

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΔΑΣΚ. : Χρήστος Σχοινάς, Καθηγητής – Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος, Ε.ΔΙ.Π.

Ονοματεπώνυμο Φοιτ.:

A.M.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2026 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ”

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

(1,3μ)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x - x^2$ και τον άξονα $x'x$ στο διάστημα $[0, 4]$.

(1,2μ)

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

α) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n}$

(1,3μ)

β) Να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $f(x) = \cosh x$ με κέντρο το 0.

(1,2μ)

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Αν $k < n$ από τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε τα n διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα.

β) Έστω ότι b_1 και b_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του R^n . Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $a_1 = b_1 - b_2$, $a_2 = 3b_1 + 3b_2$ και $a_3 = 2b_1 - 5b_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 3 & 6 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Έστω ο πίνακας

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές τιμές (ιδιοτιμές) και τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα (ιδιοδιανύσματα) του πίνακα A .

β) Να βρεθεί ο πίνακας T έτσι ώστε ο πίνακας $T^{-1}AT$ να είναι διαγώνιος και να υπολογιστεί το γινόμενο $T^{-1}AT$.

$\lim(ca_n) = c \lim a_n, \text{ } c \text{ σταθ.}$ $\lim(a_n + \beta_n) = \lim a_n + \lim \beta_n$ $\lim(a_n \cdot \beta_n) = \lim a_n \cdot \lim \beta_n$ $\lim \frac{a_n}{\beta_n} = \frac{\lim a_n}{\lim \beta_n}, \lim \beta_n \neq 0$ $\lim a_n^k = (\lim a_n)^k$ $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}, \lim a_n \geq 0$ $\lim a_n = \lim a_n $	$\lim(c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0) = \lim(c_k n^k)$ $\lim \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_1 n + c_0}{d_m n^m + d_{m-1} n^{m-1} + \dots + d_1 n + d_0} = \frac{c_k}{d_m} \lim n^{k-m}$
--	--

Av $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η ακολουθία a_n συγκλίνει στο μηδέν.

Av $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η ακολουθία a_n αποκλίνει στο άπειρο.

Αριθμητική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)d] = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \lambda^{n-1} = a_1 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 + a_1 \lambda^2 + \dots$

Μερικά αθροίσματα: $S_n = \sum_{k=1}^n a_1 \lambda^{k-1} = a_1 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}$

Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$ ισχύει: αν $|\lambda| < 1$, συγκλίνει στο $\frac{1}{1-\lambda}$,
αν $|\lambda| \geq 1$, αποκλίνει.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνουν. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει

Av $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Av $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ή $r = \lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο άπειρο.

Av $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$ ή $\lim \sqrt[n]{a_n} = k$, τότε η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ είναι $R = \frac{1}{k}$.

Για $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	Για $x \in (-1, 1)$, ισχύει $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$
---	--

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (2,5 μονάδες)

$$(\alpha) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/2} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2(1-x)^{1/2} \right]_0^{1-\varepsilon} = 2.$$

$$(\beta) E = \pi \int_0^4 f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx = \frac{512\pi}{15} \tau \cdot \mu.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2,5 μονάδες)

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5} \right)^n = \frac{1}{1-2/5} + \frac{1}{1+1/5} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} = \frac{15}{6}.$$

$$(\beta) \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \\ = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (3 μονάδες)

α) Έστω ότι τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0$$

Όμως τότε ισχύει ότι και

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + 0x_{k+1} + \dots + 0x_n = 0$$

απ' όπου διαπιστώνουμε ότι και τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

β) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$

Τότε

$$\lambda_1 (b_1 - b_2) + \lambda_2 (3b_1 + 3b_2) + \lambda_3 (2b_1 - 5b_2) = 0$$

ή

$$(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3)b_1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3)b_2 = 0$$

ή

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

απ' όπου βρίσκουμε $\lambda_1 = -\frac{7}{2}\lambda_3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3$ ή $\lambda_1 = -\frac{7}{2}c$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}c$, $\lambda_3 = c$, $c \in R$. Επομένως
τα διανύσματα a_1 , a_2 και a_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Όλες οι 3×3 υποορίζουσες του πίνακα A είναι ίσες με 0. Επίσης
όλες οι 2×2 υποορίζουσες του πίνακα A είναι ίσες με 0.
Άρα η τάξη του A θα είναι 1.

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

$$\alpha) |A - \lambda I| = (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 24 = 8 - 6\lambda + \lambda^2 - 24 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda + 2)(\lambda - 8) = 0$$

Οι χαρακτηριστικές τιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 8$.

$$\text{Για } \lambda_1 = -2, \quad [A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}'$.

$$\text{Για } \lambda_2 = 8, \quad [A - \lambda_2 I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases}$$

Οπότε ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του πίνακα A είναι το $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}'$.

β) Με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων δημιουργούμε τον πίνακα $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφό του $T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Άρα

$$T^{-1}AT = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$