\kappa(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + \lambda(-2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \mu\vec{w} = \vec{u} + 4\vec{v} + 2\vec{w}$$

γράφεται

$$(\kappa - 2\lambda - 1)\vec{u} + (\kappa + \lambda - 4)\vec{v} + (\kappa - \lambda + \mu - 2)\vec{w} = \vec{0}.$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την τελευταία σχέση προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa - 2\lambda & = & 1 \\ \kappa + \lambda & = & 4 \\ \kappa - \lambda + \mu & = & 2 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε $\kappa = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

γ) Αφαιρούμε την 1^η γραμμή από όλες τις επόμενες και έτσι προκύπτει η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2010 & 2011 & 2012 & 2013 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

α) $|A - \lambda I| = (1 - \lambda)(0 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$.

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -1$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_1 = 2}, [A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_1 = [1 \quad -1]'$.

$$\text{Για } \boxed{\lambda_2 = -1}, [A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x.$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\vec{x}_2 = [1 \quad 2]'$.

β) Με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφό του $T^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$T^{-1}AT = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$