# Εἰσαγωγή στήν Ἐπιστήμη καί στήν Τεχνολογία

(ἱστορία τοῦ Η/Μ - Μ/Υ)

Γεώργιος Παῦλος
αν. καθ. ΔΠΘ.

Ξάνθη 2014

# Φυσική θεωρία.

Κλασσική Μηχανική ⇒ {Κλασσική Ηλεκτροδυναμική, Σχετικότητα}

⇓

{Κβαντική Μηχανική, Κβαντική Η/Δ, Κβ. Θ.Π., ⋮}

(Στατιστική φυσική)

{Πολυπλοκότητα, Θερμοδυναμική, Εντροπία, Αυτοργάνωση, Τάξη από τό Χάος}

Μεγασκοπικό επίπεδο

Μακροσκοπικό επίπεδο

Μεσοσκοπικό επίπεδο

Μικροσκοπικό επίπεδο

; ? ? ;

Μυστήριο

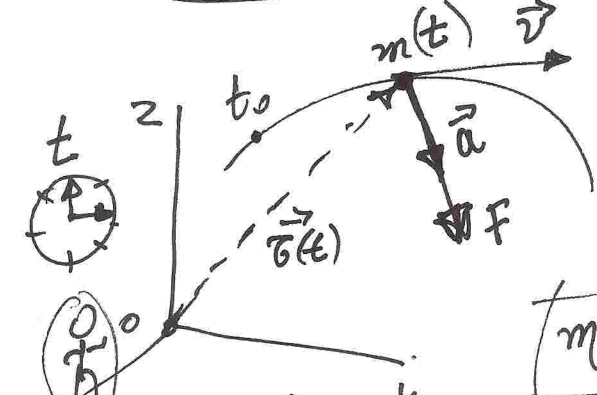
Κόσμος, φύση

Άνθρωπος, Θεός

; Μυστήριο ;

Einstein: Η ωραιότερη εμπειρία της επιθυμίας ...

## Δυναμική ύλικού σημείου (Κλασσική Μηχανική)




χώρος

(O,(x,y,z) ≡ Αδραν. Συσ. Αναφ.)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{P} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad m = \text{σταθ.}$$

m = αδρανειακή μάζα

m = Αδ. Μάζα

$\vec{F} \Longrightarrow$ {Μορφές Δύναμης}

(m = μάζα, q = φορτίο, ...)

$$\boxed{m_\alpha = m_\beta = m}$$

# ⊛ Τεχνολογία.

- Μίμηση της φύσης – επέκταση της φύσης
- Τεχνολογία:
  - ύλης
  - ενέργειας
  - πληροφορίας

- Παραγωγή: ύλης, ενέργειας, πληροφορίας
- Μεταφορά: ύλης, ενέργειας, πληροφορίας
- Χρήση: ύλης, ενεργειας, πληροφορίας

Παραγωγή | Χ Ε Π ⟹ Μεταφορά ⟹ Χρήση: Μ- Απ.

- Ενέργεια: Μετασχηματισμός – Μεταφορά

  Βαρυτική ⟹ Ηλεκτρική – Η/Μ ⟹ Θερμότητα, Κίνηση, Επικοινωνία

- Πληροφορία:
  - Αλφάβητο
  - Γλώσσα
  - Αλγόριθμος
  - Επεξεργασία

Πηγή —Κωδικοποίηση→ Μήνυμα ⟹ Αποκωδικοποίηση

Ύλη: Δομή ύλης – Νέα υλικά

Πεδία
- στοιχειώδη σωματίδια
- Άτομα – μόρια – μακρομόρια
- Αγωγοί – ημιαγωγοί – υπεραγωγοί
- κυκλώματα – ολοκληρωμένα κυκλώματα (ηλεκτρικά – ηλεκτρονικά)
- Πεδία (Η/Μ) – Ακτινοβολία

Σήματα ⇒
- Υπολογιστές – Αυτόματος έλεγχος
- Τεχνητή Νοημοσύνη
- κίνηση – Αναγνώριση – Απόφαση

Γλώσσα – Μηχανή:
- Φυσική γλώσσα
- Τυπική γλώσσα
- Γλώσσα μηχανής
- Δυαδικό σύστημα (0,1)
- Λογικά κυκλώματα

Αλγόριθμοι – Μηχανές Turing
Αυτόματα

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Φιλοσοφία<br>Ποίηση<br>Λόγος | ⟺ | Μαθηματική Θεωρία<br>Φυσική Θεωρία | ⟺ | Τεχνο-<br>-Λογία<br>Τεχνική |

Η ομορφιά θα σώσει τον Κόσμο

# Δυνάμεις εξ αποστάσεως



## Μορφές Δύναμης

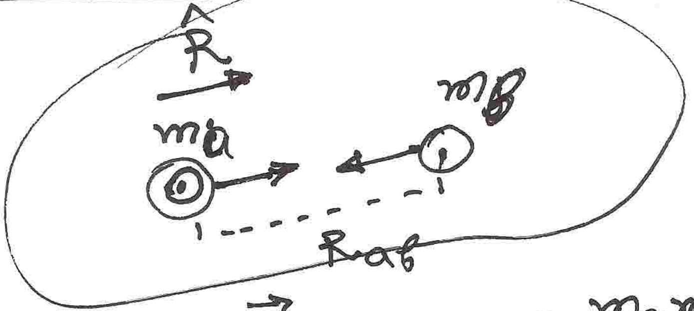
### Βαρύτητα:

$$\vec{F} = +G\frac{mM}{R^2}(-\hat{R})$$

$(m, M)$ = βαρυτική μάζα

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U^{\beta} \quad \left(U^{\beta} = -\frac{GmM}{R}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + U^{(\beta)}_{\Delta} = \sigma\tau\alpha\theta}$$




$$\vec{F}_{\alpha\beta} = +G\frac{m_\alpha m_\beta}{R^2}(-\hat{R})$$

$$\boxed{\hat{R} = \hat{R}_{\alpha\beta}}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U^{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} E^{\beta}_{\Delta}$$

$U^{\beta} \equiv$ Δυναμική ενέργεια βαρύτ.

### Ηλεκτρική Δύναμη

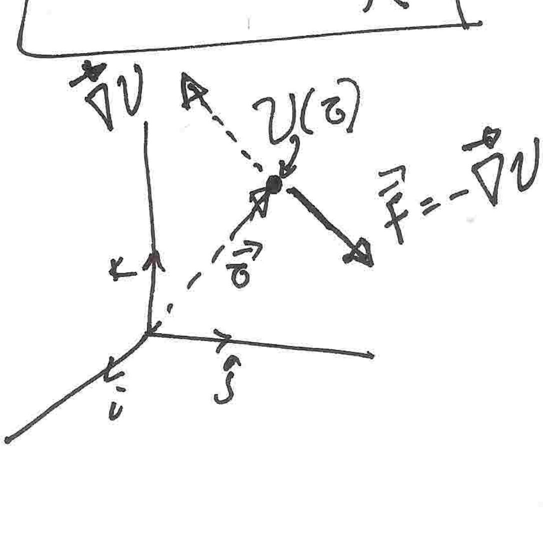
$qQ > 0 \Rightarrow$ Απωστική

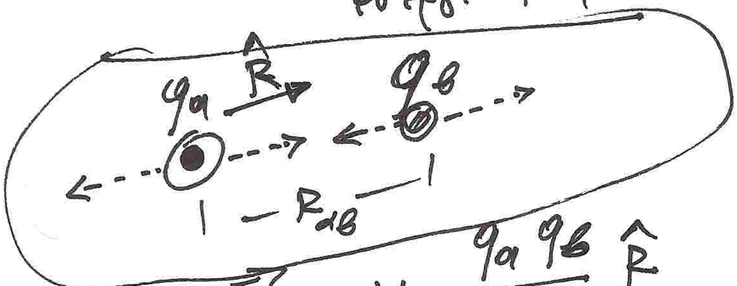
$qQ < 0 \Rightarrow$ Ελκτική

$$\vec{F}_{Cb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\hat{R}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U^{Cb}$$

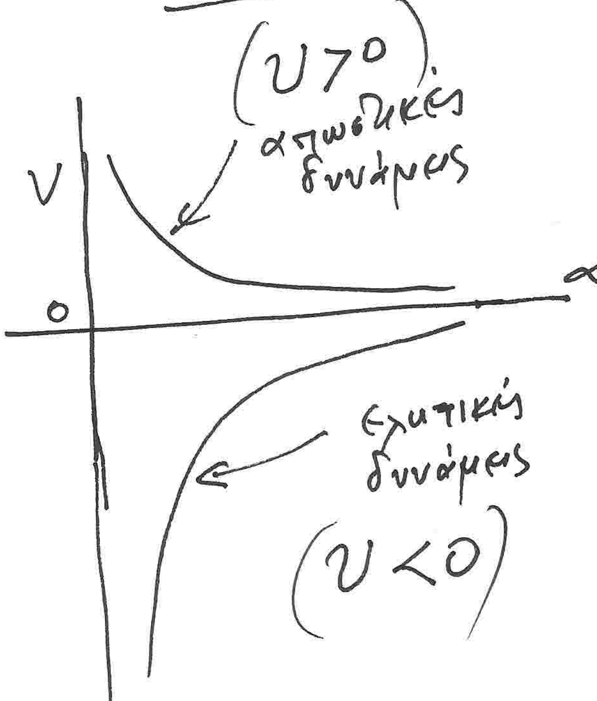
$$\boxed{U^{Cb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R}}$$




$$\vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha q_\beta}{R^2}\hat{R}$$

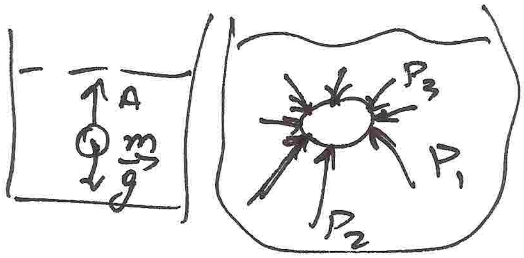
$$\hat{R} = \hat{R}_{\alpha\beta}$$



## Άνωση - Πίεση υγρών

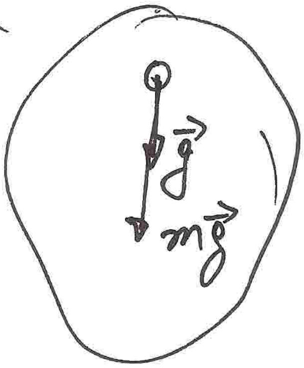
$$\vec{A} = -\rho_v V_\epsilon \vec{g}$$

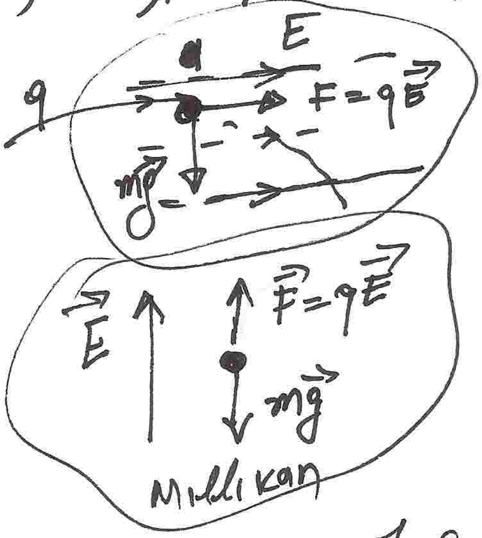
$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow \boxed{F = PS}$$

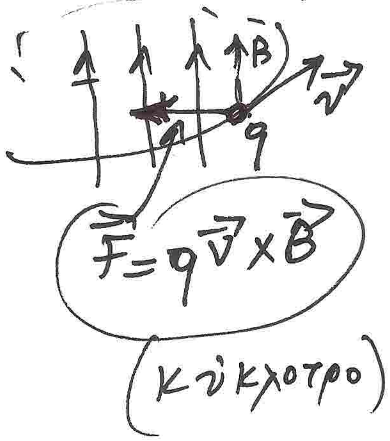



## Πεδία - Δύναμη (βαρυτικό, μαγνητικό, Ηλεκτρικό, Πυρηνικό Πεδίο)

$$\left( \vec{F}_B = m\vec{g},\quad \vec{F}_{\eta\lambda} = q\vec{E},\quad \vec{F}_{\mu\alpha\gamma} = q\vec{v}\times\vec{B} \right)$$




(Ενοποίηση των Δυνάμεων - Πεδίων) (Einstein).

Βαρυτικό, Ηλεκτρικό Μαγνητικό Ασ. Πυρηνικό, Ισχ. Πυρ

Μάξουελ

?

Glashow - Weinberg Salam

Chromodynamics

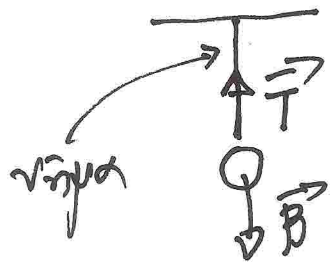
Grand unified theories

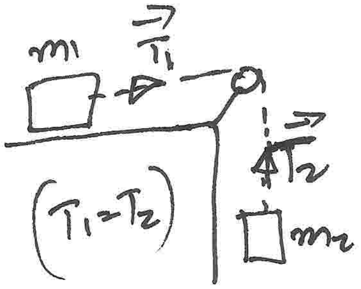
Supergravity
supersymmetry
Superstrings (branes)

?

# Μακροσκοπικές Δυνάμεις (αποτέλεσμα Ηλεκτρικών & Μαγνητικών Δυνάμεων)

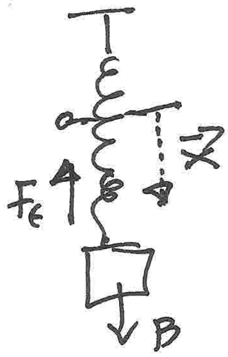
Νήματα ⟹ Τάση (ελαστική

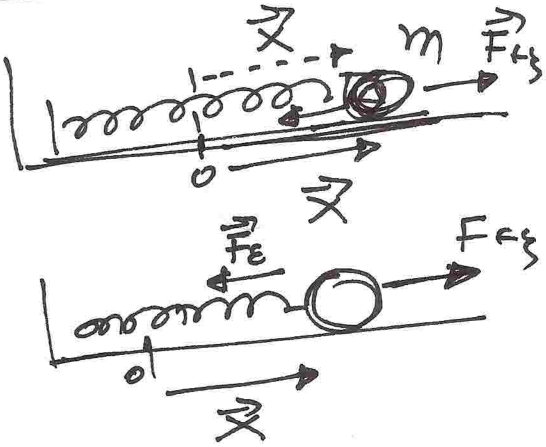


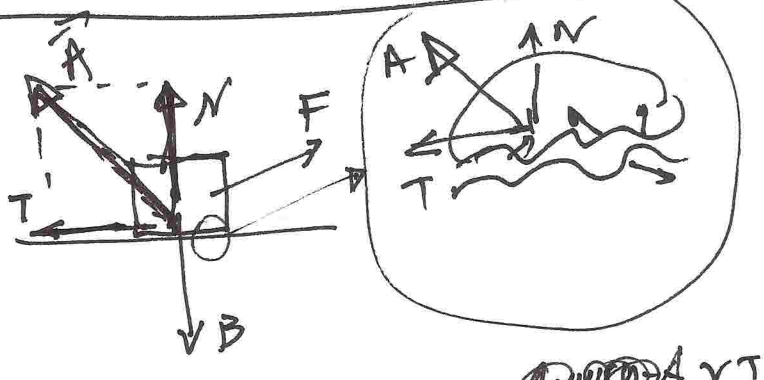

## Ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης (Νόμος Hooke)

$$\vec F_\epsilon = -k\vec x$$

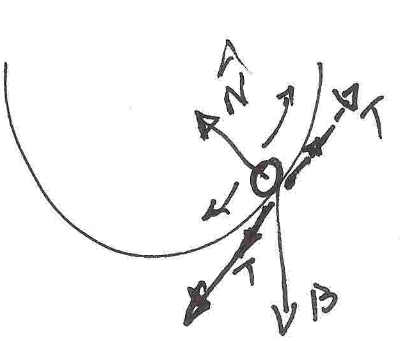



## Αντιστάσεις - Τριβές

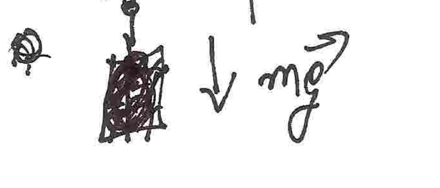



$$T = n N$$



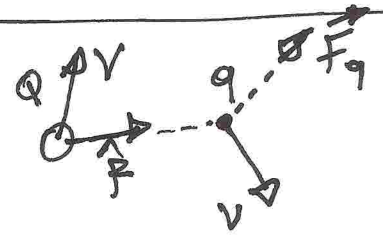

## Αντίσταση υγρών - αέρος

$$\boxed{\vec R = -b\vec v}$$



# Μαγνητική Δύναμη

$$\vec{F}_q^{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{v}\times(Q\vec{V}\times\hat{R})}{R^2}$$



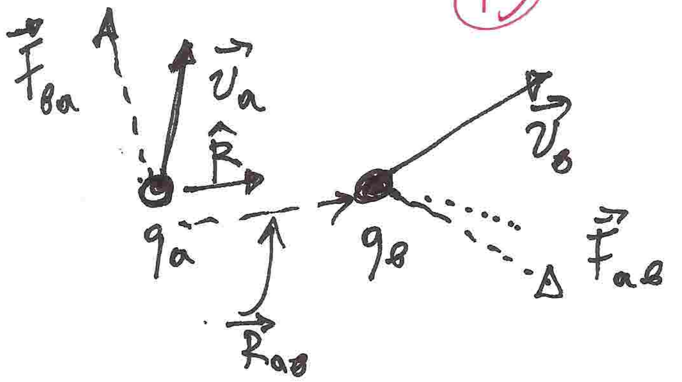

$$\vec{F}_q^{\mu} \neq -\nabla U^{\mu}, \quad \nexists\, U^m$$

(Δυνάμεις Ampere δέν περιέχουν Μαγνητική ενέργεια)

* { ορίζουμε μαγνητική ενέργεια στην θεωρία Πεδίου (Η/Δ) του Μάξουελ

$$\boxed{d\vec{F}_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,\vec{dl_i}\times(I\,\vec{dl_I}\times\hat{R})}{R^2}}$$

$$\vec{F}_{o\lambda} = \int dF \quad \text{(αρχή επαλληλίας)}$$




$\vec{F}_{a\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi} q v$

$$\boxed{\vec{F}_{a\to\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q_\beta\vec{v}_\beta\times(q_a\vec{v}_a\times\hat{R})}{R^2}}$$

Ηλ. ρεύματα


$$d\vec{F}_{a\to\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I_\beta\vec{dl}_\beta\times(I_a\vec{dl}_a\times\hat{R})}{R^2}$$

$$\left(I = \frac{dQ}{dt} = \text{ένταση Ηλ. ρευμ.}\right)$$

Αρχή επαλληλίας (βαρυτικές, Ηλεκτρ., Μαγνητικές Δυνάμεις)

$$\vec{F}_{o\lambda} = \left(\Sigma\vec{F}_i^{\beta}\right) + \left(\Sigma\vec{F}_i^{\eta\lambda}\right) + \left(\Sigma\vec{F}_i^{\mu\alpha\gamma}\right)$$

κίνηση

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\Sigma\vec{M} = d\vec{L}/dt$$

$$\boxed{\Sigma\vec{F} = 0, \quad \Sigma\vec{M} = 0}$$

ισορροπία

Δυνάμεις $\Longrightarrow$ Τροχιές

$$\vec F = \frac{d\, m\vec v}{dt} = m\vec a \Longrightarrow \boxed{\vec a = \frac{\vec F}{m}}$$

$$\frac{d\vec v}{dt} = \vec a \Rightarrow \vec v = \int \vec a\, dt + \vec C, \quad \vec C = \vec v_0 \qquad \int d\vec v = \int \vec a\, dt = \int \frac{\vec F}{m}\, dt$$

$$d\vec v = \vec a\, dt$$

$$\Delta \vec v = \int \vec a\, dt$$

$$\vec v - \vec v_0 = \int \vec a\, dt$$

$$v = v_0 + \int \vec a\, dt = v_0 + \int \frac{\vec F}{m}\, dt$$

$$d\vec r = \vec v\, dt \Rightarrow \int d\vec r = \int \vec v\, dt \Rightarrow \vec r = \int \vec v\, dt + \vec C, \quad \vec C = \vec r_0$$

$$\vec r - \vec r_0 = \int \vec v\, dt \Longrightarrow \vec r = \vec r_0 + \int \vec v\, dt$$

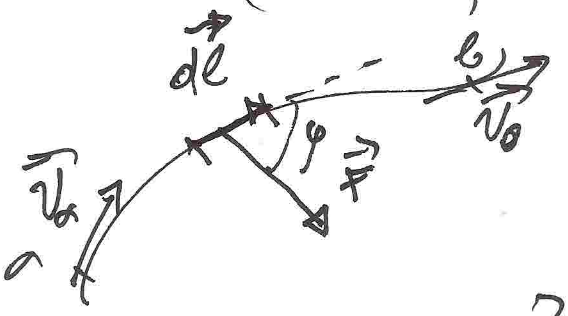
Τροχιές $\Longrightarrow$ Δυνάμεις

$$\vec r(t) \Longrightarrow \vec v = \frac{d\vec r}{dt} \Longrightarrow \vec a = \frac{d\vec v}{dt} \Longrightarrow \vec F = m\vec a = \frac{d\vec P}{dt}$$

## Νόμοι Διατήρησης

(Ενέργεια – Ορμή – Στροφορμή)

($E$ , $\vec P$ , $\vec L$)




$$dW = \vec F \cdot d\vec l = |\vec F||d\vec l| \cos\varphi$$

$$\boxed{W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta \vec F \cdot d\vec l}$$

$$W_{\alpha-\beta} = \frac{1}{2} m v_\beta^2 - \frac{1}{2} m v_\alpha^2$$

$$\int \vec F \cdot d\vec l = \sum \vec F_i \cdot d\vec l_i$$

## 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα της Μηχανικής

$$W_{\alpha\to\infty} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} m v_\beta^2 - \frac{1}{2} m v_\alpha^2 = \Delta E_K \quad (= \Delta T)$$

## 2ο Θεμελιώδες θεώρημα της Μηχανικής

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \quad \text{ή} \quad \left(\vec{F} = -\vec{\nabla} E_\Delta\right)$$

συντηρητικές Δυνάμεις

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$


C {Έργο συντηρητικών Δυνάμεων μηδέν για κλειστές τροχιές

## Δυναμική ενέργεια ($E_\Delta$)

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\Delta E_\Delta \,, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \left(-\vec{\nabla} E_\Delta\right)\cdot d\vec{l} = E_{\Delta\alpha} - E_{\Delta\beta}$$

$$= -\left(E_\Delta^\beta - E_\Delta^\alpha\right)$$

$$= \left(E_\Delta^\alpha - E_\Delta^\beta\right)$$

$$E_\Delta(\vec{r}) = \int_{r}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} = W_{r\to\infty} \qquad E_\Delta(\infty) = 0$$

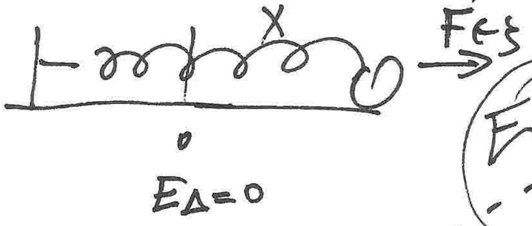
$$\Delta E_K + \Delta E_\Delta = W_{\alpha\to\beta} + \left(-W_{\alpha\to\beta}\right) = 0$$

$$\boxed{E_K + E_\Delta = \sigma\tau\alpha\theta}$$

## Φυσικό περιεχόμενο της $E_\Delta$

$E_\Delta$ = έργο εξωτερικής δύναμης για την δημιουργία μιας κατάστασης

(*) Το έργο της εξωτερικής δύναμης αποθηκεύεται ως Δυναμική ενέργεια




$E_\Delta = 0$ ... $\infty$

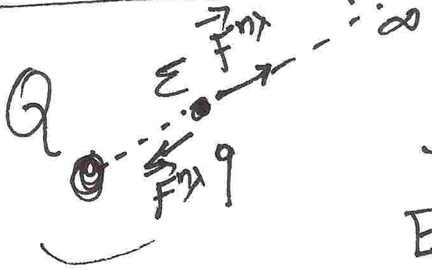
$$\int_0^x \vec F_{εξ}\cdot d\vec l = -\int \vec F_{ελ}\cdot d\vec l = \frac{1}{2}kx^2$$


$$E_\Delta^{β}(Σ) = \int_\infty^{Σ} \vec F^{εξ}\cdot d\vec l = -\frac{G\,mM}{r}$$

$$E_\Delta(Σ) = -\int_\infty^{Σ} \vec F\cdot d\vec l$$

$$\boxed{\vec F^{εξ} = -\vec F_{συνηρ.}}$$

$$E_\Delta(\infty) = 0$$




$$\vec F^{εξ} = -\vec F^{ηλ} \Rightarrow$$

$$E_\Delta^{ηλ}(Σ) = \int_\infty^{Σ} \vec F^{εξ}\cdot d\vec l = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R}$$

$$W_{α\to β} = -\Delta E_\Delta = E_α - E_β$$

$$W_{α\to β} = \Delta E_K$$

$$\vec F_{συν} = -\vec\nabla E_\Delta$$

$$W_{Σ\to\infty} = -\Delta E_\Delta = E_\Delta(Σ)$$

$$E_\Delta(Σ) = \int_\infty^{Σ} \vec F^{εξ}\cdot d\vec l$$

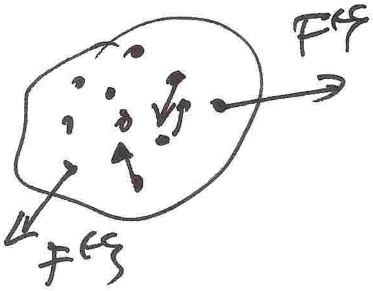
$\Delta U_\Delta$

ΔΕΚ

$W^{εξ}$ περιβάλλον

σύστημα

## Διατήρηση ορμής




$$\vec F_{ολ} = \vec F^{εσ}_{ολ} + \vec F^{εξ}_{ολ} = 0 + \vec F^{εξ}_{ολ}$$

$F^{εσ}_{ολ} = 0$ (Δράση = − Αντίδραση)

οι εσωτερικές δυνάμεις ανά δύο μηδενίζονται

$$\boxed{\vec F_{ολ} = \frac{d\vec P_{ολ}}{dt}}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec F^{εξ}_{ολ} = \frac{d\vec P_{ολ}}{dt}$$

$\vec P_{ολ} = \Sigma \vec P_i = σταθ.$ αν $\vec F^{εξ}_{ολ} = 0$

αν $\vec F^{εξ}_{ολ} = 0 \Rightarrow d\vec P_{ολ} = 0 \Rightarrow$

$\vec P_{ολ} = σταθ$

$$\boxed{\Sigma \vec P_i = σταθ.}$$

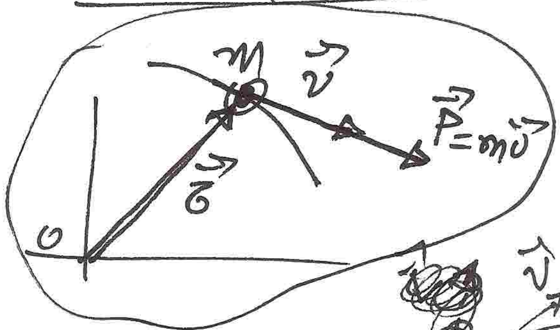
$\vec P_i = m_i \vec v_i$

$\vec P_{ολ} = \Sigma m_i \vec v_i$

## Διατήρηση στροφορμής

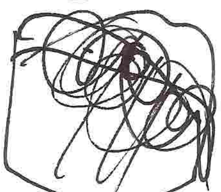
$(N^{εξ}_{ολ} = 0 \Rightarrow d\vec L = 0)$

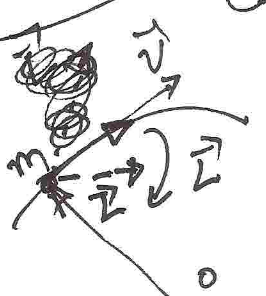
$(\vec r \times m\vec v = \vec r \times \vec P = \vec L)$

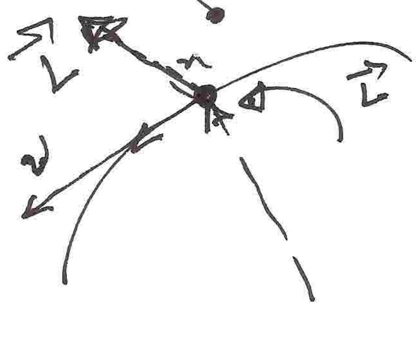


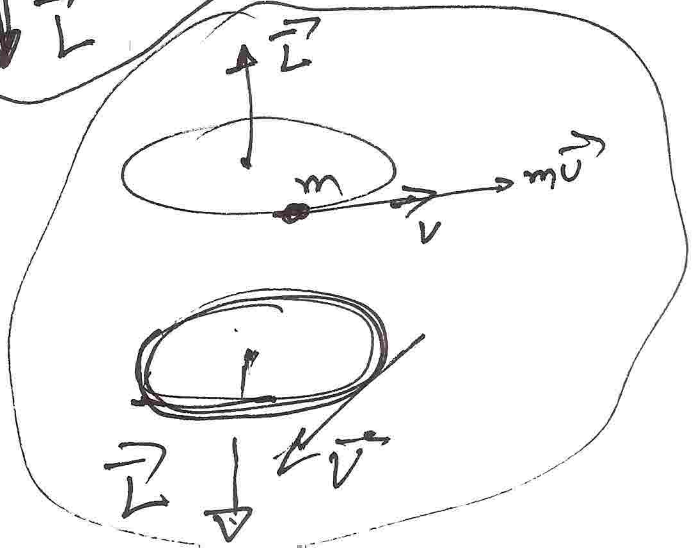


$\vec L = \vec r \times \vec P$

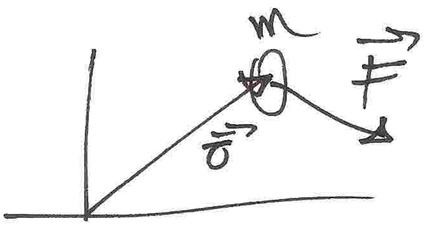




## Ροπή Δύναμης




$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$|\vec{M}| = r F \eta\mu\varphi$$

$$\vec{M}_{o\lambda} = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = M_{o\lambda}^{\epsilon\xi} + \cancel{M_{o\lambda}^{\epsilon\sigma}}=0$$

$$\vec{M}_{o\lambda} = M_{o\lambda}^{\epsilon\xi}$$

Θεμελιώδες Θεώρημα:

$$\boxed{\vec{M}_{o\lambda} = \frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}}$$

$$\vec{L}_{o\lambda} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{L}_i$$

$$\vec{M}_{o\lambda}^{\epsilon\xi} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt} = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{L}_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta}$$

έργο = $\vec{F}\cdot d\vec{l} = dW \Longrightarrow$ Ενέργεια

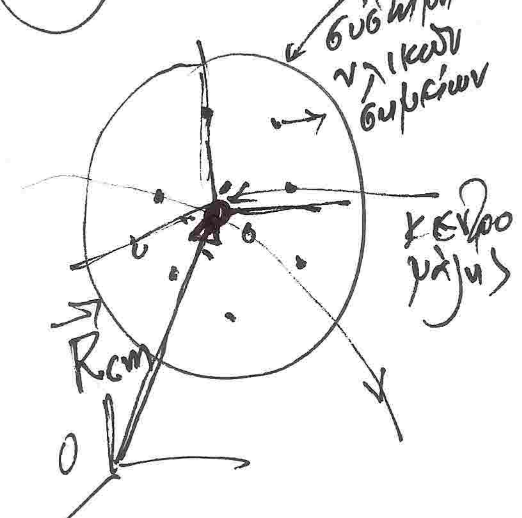
ώθηση = $\vec{F}(dt) = d\vec{p} \Longrightarrow$ Ορμή

γων. ώθηση = $\vec{M}\,dt = (d\vec{p})_{\gamma\omega\nu.} \Longrightarrow$ Στροφορμή,

($W$ = έργο) → Ενέργεια

$\Omega$ = ώθηση ⟹ Ορμή

$\Omega_{\gamma\omega\nu}$ = γων. ώθηση ⟹ Στροφορμή



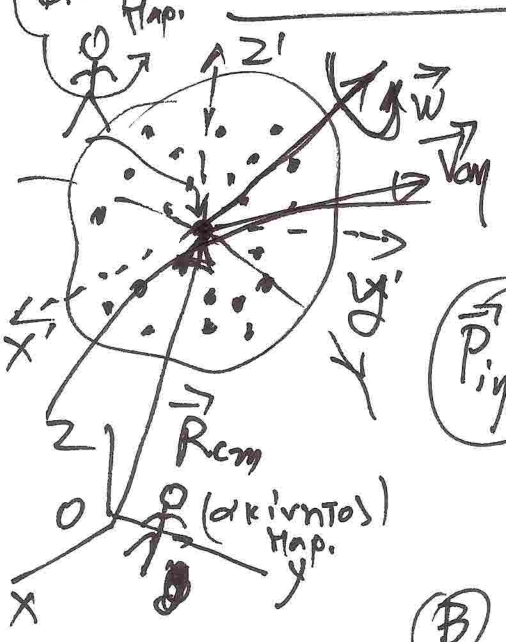

(*) Τό κέντρο μάζης κινείται ως όλη η μάζα και όλη η δύναμη και όλη η στροφορμή νά είναι συγκεντρωμένοι σέ αυτό

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{in} + \vec{L}_{cm}$$

$$E_K = E_{K,int} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

# Σύστημα Υλικών σωματιδίων




Φυσικά μεγέθη

(A)

$$\vec P_{ολ} = M_{ολ}\vec V_{cm}$$

$$\vec L_{ολ} = \vec L_{in} + \vec L_{cm}$$

$$E_{κ,ολ} = E_{κ,int} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$$

$$E_{Δ,ολ} = E_{Δ,in} + E_{Δ,εξ}$$

$$\vec P_{in} = 0$$

(B) Νόμοι κίνησης:

$$\vec F_{ολ}^{εξ} = \frac{d\vec P_{ολ}}{dt} = M\vec a_{cm}$$

$$\vec M_{ολ} = \frac{d\vec L_{ολ}}{dt}$$

$$\vec M_{cm} = \frac{d\vec L_{in}}{dt}$$

$$(\vec F_{ολ}^{εσ} = 0)$$

$$(\vec M_{ολ}^{εσ} = 0)$$

(Γ) Έργο – Ενέργεια

$$W_{ολ} = ΔE_{κ,ολ}$$

$$W_{ολ} = W_{ολ}^{εξ} + W_{ολ}^{εσ} = ΔE_{κ,ολ}$$

$$W_{ολ}^{εξ} + (-ΔE_Δ^{εσ}) = ΔE_{κ,ολ}$$

$$\Rightarrow W_{ολ}^{εξ} = Δ(E_κ + E_Δ^{εσ})$$

$$W^{εξ} = Δ(U)$$

Είναι δυνατόν αλλά όχι πάντα

$$(W_{ολ}^{εξ} = -ΔE_Δ^{εξ})$$

$$ΔE_Δ^{εξ} + ΔE_κ + ΔE_Δ^{εσ} = 0$$

$$E_κ + E_Δ^{εσ} + E_Δ^{εξ} = E_{ολ}$$

(ολική ενέργεια $= E_{ολ}$)

Θερμοδυναμική →

$$U_{εσ} = E_{κ,in} + E_{Δ,in} = E_κ^{εσ} + E_Δ^{εσ}$$

(ολική εσωτερική)

(φυσική ενέργεια)

$$U = E_{κ,in} + E_{κ,cm} + E_{Δ,in} = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + E_{κ}^{εσ} + E_Δ^{εσ}$$

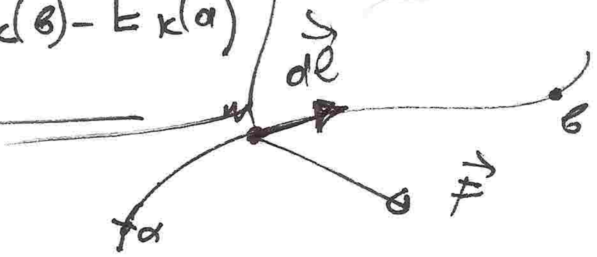
$$\boxed{W_{ολ}^{εξ} = ΔU}$$

Θερμοδυναμική

# ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

## Δυναμική ενέργεια ( Έργο – Ενέργεια)

$$\boxed{W_{\alpha\to\beta} = \int_\alpha^\beta \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = E_K(\beta) - E_K(\alpha)}$$




Απόδειξη

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (1)$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{\ell} = m\,\vec{v}\cdot d\vec{v} = m\left(\tfrac{1}{2}dv^2\right) = \tfrac{1}{2}m\,dv^2 = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$

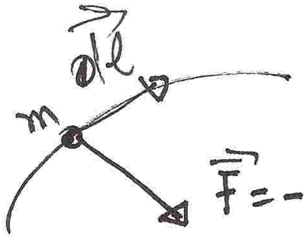
$$\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\int_\alpha^\beta \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \int_\alpha^\beta dE_K = E_K\Big|_\alpha^\beta = E_K(\beta) - E_K(\alpha)$$

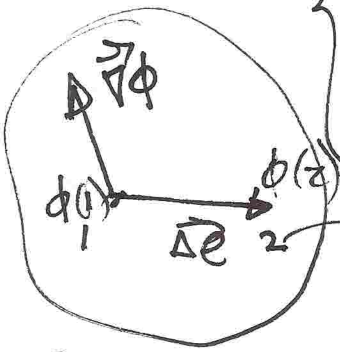
$$W_{\alpha\beta} = \int_a^\beta \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -\int_\alpha^\beta \vec{\nabla}E_\Delta\cdot d\vec{\ell} = -\int_\alpha^\beta dE_\Delta = -\left(E_\Delta(\beta) - E_\Delta(\alpha)\right) = -\Delta E_\Delta$$

$$\boxed{W_{\alpha\to\beta} = E_\Delta(\alpha) - E_\Delta(\beta)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla}E_\Delta\cdot d\vec{\ell} = dE_\Delta \\ \int dE_\Delta = \Delta E_\Delta \end{array}\right\}$$




$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\Delta$$




$$\phi(2) - \phi(1) = \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{\ell}$$

$\beta \Rightarrow \infty$ = Σημείο: $E_\Delta = 0$

$$W_{\alpha\to\infty} = E_\Delta(\alpha) - E_\Delta(\infty) = E_\Delta(\alpha) = \int_\alpha^\infty \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

Τό έργο Δύναμης $\Longrightarrow$ (Κινητική ενέργεια)

ή δυναμική ενέργεια προσφέρεται από τόν φορέα της Δύναμης στό σώμα

Περιβάλλον $\xrightarrow{F}$ Σώμα

$\Delta E_\Delta \Longrightarrow \Delta E_K$

Ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_k$) συγκεντρώνεται πάνω στήν μάζα (m)

$\boxed{v \sim c}$

$m_0 c^2$ $\quad \vec{v} = 0$

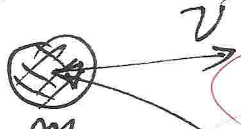
ακίνητο σώμα

$m_0$

$$E = m_0 c^2$$ ← (ενέργεια ηρεμίας)

στόν όγκο τού $m_0$ ἔχουμε συμπύκνωση ἐνέργειας ($m_0 c^2$)

$\vec{v}$



$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\quad \boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$$

$$E = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\boxed{E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2}$$

$$\boxed{E_k = \int_0^v \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 \qquad m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ὅταν η m μεταβάλλεται μέ τήν ταχύτητα

Κινητική ενέργεια $\Longrightarrow$ (m)

(Αστρόβιλα ή Συντηρητικά πεδία Δύναμης)

Δυναμική ἐνέργεια $\Longrightarrow$ (Πεδίο Δύναμης στόν χώρο)

Ἡ δυναμική ἐνέργεια συγκεντρώνεται στίς περιοχές τού χώρου μέ πεδία Δύναμης

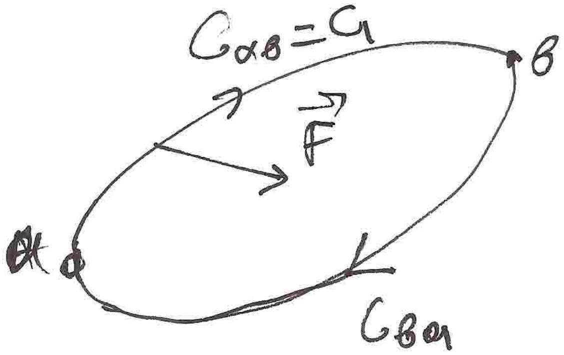
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_\Delta} \Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$$

Συντηρητικό πεδίο Δύναμης $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0 \quad \text{(ταυτότητα)}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{S} \quad \text{(Θεώρημα Stokes)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Longrightarrow \boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0}$$ (Ἔργο κλειστής τροχιάς = 0)

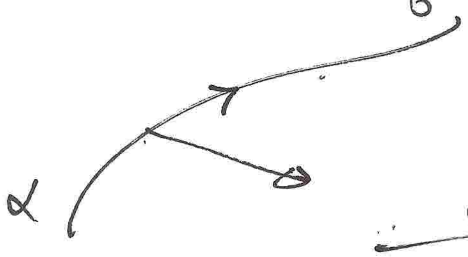



$$\left\{\begin{array}{l} \vec F = -\vec\nabla E_\Delta \\ \vec\nabla \times \vec F = 0 \end{array}\right.$$

$$\oint_C \vec F\cdot d\vec l = 0 \Rightarrow \int_{\alpha (C_1)}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l + \int_{\beta (C_2)}^{\alpha} \vec F\cdot d\vec l = 0$$

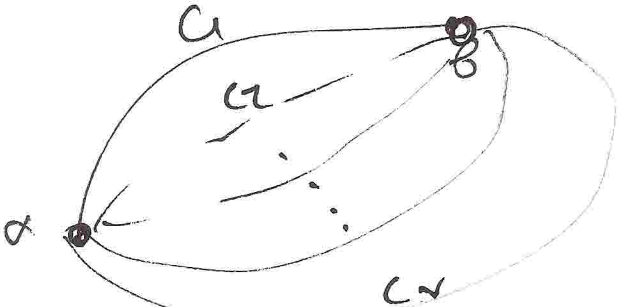
$$\boxed{\int_{\alpha (C_1)}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l = -\int_{\beta (C_2)}^{\alpha} \vec F\cdot dl} \Rightarrow \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l = -\int_{\beta}^{\alpha} \vec F\cdot d\vec l}$$

Ταυτότητα




$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l = -\int_{\beta}^{\alpha} \vec F\cdot d\vec l$$

$$W_{\alpha\to\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l = \text{ανεξάρτητο της τροχιάς}$$




$$\int_{\alpha C_1}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l = -\int_{\beta (2)}^{\alpha} \vec F\cdot d\vec l = \int_{\alpha (2)}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l$$

$\int_{\alpha}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l =$ το ίδιο για κάθε (C).

$$\boxed{E_\Delta(\alpha) - E_\Delta(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \vec F\cdot d\vec l \quad \forall C}$$

Συντηρητικά αστρόβιλα πεδία.

$\vec\nabla \times \vec F = 0 \Rightarrow \vec F = -\vec\nabla E_\Delta$ (Για αστρόβιλα πεδία σε κάθε σημείο (Σ) μπορώ του χώρου να ορίζω $E_\Delta(\Sigma)$

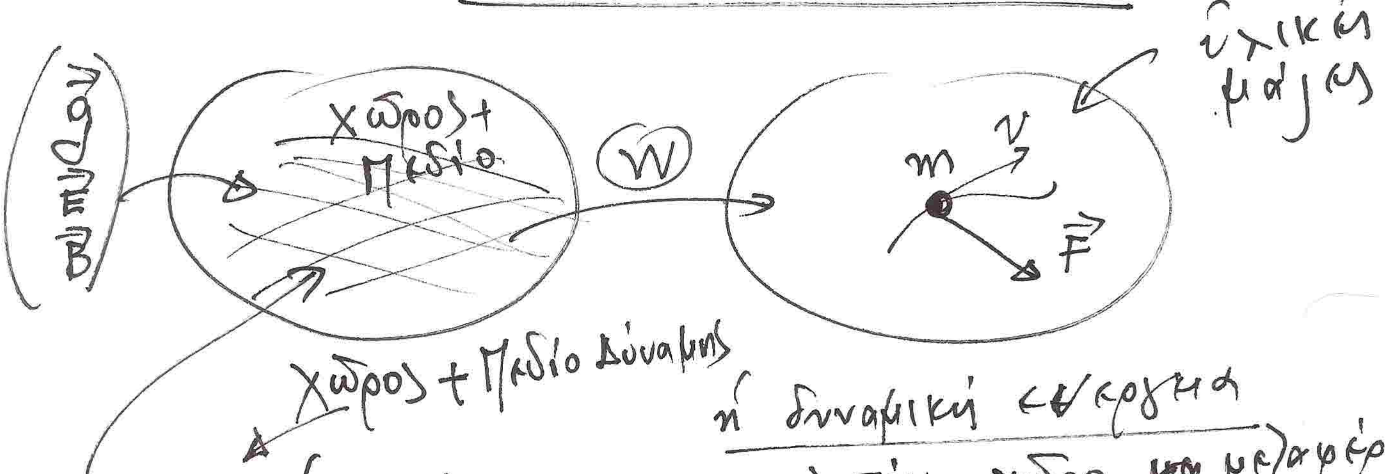
$$\boxed{E_\Delta(\Sigma) = E_\Delta(\Sigma_0) - \int_{\Sigma_0}^{\Sigma} \vec F\cdot d\vec l}$$

$\Downarrow$

$$-\Delta E_\Delta = E_\Delta(\Sigma) - E_\Delta(\Sigma_0) = \Delta E_K = E_K(\Sigma_0) - E_K(\Sigma) \Rightarrow$$

$$\Delta E_\Delta + \Delta E_K = 0 \Rightarrow E_\Delta + E_K = \text{σταθ.}$$

# Μεταφορά ενέργειας




$$E_\Delta = \int u_\Delta \, dV$$

$$u_\Delta = \frac{dE_\Delta}{dV}$$

ή δυναμική ενέργεια από τον χώρο μεταφέρεται και γίνεται κινητική ενέργεια των μαζών (m) μέσω της δύναμης και του έργου

$$W = \int \vec F \cdot d\vec l \; \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} W = \Delta E_K \\ W = -\Delta E_\Delta \end{pmatrix}$$

$W > 0 \Longrightarrow \Delta E_K > 0$, $\Delta E_\Delta < 0$

$W < 0 \Longrightarrow \Delta E_K < 0$, $\Delta E_\Delta > 0$

$W > 0$: (χώρος) $\xrightarrow[W>0]{\Delta E_K > 0}$ (μάζα m) — αύξηση της $E_{κιν}$

$\Delta E_\Delta < 0$ (ελάττωση της ενέργειας του χώρου); $\Delta E_K > 0$

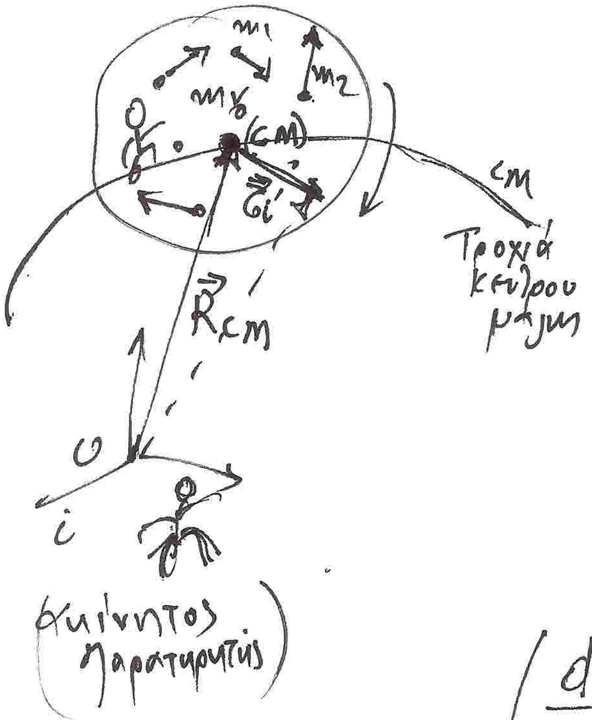
(ο χώρος προσφέρει ενέργεια)

$W < 0$: (χώρος) $\xleftarrow[\Delta E_K < 0]{W<0}$ (m)

$\Delta E_\Delta > 0$ (αύξηση της δυν. ενέργειας του χώρου)

(ελάττωση της $E_K$)

# Σύστημα υλικών σωματιδίων (Έργο - Ενέργεια)




$$\boxed{\vec{R}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}}$$

$\vec{r}_i'$ = θέση ως προς το σύστημα Αν. του Κ. Μάζης

$\boxed{\vec{r}_i = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_i'}$ (θέση ως προς OXYZ)

$\vec{v}_i'$ = Ταχύτητα ως προς το κέντρο μάζης

$$\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \vec{V}_{cm} + \vec{v}_i' = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}}$$

## Κινητική ενέργεια

$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ = ολική κινητική ενέργεια.

θέτοντας $\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}_{cm}$ παίρνουμε

$$E_K = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \underline{\sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2} + \underline{\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right) V_{cm}^2}$$

($v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, ταυτότητα εσ. γινομένου)

$E_K = \underline{E_{K cm}} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2$, $\underline{E_{K cm} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2}$ (κινητική ως προς το Κ.Μ)

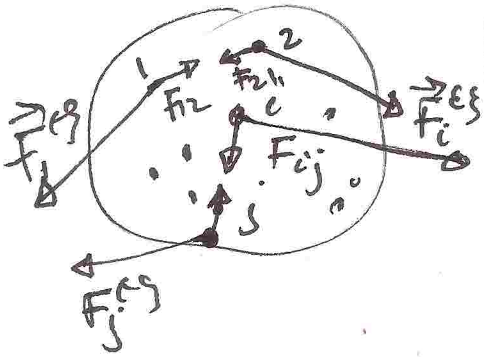
## Δυναμική ενέργεια (Δυνάμεις που δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα)

η $E_Δ$ εξαρτάται από τις αποστάσεις μέσω της δύναμης άρα η Δυναμική ενέργεια είναι ίδια για όλα τα Αδ. συστήματα αναφοράς

## Γενικό Θεώρημα (θεμελιώδες)

$$W^{ολ} = W^{εξ} + W^{εσ} = \Delta E_K^{ολ}$$

$W^{εξ}$ = έργο εξωτερικών δυνάμεων
$W^{εσ}$ = έργο εσωτερικών δυνάμεων
$E_κ^{ολ}$ = ολική κινητική ενέργεια




(οι εσωτερικές δυνάμεις ανά ζεύγη μηδενίζονται λόγω δράσης αντίδρασης)

όμως το έργο των δεν μηδενίζεται

$$W^{εσ} \neq 0 \qquad \boxed{\vec F^{ολ(εσ)} = 0}$$

Το έργο των εσωτερικών δυνάμεων δίδεται από την μεταβολή της εσωτερικής Δυναμικής ενέργειας

$$\boxed{W^{εσ} = -\Delta E_Δ^{εσ}}$$

Θα δούμε ότι για συντηρητικές δυνάμεις ισχύει

$$E_Δ^{εσ} = \sum_{i \neq j} E_Δ(i,j)\,, \quad E_Δ(i,j) = \text{δυναμική ενέργεια του ζεύγου } (i,j)$$

Στο άθροισμα αυτό κάθε ζεύγος $(i,j)$ προσφέρει εσ. Δυναμική ενέργεια $E_Δ(i,j)$. κάθε ζεύγος προστίθεται μία φορά. Για αυτό

$$\boxed{E_Δ^{εσ} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} E_Δ(i,j)}$$

Βάσει αυτών έχουμε το θεμελιώδες θεώρημα

$$W^{εξ} + W^{εσ} = \Delta E_κ \Rightarrow \boxed{W^{εξ} = \Delta E_κ + \Delta E_Δ^{εσ}}$$

αντικαθιστώντας $\boxed{W^{εσ} = -\Delta E_Δ^{εσ}}$

ή $W^{εξ} = \Delta U_{int}$ όπου $\boxed{U_{int} = U_{εσ} = E_κ + E_Δ^{εσ}}$

για $V_{cm} = 0$

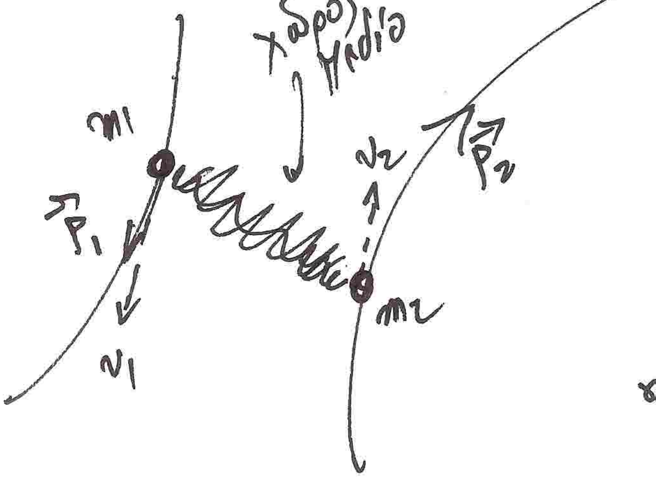
Συνήθως ως εσωτερική ενέργεια την θεωρούμε ως προς το Κ.Μ. τότε έχουμε

$$U_{int} = \underline{E_{K}^{εσ} + E_{Δ}^{εσ}} \quad (\text{ως προς το ΚΜ})$$

ενώ το $\underline{E_K + E_Δ^{εσ}} = \underline{E_K^{εσ} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + E_Δ^{εσ}} = U$

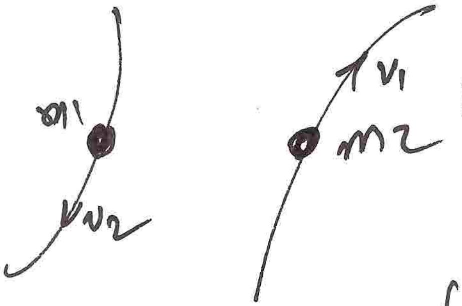
το ονομάζουμε φυσική ενέργεια

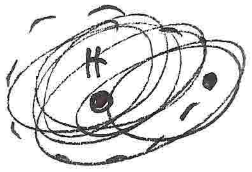
## Πεδία - Αλληλεπίδραση - Διατήρηση




$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$



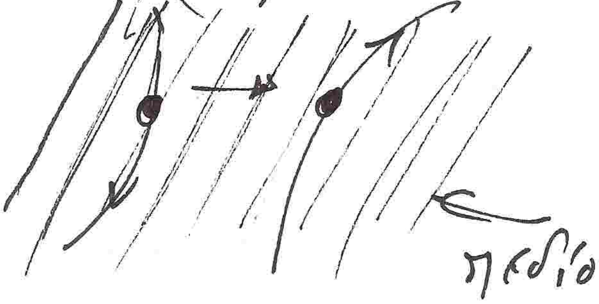




$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = σταθ.$$

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = σταθ.$$

$$E_{K1} + E_{K2} + E_Δ(1,2) = σταθ.$$

(αλληλεπίδραση της αποστάσεως)




$E_Δ \to$ (πεδίο - χώρος)

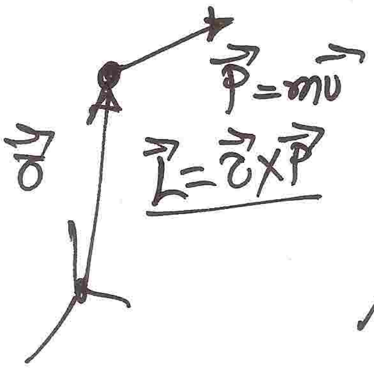
$E_{K1}, E_{K2}, \dots \to (m_1, m_2, \dots)$

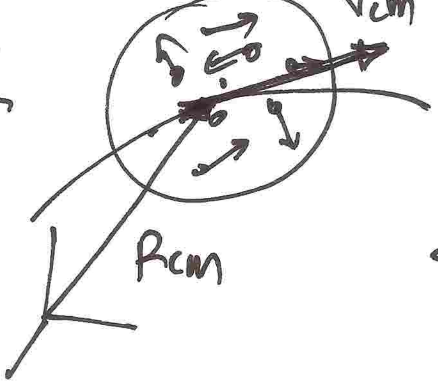
$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, L_1, L_2 \dots) \to (m_1, m_2, m \dots)$

αλληλεπίδραση μέσω πεδίου

(ανταλλαγή - μεταφορά ενέργειας, ορμής, στροφορμής)

# ορμή – Στροφορμή



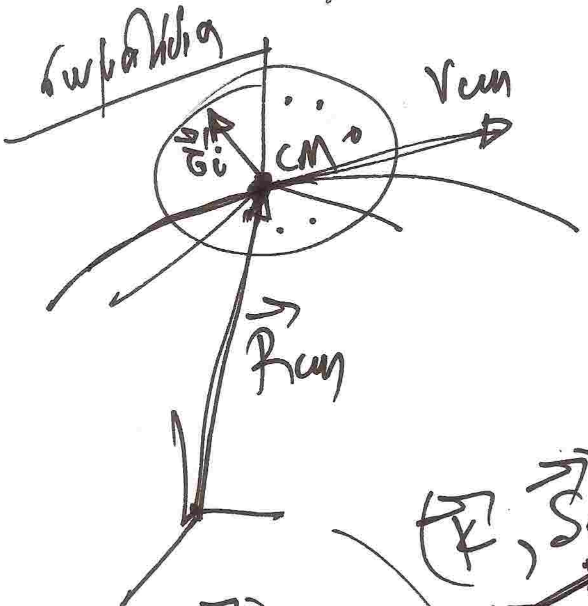




$$\vec P_{ολ} = M\frac{d\vec R}{dt}$$

$$\cancel{\vec L_{ολ} = \vec R \times \vec P_{ολ}}$$

$$\vec P_{ολ} = M\vec V_{cm}$$

$$\vec P_{ολ} = M\vec v_{cm} \quad (\vec P' = 0) \quad \sum m_i \vec v_i' = 0$$

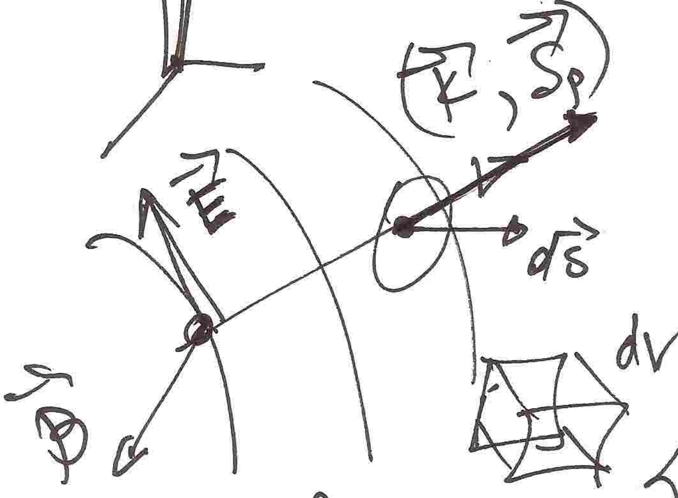



$$\vec r_i = \vec R + \vec r_i'$$

$$\vec v_i = \vec v_{cm} + \vec v_i'$$

$$\vec a_i = \vec a_{cm} + \vec a_i' + (\dots \text{coriolis})$$

$$\vec L_{ολ} = \vec L_{cm} + \vec L'$$




Πεδίο

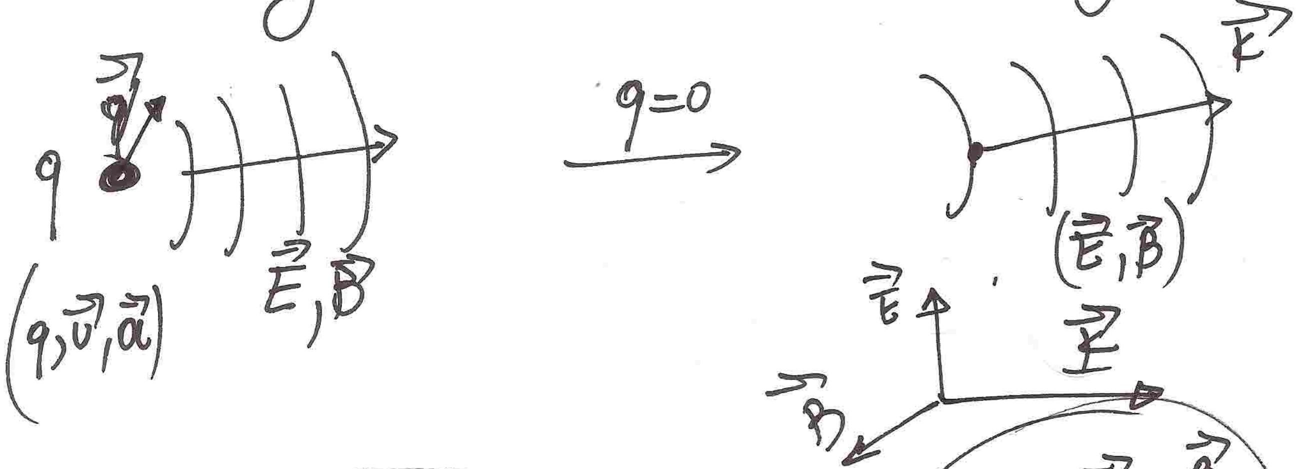
(Ροή ενεργειας – ορμής – Στροφορμής)

$$\vec S_p = \frac{\vec E \times \vec B}{\mu_0}, \quad \vec S_p \cdot d\vec s = \left(\frac{dE_{HM}}{dt}\right)_{ds}$$

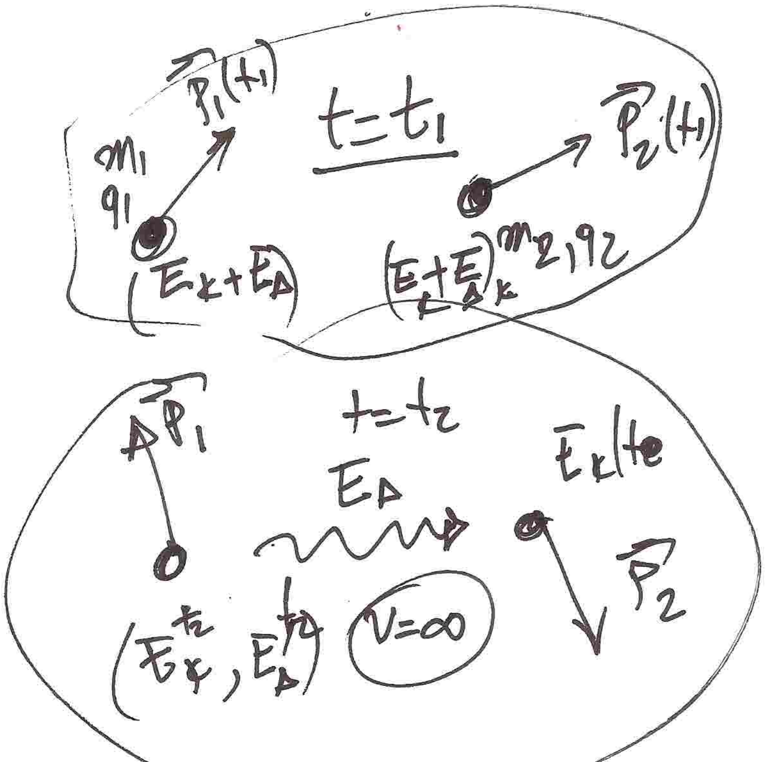
$$\vec g = \frac{d\vec P_{HM}}{dV} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec S$$

$c_{em}$

$$\vec{\mathcal L}_{em} = \vec r \times \vec g(\vec r) = \frac{d\vec L_{em}}{dV}$$

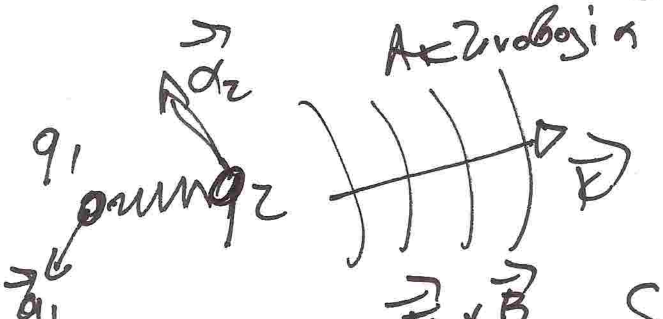




$$S_p = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$




$$\begin{cases} \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) \\ \vec{L}_1(t_1) + \vec{L}_2(t_1) = \vec{L}_1(t_2) + \vec{L}_2(t_2) \\ E_\Delta(t_1) + E_{K1}(t_1) + E_{K2}(t_1) = E_K^1(t_2) + E_K^2(t_2) + E_\Delta(t_2) \end{cases}$$

$$E_K^1 + \underbrace{E_K^2}_{} + E_\Delta = \sigma\tau\alpha\theta$$




$$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = S$$

$$\boxed{E_{K1} + E_{K2} + E_\Delta + E_{\alpha\kappa\tau\iota\nu} = \sigma\tau\alpha\theta}$$

# Σωματίδια – Πεδία (Νόμοι Διατήρησης)

**Στατικά πεδία** Στιγμιαία μεταφορά ($v=\infty$) μέσω του πεδίου – χώρα ύλης – ενέργειας, ορμής – στροφορμής

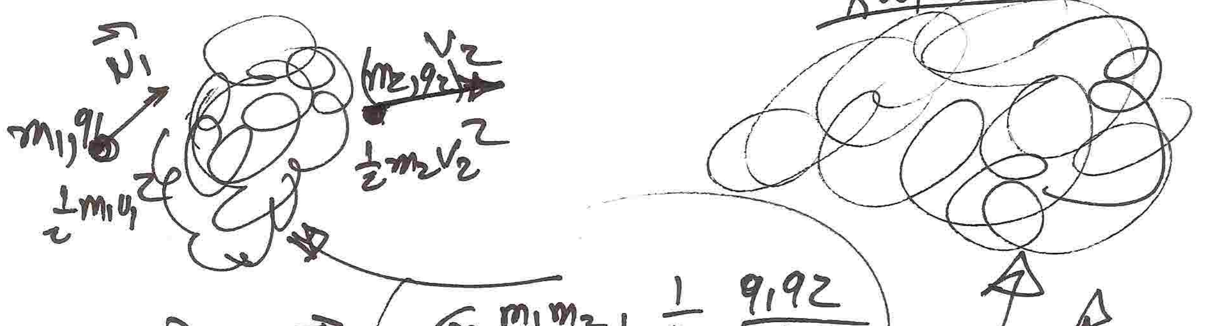
$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots = \text{σταθ.}\ (\text{ορμή}), \qquad \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots = \text{σταθ}\ (\text{στροφορμή})$$

$$\left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \dots + K\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \left(-G\frac{m_1 m_2}{R_{12}}\right) = \text{σταθ.}\right)$$

$$E_K^{\text{σωμ}} + E_\Delta^{\eta} + E_\Delta^{\beta} = \text{σταθ.}$$

Χώρος – Πεδία

Ενέργεια, Δυναμική πεδίων ($\vec{g}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$)




$$\longleftarrow R_{12} \longrightarrow \quad -G\frac{m_1 m_2}{R_{12}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{R_{12}}$$

Μαγνητική ενέργεια

$$U^m = \frac{1}{2} L I^2$$

Ηλεκτρικά ρεύματα

$q_1 v_1,\ q_2 v_2 \dots$

$q_1$, $q_2$

$L_1$, $I_1$, $I_2$, $M_{12}$, $L_2$

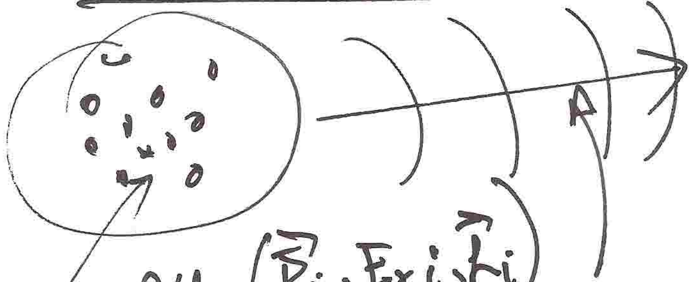
$$\left(U^m = \sum \frac{1}{2} M_{jk} I_j I_k\right)$$

$$\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

$L$ = αυτεπαγωγή

$M$ = Αμοιβαία επαγωγή

# Δυναμικά Πεδία (Ακτινοβολία)




σωμάτια φορτία $\left(\vec{P}_i, E_{\kappa i}, \vec{L}_i, E_\Delta\right)$

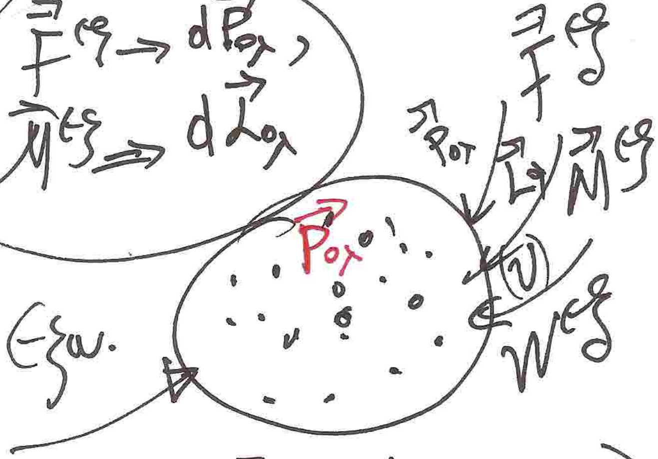
Χώρος $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_\Delta^{el} \text{ στατική} \\ E_\Delta^{m} \ (\text{Αλ} - \text{Μαγ.}) \end{array} \right.$

Ακτινοβολία (ΗΜ) ή βαρύτη

$$\vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$$

για ισχυρά πεδία (μεγάλες μάζες) βαρύτητος που διαταράσσονται $\Longrightarrow$ Ακτινοβολία βαρύτητας (κύματα βαρύτητας) (Einstein)

$\vec{F}^{\varepsilon\xi} \to d\vec{P}_{o\lambda}$,
$\vec{M}^{\varepsilon\xi} \Rightarrow d\vec{L}_{o\lambda}$




Σύστημα

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\sigma} + \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi}$$

$$\boxed{\vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt}} \Longrightarrow \vec{P}_{o\lambda} = \text{σταθ}, \ \vec{F}^{\varepsilon\xi} = 0$$

$$\vec{M}_{o\lambda} = \vec{M}^{\varepsilon\xi} + \vec{M}^{\varepsilon\sigma}$$

$$\boxed{\vec{M}_{o\lambda} = \frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}} \quad \boxed{\vec{M}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}}$$

$$\vec{L}_{o\lambda} = \text{σταθ.} \quad \vec{M}^{\varepsilon\xi} = 0$$

$\vec{P}_{o\lambda} = \Sigma \vec{P}_i$, $\vec{L}_{o\lambda} = \Sigma \vec{L}_i$,

$E_{\kappa o\lambda} = \Sigma E_\kappa(i)$, $E_{\Delta o\lambda} = E_\Delta^{\varepsilon\sigma} + E_\Delta^{\varepsilon\xi}$

$$W^{\varepsilon\xi} = \Delta E_\kappa + \Delta E_\Delta^{\varepsilon\sigma}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} W^{\varepsilon\xi} = -\Delta E_\Delta^{\varepsilon\xi} \\ \Delta E_\kappa + \Delta E_\Delta^{\varepsilon\sigma} + \Delta E_\Delta^{\varepsilon\xi} = 0 \end{array}}$$

διατήρηση ολ. ενέρ.

## Στερεό

$$\boxed{\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\,\vec{\omega}}$$

$U^{\epsilon\sigma} = E_K + E_\Delta$ ← Σύστημα

$\vec{P}^{\epsilon\sigma}_{o\lambda} = \vec{P}_{o\lambda}$

$\vec{L}_{\epsilon\sigma} = \Sigma \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$

CM

(Περιβάλλον)

$\vec{F}^{\epsilon\xi} \to d\vec{P}_{o\lambda}/dt$

$\vec{M}^{\epsilon\xi} \to d\vec{L}_{o\lambda}/dt$

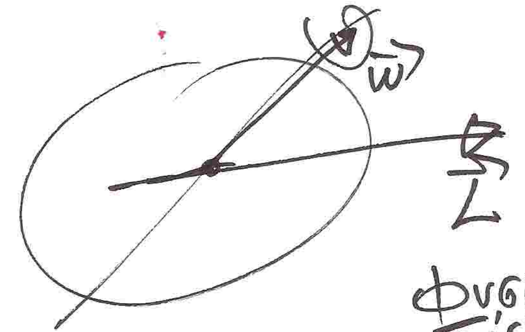
$\Delta W^{\epsilon\xi} \to \Delta\left(E_K + E_\Delta^{\epsilon\sigma}\right)$

$E_K^{o\lambda} = E_K^{CM} + E_K^{\epsilon\sigma\omega}$

$L^{\epsilon\sigma} = \Sigma \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$

$P^{o\lambda} = P^{\epsilon\sigma} = M\vec{V}_{cm}$

$$\left(\begin{aligned} E_K^{\epsilon\sigma} &= \tfrac{1}{2} m_i v_i'^2 \\ E_K^{cm} &= \tfrac{1}{2} M V_{cm}^2 \end{aligned}\right)$$




$$\boxed{\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\,\vec{\omega}}$$

$E_\Pi + E_\sigma =$ σταθ

$\vec{P}_\Pi + \vec{P}_{\sigma\omega} =$ σταθ

$\vec{L}_\Pi + \vec{L}_{\sigma\omega} =$ σταθ.

Φυσικό Σύστημα

$\left(\vec{E}, \vec{P}, \vec{L}\right)_{\sigma\omega\mu}$ → σωματίδια

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

(Νόμοι Νεύτωνος)

$\vec{E}, \vec{P}, \vec{L}$

Πεδία

$\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix}\vec{E} \\ \vec{B}\end{pmatrix} \sim (\rho, \vec{J})$

$\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix}\vec{E} \\ \vec{B}\end{pmatrix} \sim (\rho, \vec{J})$

$\left(\vec{E}, \vec{P}, \vec{L}\right)_\Pi$

Νόμοι Μάξουελ

$(\rho, \vec{J}, \vec{E}, \vec{B})$

Αλληλεπίδραση

$E, \vec{P}, L$

(Μεταφορά + Ροή)

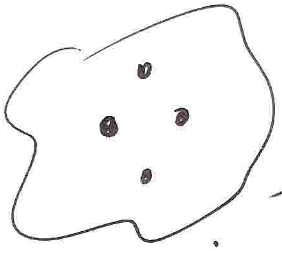
# ΗΜ-Θεωρία (Μαξουελ)

Σωματίδια-φορτίο ~ Πεδία $(\vec{E}, \vec{B})$

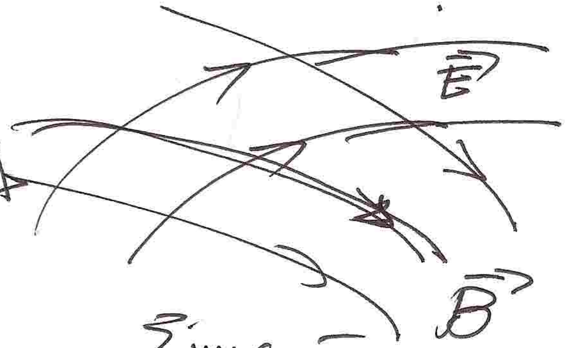
$(m, q, \vec{v}, \vec{F}, \vec{p}, \vec{L}, E_k = \frac{1}{2}mv^2)$

$\vec{E}, \vec{B} \sim \vec{D}, \vec{H}$

$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$



$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$




Διακριτή

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\boxed{W = \Delta E_k + \Phi}$

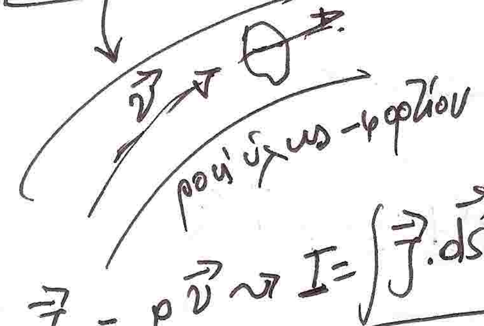
(Νόμοι Νεύτωνα)

Συνεχή

Νόμοι Μαξουελ

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\partial\vec{B}/\partial t \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

$\boxed{\vec{J}_m = \rho_m\vec{v}}$




$\vec{J}_q = \rho_q\vec{v} \rightsquigarrow I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S}$

$I = \frac{dq}{dt}$

$\boxed{\vec{J}_{em} \equiv \vec{S}_p = u_{em}\vec{c}}$

$$\Phi_E \equiv \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{\varepsilon\sigma}/\varepsilon_0 = \int \rho\, dV$$

$$\mathcal{E}_E \equiv \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_B \equiv \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

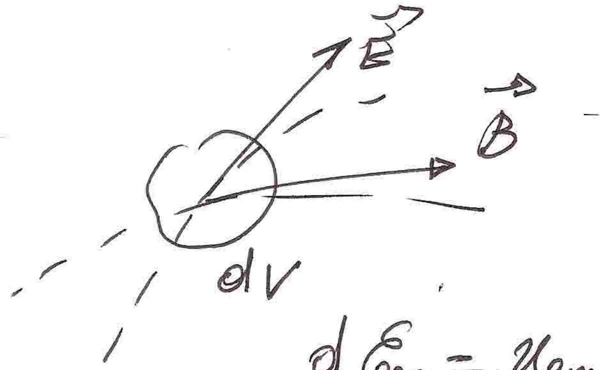
$$\mathcal{E}_B \equiv \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

$\vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$ = ροή ΗΜ-ενέργειας

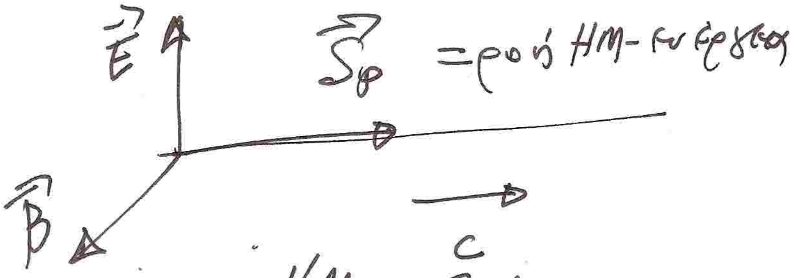
$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{S}_p}{c^2}, \quad \vec{L}_{em} = \vec{r}\times\vec{g}$

# ΗΜ-Πεδίο

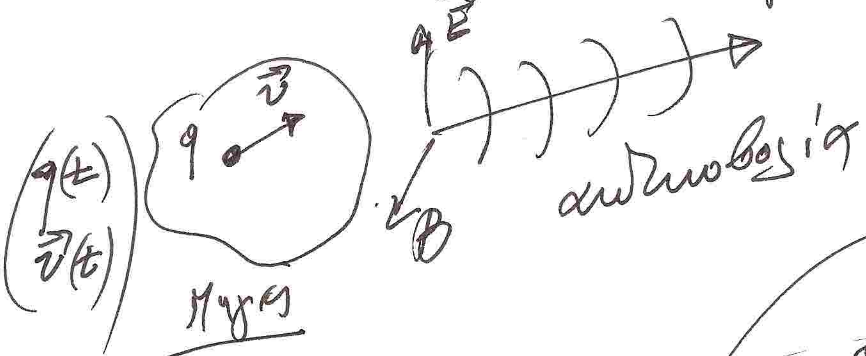
$$\boxed{u_{em} = u_e + u_m}$$




$$d\mathcal{E}_{em} = u_{em}\, dV$$



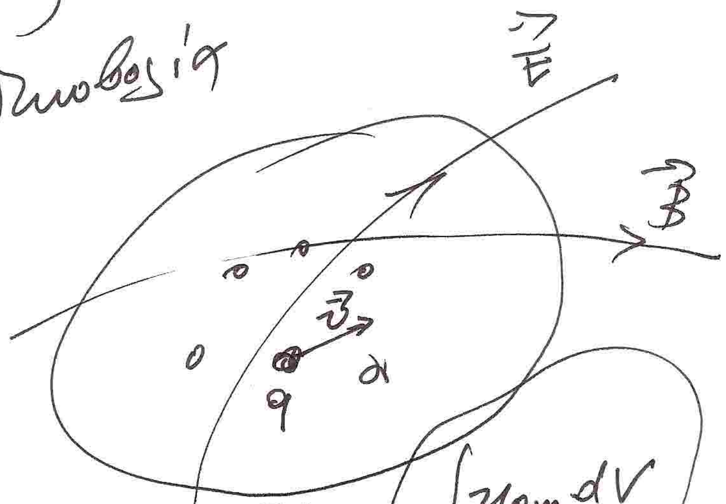

## ΗΜ-πομπή




Πηγές

Κινούμενα φορτία με επιτάχυνση

$\vec a \neq 0$




$$E_{ολ} = E_K + E_Δ = \sum m_i v_i^2/2 + \int u_{em}\, dV$$

$$\vec P_{ολ} = \sum \vec p_i + \int \vec g\, dV$$

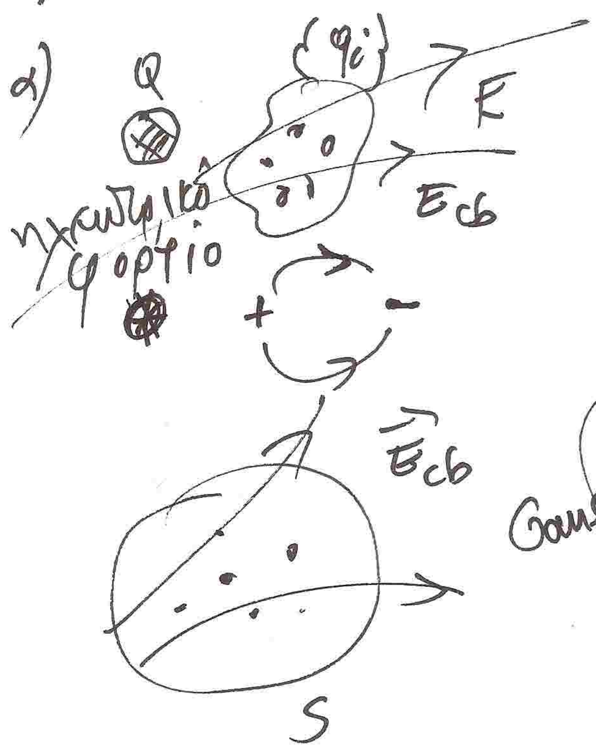
$$\vec L = \sum \vec L_i + \int \vec{\mathcal{L}}\, dV$$

Πεδία

$$E_Δ = U = \int u_{em}\, dV$$

# Θεωρία Μαξουελ

$$\vec{E} = \vec{E}_{cb} + \vec{E}_{επ}$$




$$\vec{E}_{cb} = -\vec{\nabla} V_{cb}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_{cb} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{cb} = \rho/\varepsilon_0$$

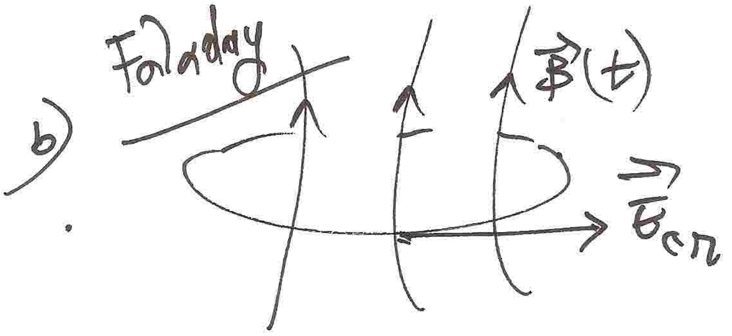
Gauss

$$\oint_S \vec{E}_{cb} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0}$$

(ηλεκτ. φορτίο)

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}_{cb}$$




$$\oint_C \vec{E}_{επ}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E}_{επ}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}_{επ} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times(\vec{E}_{cb}+\vec{E}_{επ}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

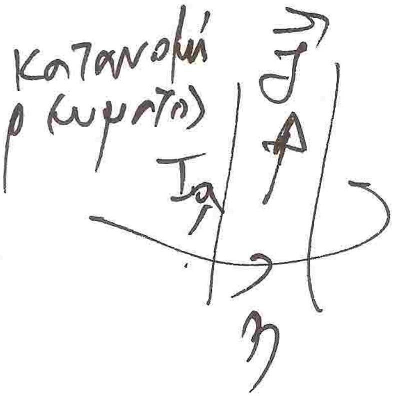
γ)

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{W}{q} = P/I}$$

Ηλεκτρεγερτική δύναμη

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{J}/\sigma \cdot d\vec{l} = R_{ολ} I, \quad \sigma = \text{αγωγιμότητα}$$

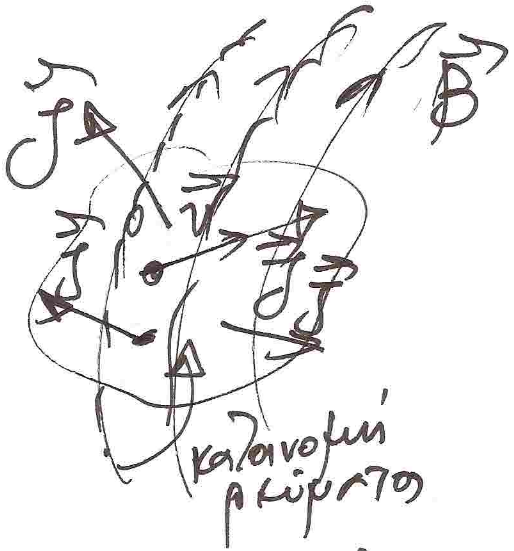
$$\vec{B} = \vec{B}_{ampere} + \vec{B}_{\epsilon\pi\alpha\gamma.}$$

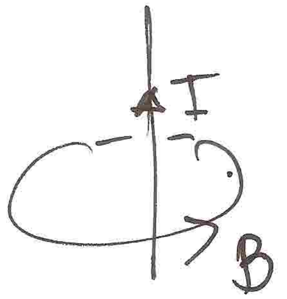



$$I = \vec{J}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{ds}$$

$$\vec{J}_{\alpha\gamma} = \rho \vec{v}$$

$$\vec{J}_{\alpha\gamma} = \text{πυκνότητα ρεύματος}$$

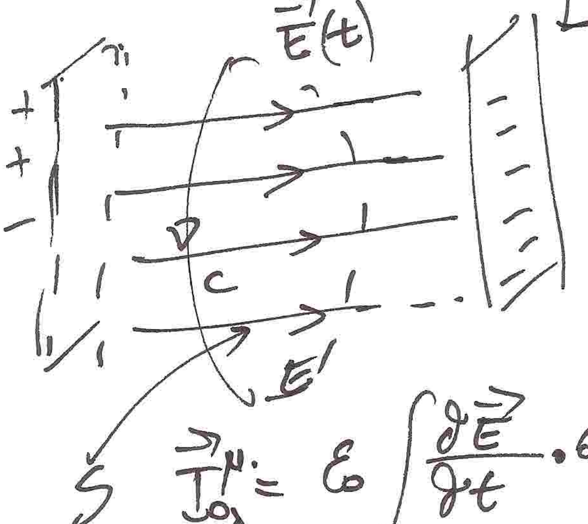



$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{\alpha\gamma} = \mu_0 \int_S \vec{J}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{ds}$$

(stokes)

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}_{am} = \mu_0 \vec{J}_{\alpha\gamma}}$$




$$\vec{J}_{\mu\epsilon\tau.} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$I_{\mu\epsilon\tau} = \int_S \vec{J}_\mu \cdot \vec{ds}$$

$$\vec{I}^{\mu.}_{o\gamma} = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

$$\oint_C \vec{B}_{\epsilon\pi} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I^{\mu\epsilon\tau}_{o\gamma} = \mu_0 \int_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$

stoke

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{\epsilon\pi.} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{B}_{\epsilon\pi} + \vec{B}_{amp}) = \mu_0 \vec{J}_{\alpha\gamma} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

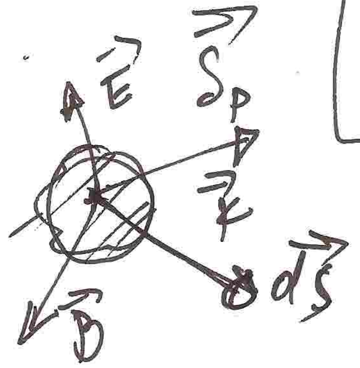
Λύση εξισώσεων Maxwell

$\rho(\vec{r},t)$, $\vec{J}(\vec{r},t)$ $\quad \vec{R} = \vec{c}(t-t_0)$

$$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \vec{A}\end{pmatrix} = \int_V \frac{[\text{Πηγές}]^{t}}{R}\, dV$$

Πηγές (φορτία, ρεύματα)

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\,dV \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}\,dV}$$




$$\vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \left(\frac{d\,\mathcal{E}_{ηλ}}{dt}\right)_{dS}$$

$$\left(\frac{d\,\mathcal{E}_{ηλ}}{dt}\right)_{dS} = \vec{S}_p \cdot d\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

Μηχανική $(\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, m)$

$$q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

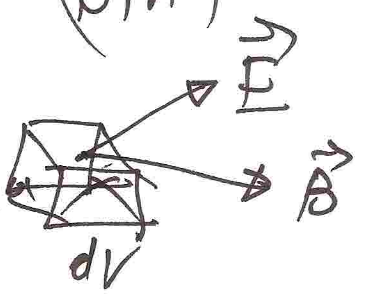
Ηλεκ/Δυν. $(\rho, \vec{J})$ $\vec{E}, \vec{B}, V, \vec{A}$ $(q, I)$ $(\vec{E}, V, \vec{B}, \vec{A})$

$E_K = \frac{1}{2}mv^2$, $\quad E_M = mc^2$

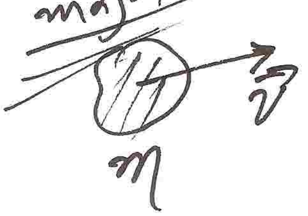
$$\boxed{\mathcal{E}_{ηλ} = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\mathcal{E}_{ΗΜ} = (u_E + u_B)\,dV$$



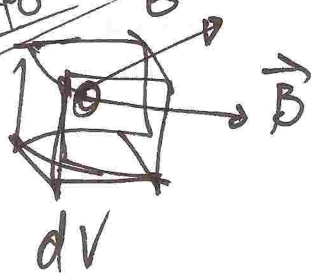
μάζα




$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2$$

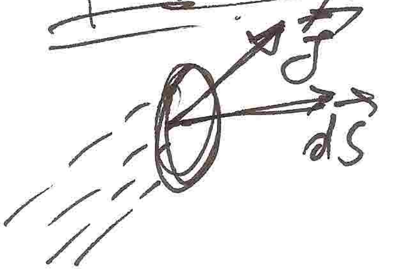
$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \simeq \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

Ενέργεια $\vec{E}$

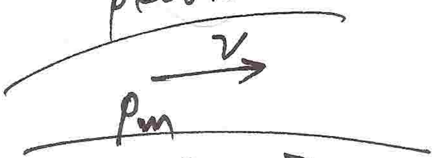



$$\mathcal{E}_{\eta\mu} = (u_E + u_B)\,dV = \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV$$

ροή ύλης




ρευστό

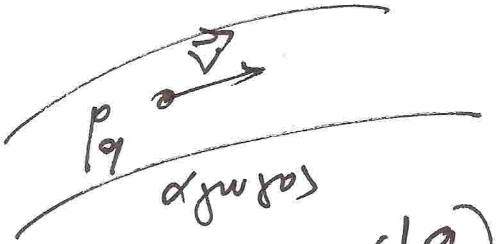



$$\vec{J}_{v\lambda} = \rho_m \vec{v}$$

$$\vec{J}_{v\lambda} \cdot \vec{dS} = \left(\frac{dm}{dt}\right)_{dS}$$

ροή ηλ. φορτίου


$$\boxed{\vec{J}_{\alpha\gamma} = \rho_q \vec{v}}$$




$$\rho_q\, dV = dQ$$

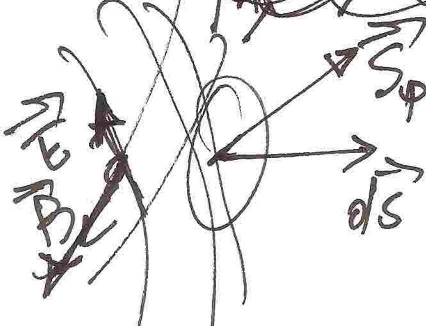
$$I = \vec{J}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{dS} = \left(\frac{dq}{dt}\right)_{dS}$$

ροή ενέργειας (Ημ)

$$u_{\eta\lambda} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$m_{\eta\lambda} = \frac{u_{\eta\lambda}\, dV}{c^2}$$

$$\rho_m \vec{u}_{\eta\lambda} = \frac{\mathcal{E}_{\eta\mu}}{c^2}(u_E + u_B)$$




$$\vec{S}_p \cdot \vec{dS} = \left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)\cdot\vec{dS} = \left(\frac{d\mathcal{E}_{\eta\lambda}}{dt}\right)_{dS}$$

$\vec{g}_{\eta\lambda}$ = πυκνότητα ορμής (Ηλ.)C

$\vec{\mathcal{L}}_{\eta\lambda}$ = πυκνότητα στροφορμής (Ηλ)

# Ταλαντώσεις – κύματα.

$$F_{ολ} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

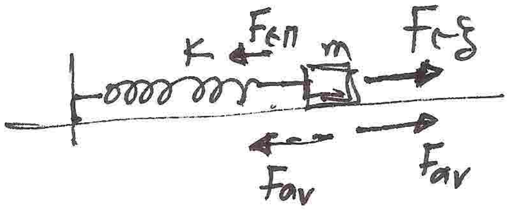
(Μηχανική)

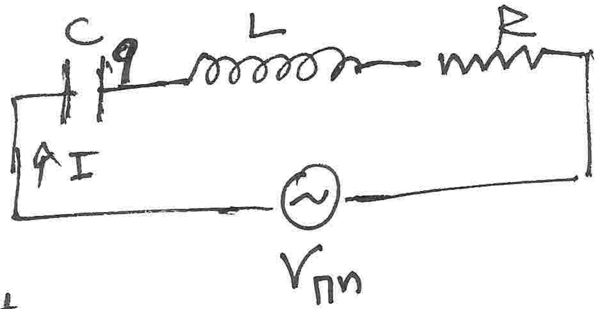
$$\mathcal{E}_{ολ} = RI \quad , \quad \mathcal{E}_{ολ} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

(Ηλ. Μαγνητισμός)

$$F_{ολ} = F_{εξ} + F_{αν} + F_{επ}$$

$$\mathcal{E}_{ολ} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{πηγ.}$$




$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda v + kx = F_0\cos\omega t$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = V_0\cos\omega t$$

$$L\frac{d^2q}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0\cos\omega t$$

$$I = \frac{dq}{dt} ,$$

Απόσβεση

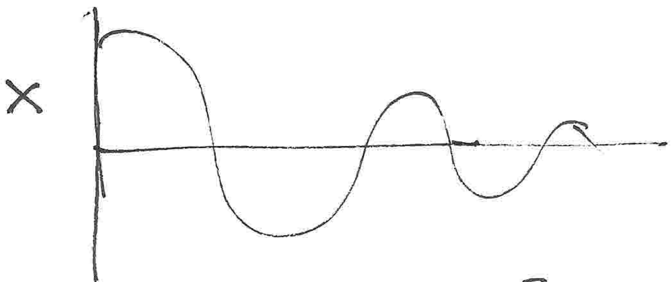
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} \quad , \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$$

$$F_{εξ} = 0$$

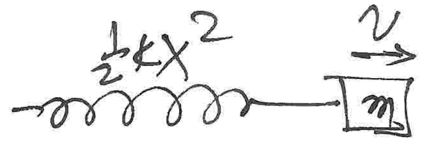
$$V_{π} = 0$$



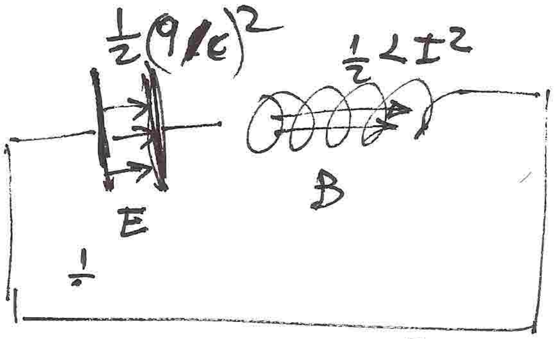

$$x = x_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

Ενέργεια: $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_κ + E_Δ$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{q}{C}\right)^2}_{ηλεκ.} + \underbrace{\frac{1}{2}LI^2}_{Μαγνητική} = E_{ηλ} + E_{μαγ.}$$




$\frac{1}{2}kx^2$ , $\frac{1}{2}mv^2$




$$\frac{1}{2}(q/c)^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2) V_{\pi\upsilon\kappa.} \quad , \quad u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} V_{\pi\eta\nu.} \quad , \quad u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\Delta W^{\varepsilon\xi} = \Delta(E_K + E_\Delta) \qquad \frac{\Delta W}{\Delta t} = P$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$F^{\varepsilon\xi} : (\lambda v \,,\, RI)$$

Απώλειες

$$\begin{cases} P_R = (RI)\cdot I = RI^2 \\ P_\lambda = (\lambda v)v = \lambda v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta(E_K + E_\Delta)}{\Delta t} = \lambda v^2 \\ \frac{\Delta(E_{\eta\lambda} + E_{\mu\eta})}{\Delta t} = RI^2 \end{cases}$$

Εξαναγκασμένη ταλάντωση

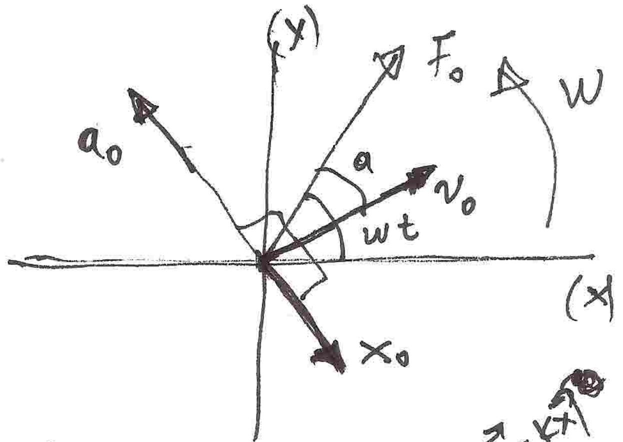
$$x = x_0 \sin(\omega t - a)$$

$$F_0 = \sqrt{(m\omega^2 x_0 - kx_0)^2 + (\lambda\omega x_0)^2} = (\omega x_0)\sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + \lambda^2}$$

$$v_0 = \omega x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + \lambda^2}} = \frac{F_0}{Z} \,,\; Z = \sqrt{X^2 + R^2}$$

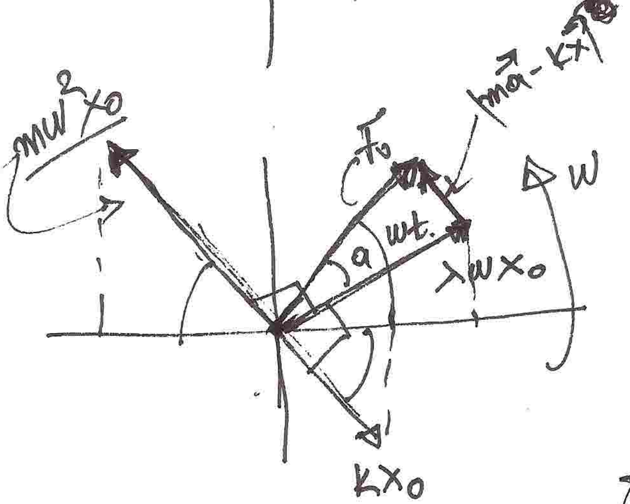
$$\boxed{v_0 = \frac{F_0}{Z}}$$


$$\begin{cases} X = m\omega - \frac{k}{\omega} \\ R = \lambda \end{cases}$$

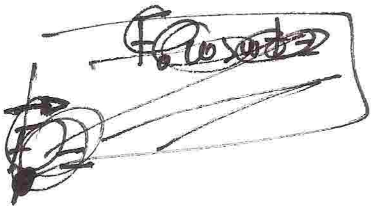



$$\begin{cases} F = F_0 \cos wt \\ x = x_0 \sin(wt - a) \\ v = v_0 \cos(wt - a) \\ a = -a_0 \sin(wt - a) \end{cases}$$

$$(v_0 = w x_0 \ , \ a_0 = w^2 x_0)$$




$$\boxed{F_0 = \sqrt{(mw^2x_0 - kx_0)^2 + (\lambda w x_0)^2}}$$

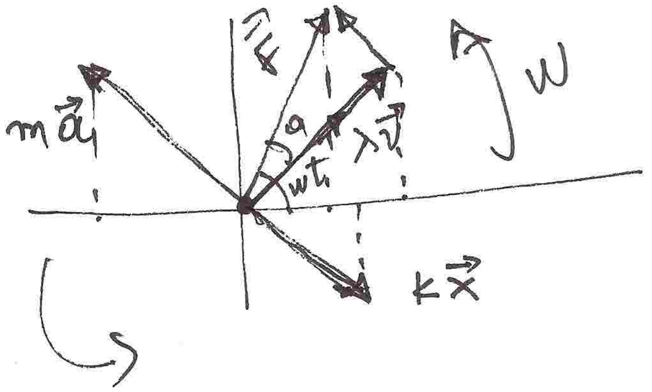


$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} + \lambda\vec{v} + k\vec{x}}$$

$$|F|^2 = |m\vec{a} - k\vec{x}|^2 + |\lambda\vec{v}|^2$$

$F = F_0 \cos wt$, $\quad ma = m a_0 \cos(wt - a + \frac{\pi}{2})$

$\lambda v = \lambda v_0 \cos(wt - a)$, $kx = kx_0 \cos(wt - a - \frac{\pi}{2})$




$$\vec{F} = (m\vec{a} - k\vec{x}) + \lambda\vec{v}$$

$$F_x = (m\vec{a} - k\vec{x})_x + \lambda v_x$$

$$\begin{cases} F_0 \cos wt = m a_0 \cos(wt - a + \frac{\pi}{2}) \\ \qquad + \lambda v_0 \cos(wt - a) \\ \qquad + k x_0 \cos(wt - a - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

# απόσβεση - πηγές κύματος

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_{\epsilon\xi}$$

$$\left\{ \nabla^2\xi - \sigma\frac{d\xi}{dt} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = F_{\epsilon\xi} \right.$$

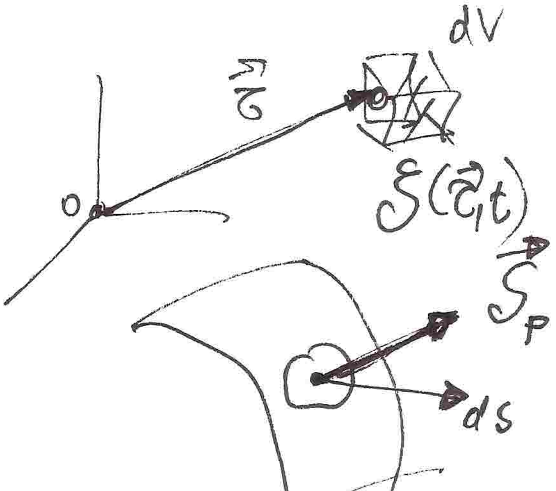
$$\left\{ \begin{aligned} &\nabla^2\psi - \mu\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon \\ &\nabla^2\vec{A} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\psi = \text{ηλ. δυναμ.} \\ &\vec{A} = \text{μαγ. δυναμ.} \end{aligned}$$

$$\cancel{E_K = \tfrac{1}{2}\rho\dot{\xi}^2}$$

$$\left(u_k \sim \partial\xi/\partial t,\ u_\Delta \sim \xi\right) \quad \left\{ \begin{aligned} &E_K \sim \frac{\partial\xi}{\partial t} \\ &E_\Delta \sim \xi \end{aligned} \right.$$ μηχανικά κύματα

$$(E_K) \to E_m \sim \frac{B^2}{2\mu}, \quad (E_\Delta) \to E_e \sim \frac{\varepsilon E^2}{2}$$

$$\left( u_e \sim \frac{\varepsilon E^2}{2} \quad u_m \sim \frac{B^2}{2\mu} \right)$$



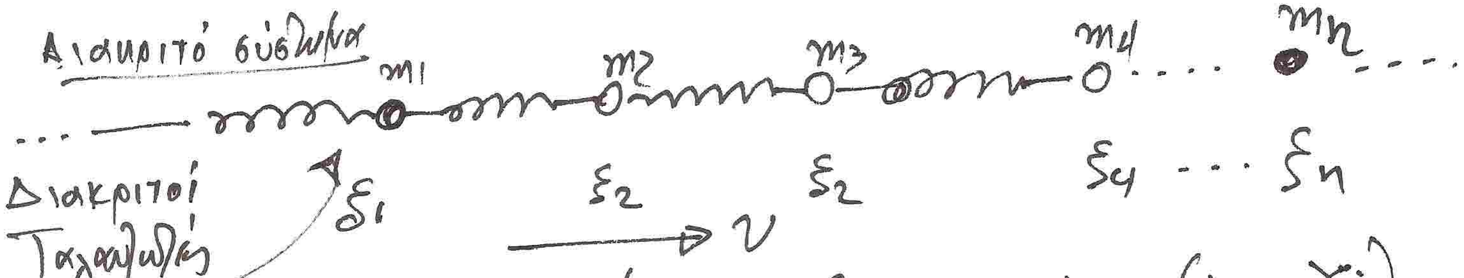

$\xi$ = μηχανικό μέγεθος

$\xi$ = ηλεκτρομαγνητικό μέγεθος

$$\vec{S}_p \cdot d\vec{S} = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{dS}$$

$$\boxed{\vec{S}_p = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}}$$

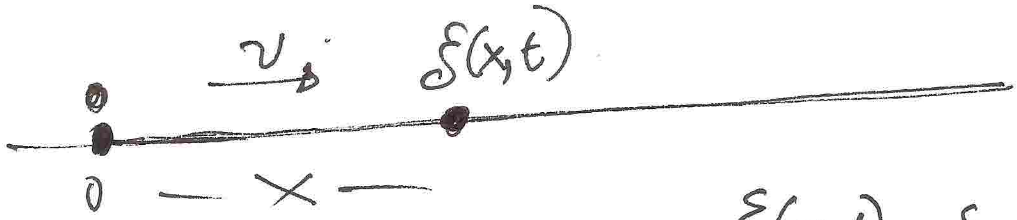
# Κατανεμημένες ταλαντώσεις




$\cancel{\xi_i = \xi_0 \sin(wt}$

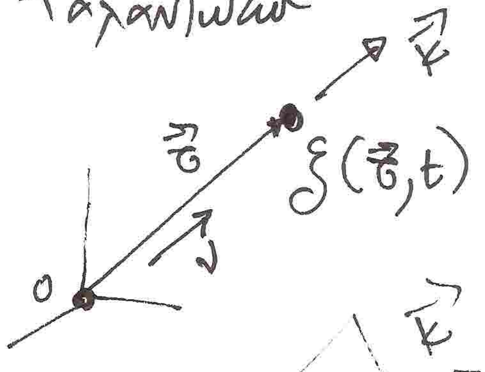
$$\xi_i = \xi_0 \sin w\left(t - \frac{x_i}{v}\right)$$

## Συνεχής κατανομή ταλαντωτών (μονοδιάστατη κατανομή)



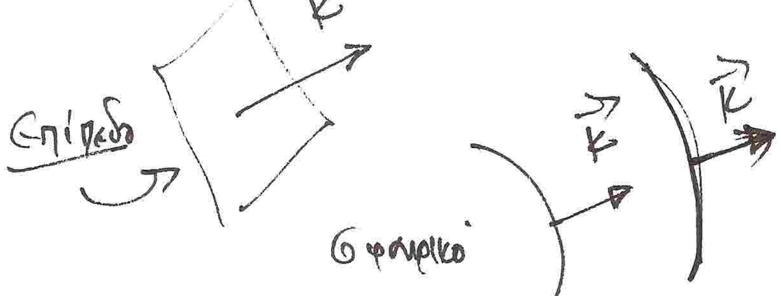

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin w\left(t - \frac{x}{v}\right)$$
$$= \xi_0 \cos(kx - wt)$$
$$v = \frac{w}{k}$$

Χωρική κατανομή ταλαντωτών




$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin w\left(t - \frac{|\vec{r}|}{v}\right)$$
$$= \xi_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)$$

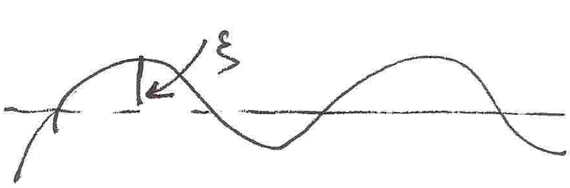
$$v = \frac{w}{|\vec{k}|}$$




$$\boxed{\xi(\vec{r},t) = \xi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)} = \xi_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt) + i\,\xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)}$$

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

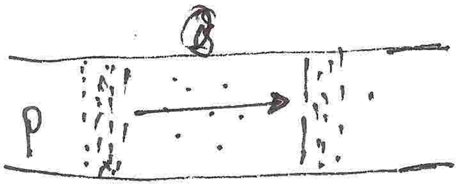
# Κύματα στην ύλη

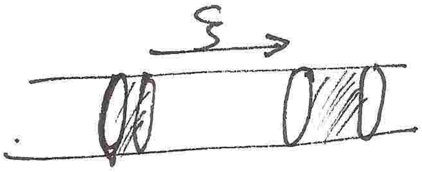
α) 


Παλλόμενη χορδή

$$\left(\frac{m}{T}\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

ήχος (ηχητικά κύματα

β) 


γ) 


(στερεά ράβδος)

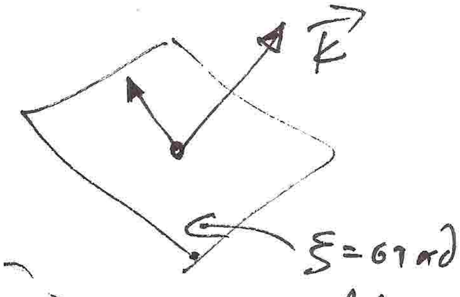
α) $$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{d}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \quad ), \quad v = \sqrt{T/m}\ ,$$ T = τάση, m = πυκνότητα μάζης

β) $$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2 p}{dt^2} = 0 \quad ), \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}\ ,$$ $\begin{cases} PV^{\gamma} = \text{σταθ} \\ \gamma = c_p/c_v \end{cases}$

γ) $$\frac{d^2\xi}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} \quad ), \quad v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}\ ),$$ Y = μέτρο ελαστικότητας, ρ = πυκνότητα μάζης

## Κύματα στο χώρο

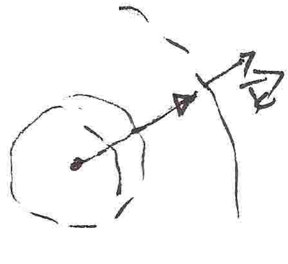
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0$$




$$\xi = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

επίπεδα κύματα

$$v = \frac{\omega}{k}$$




$$\xi = \left(\frac{\xi_0}{r}\right)\cos(kr - \omega t)$$

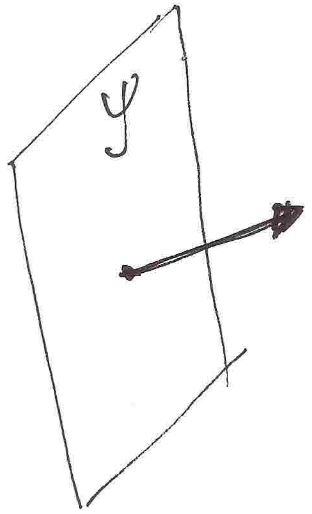
# Κύματα.

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \qquad \psi(x,y,z,t) \simeq \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(\vec{r},t) = \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

$$\psi = \psi_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) + \psi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

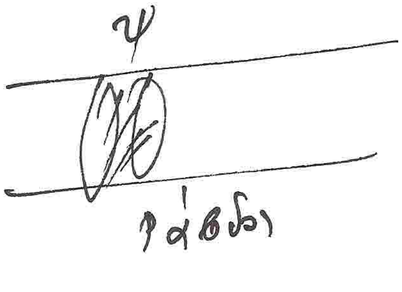



$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega}{k}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\omega}{k}\right)\hat{k} = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{|k|}$$

ψ = (πίεση, πυκνότητα, παραμόρφωση)

Μηχανικά κύματα





$$\psi = (\underbrace{E_x, E_y, E_z}_{\vec{E}}, \underbrace{B_x, B_y, B_z}_{\vec{B}}, \underbrace{A_x, A_y, A_z}_{\vec{A}}, \underbrace{V}_{V})$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left( \nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \right)$$

$\nabla^2 V$

## Κύμα με Απόσβεση (σε υλικό)

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu\sigma\frac{\partial V}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon$$

$(\mu, \varepsilon, \sigma)$ $\quad \sigma =$ αγωγιμότητα.

(Ταλάντωση με απόσβεση) $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F^{\varepsilon\xi}$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\sigma$, $\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right)$

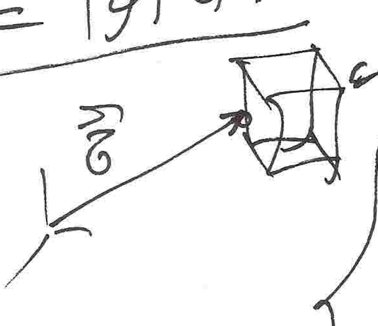
## Κύματα πιθανότητας (εξίσωση Schrödinger)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\psi + V\psi$$

$$\boxed{\begin{array}{c} i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \Longrightarrow \hat{E} \\ \hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \end{array}}$$

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\psi^*\psi\, dV = |\psi|^2 dV = P(\Delta V)$$ (πιθανότητα)

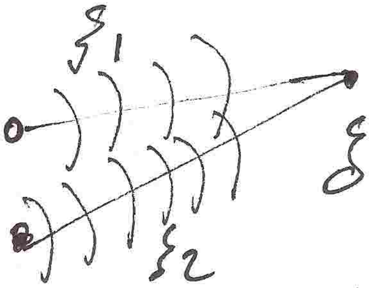



$\psi(\vec{r}, t)$

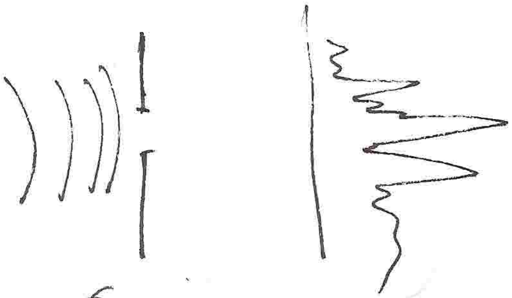
Κυματοσυνάρτηση

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{E}\,\psi_\varepsilon = \varepsilon\,\psi_\varepsilon \\ \hat{p}\,\psi_p = p\,\psi_p \\ \hat{x}\,\psi = x\,\psi_x \end{array}\right.$$

# Διάδοση κύματος

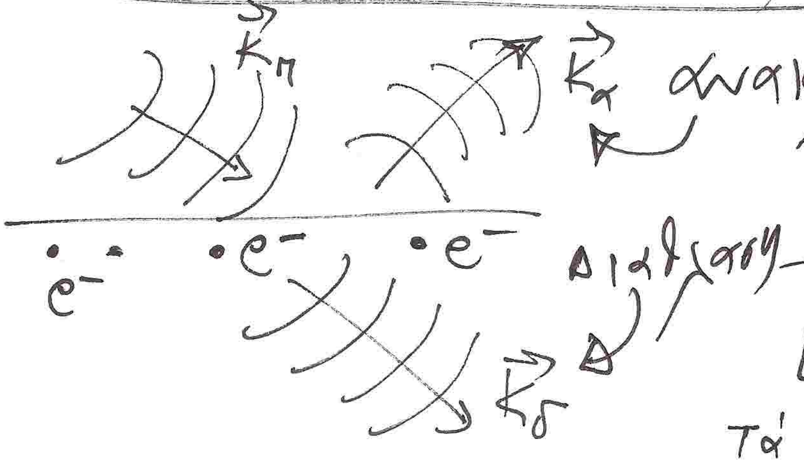



$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{10}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_1 t) + \xi_{20}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_2 t)$$



(συμβολή περίθλαση)

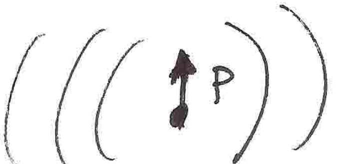
## αλληλεπίδραση (ύλης - φωτός)




$\underline{\underline{e^-}}$

$$\boxed{m a_e = q_e\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}}$$

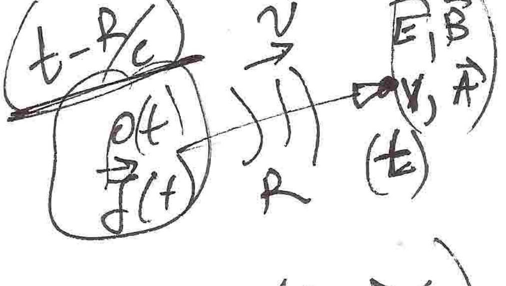
Τα φορτισμένα σωματίδια διεγείρονται και ακτινοβολούν.




$p(t)$

(ηλεκτρικό - μαγνητικό δίπολο)

(Κάθε επιταχυνόμενο ηλεκτρικό φορτίο ακτινοβολεί)

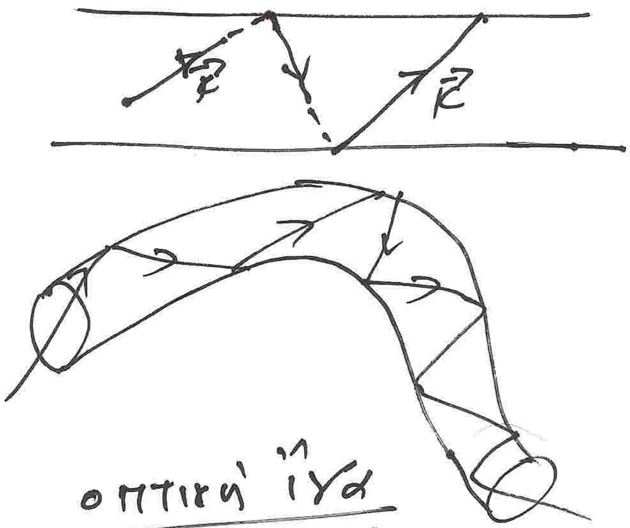



$$\varphi(t,r) \left\{ \begin{array}{l} \int_V \frac{[\rho]}{R}\,dV \\ \int_V \frac{[\vec{J}]}{R}\,dV \end{array} \right\} \text{ακτινοβολία}$$

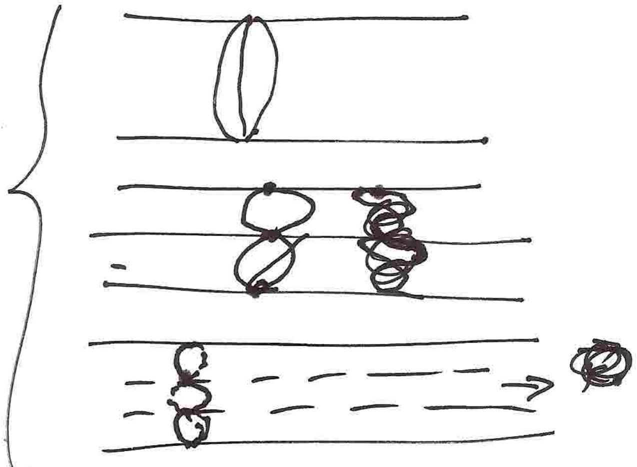
$$[\rho] = \rho(t - R/c)$$

$$[\vec{J}] = \vec{J}(t - R/c)$$

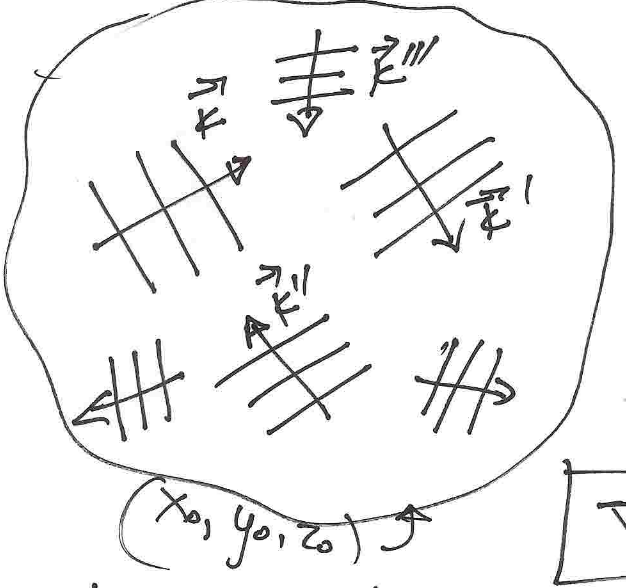
# Διάδοση + στασιμότητα



οπτική ίνα



## Στάσιμα κύματα στόν χώρο – Τρόποι ταλάντωσης




$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi(\vec{r},t) = 0$$

$$\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

$$= \phi(\vec{r})(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

$$= \phi(\vec{r})\cos\omega t.$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi(x,y,z) + k^2 \phi(x,y,z) = 0}$$

εξίσωση στάσιμων κυμάτων

$$\phi(x_{op}, y_{op}, z_{op}) = 0$$

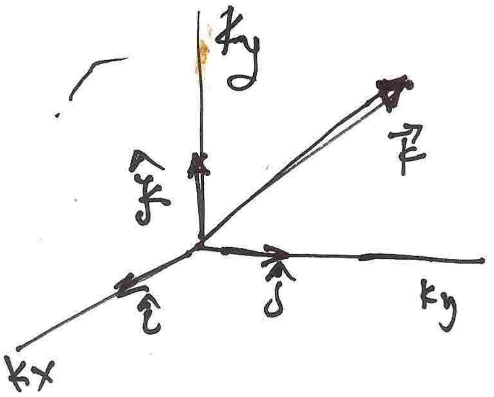
$$\phi_{n_1 n_2 n_3}(x,y,z) = A \sin\left(\overset{=k_1}{\frac{n_1\pi}{L}} x\right) \sin\left(\overset{=k_2}{\frac{n_2\pi}{L}} y\right) \sin\left(\overset{=k_3}{\frac{n_3\pi}{L}} z\right)$$

$$n_1, n_2, n_3 = 1, 2, \ldots$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{L^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

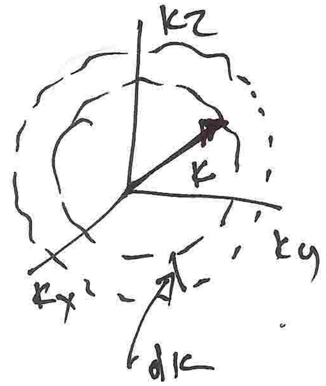
$$\omega = kv = v\frac{\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$




$$\vec{k} = k_1\hat{i} + k_2\hat{j} + k_3\hat{k}$$
$$= k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k}$$

$$\vec{k} = \left(\frac{n_1\pi}{L}, \frac{n_2\pi}{L}, \frac{n_3\pi}{L}\right)$$

$n_1, n_2, n_3 = 1, 2 \ldots$



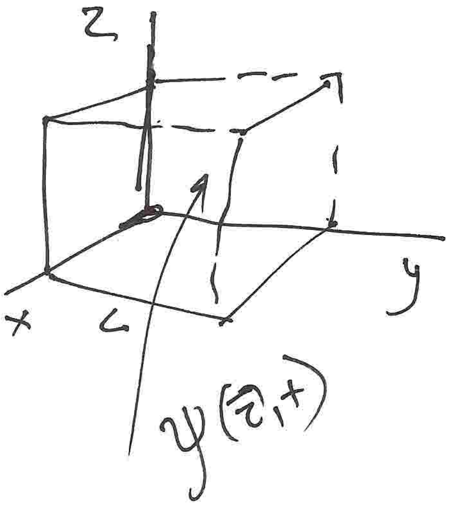

$$\underline{\omega = k v}$$

$$\cancel{|\vec{k}|^2 = \sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3}\,(\pi)^2}$$

$$\boxed{k = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$$

$$f(k)\,dk = dN(k)$$
$$f(k) = \frac{Vk^2\,dk}{2\pi^2} \qquad \boxed{V = L^3}$$

$$f(\omega)\,d\omega = \frac{Vk^2}{2\pi^2}\frac{dk}{d\omega}\,d\omega$$
$$= \frac{V\omega^2\,d\omega}{2\pi^2 v^3}$$




$$\vec{k} \Longrightarrow \vec{P} = \hbar\vec{k}$$
$$\omega \Longrightarrow E = \hbar\omega$$

(Δυϊσμός ύλης
κβαντική θεωρία)

Πυκνότητα καταστάσεων - Τρόπων

$$\left(f(\vec{k}),\ f(\omega),\ f(\vec{p})\right)$$

$$f(\omega)\,d\omega = \frac{V\omega^2\,d\omega}{\pi^2 c^3}$$

(Πυκνότητα Τρόπων Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.)

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{n_1,n_2,n_3} \psi_{n_1 n_2 n_3} = \sum G_{n_1 n_2 n_3} \sin\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_3\pi}{L}z\right)\cos(\omega_{n_1 n_2 n_3}t)$$

$$\boxed{\omega_{n_1 n_2 n_3} = k v = k_{n_1 n_2 n_3} v}$$

# Κατανομή ενέργειας στά στάσιμα κύματα.

Ταλαντωτής $\quad E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k X_0^2$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 X_0^2 \sim X_0^2$$

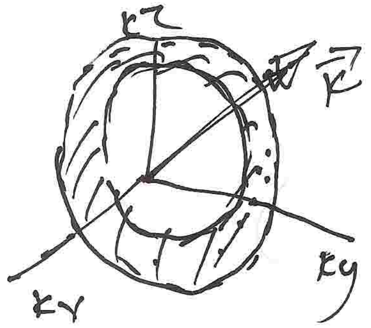
$$\{n_i, n_j, n_k\} \rightarrow \omega^2 = (\pi v)^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \Rightarrow \{\omega_k\}$$

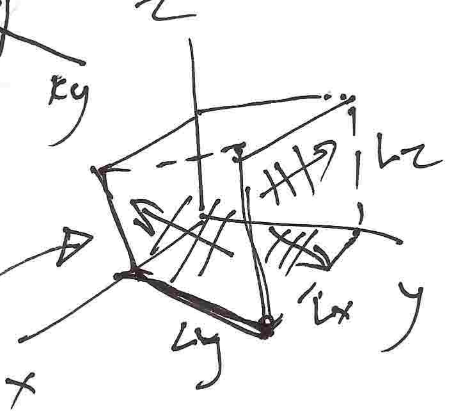
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{L_x}$$

$$k_y = \frac{n_2 \pi}{L_y}$$

$$k_z = \frac{n_3 \pi}{L_z}$$




$$E \simeq (\sigma\tau\alpha\vartheta)^2 \omega^2 = \varepsilon(\omega)$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x$$

$$\boxed{E_{o\lambda} = \sum_{\omega} E(\omega)}$$

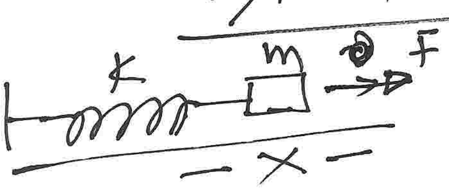
$$\psi(\vec{r}, t) = \sum C_\omega \sin(k_1 x) \sin(k_2 x)$$

$$= \sum C_{n_1 n_2 n_3} \sin\left(\frac{n_1 \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi}{L_z} z\right)$$

$$dE(\omega) \simeq dN(\omega)\, \varepsilon(\omega), \quad \boxed{E_{o\lambda} = \sum_{\omega} N(\omega)\, \varepsilon(\omega) = \int f(\omega)\, \varepsilon(\omega)\, d\omega}$$

$$dN(\omega) = f(\omega)\, d\omega,$$

## Ηλεκτρομαγνητικά πεδία




$$\cancel{F(t) \approx \sin \omega t}$$

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

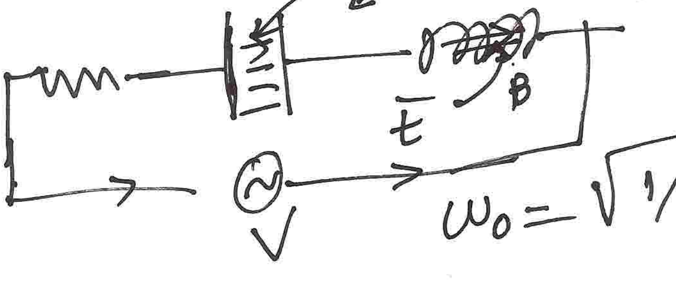
$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

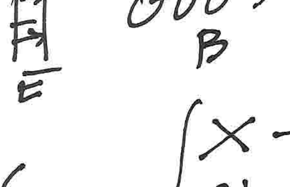
$m \rightarrow L$

$K \rightarrow C$

$R \rightarrow \gamma$

$F \sim V$




$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow q \\ v \rightarrow I = dq/dt \\ a \rightarrow dI/dt = d^2q/dt^2 \end{cases}$$

$V = V_0 \sin(\omega t)$

$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ $\Longrightarrow$

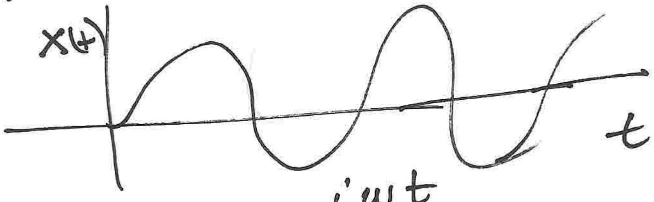
$x \sim x_0 e^{i\omega t}$

$(E, B) \sim \begin{matrix} E_0 \sin\omega t \\ B_0 \sin\omega t \end{matrix}$



$$\boxed{\begin{matrix} \Phi \sim \Phi_0 e^{i\omega t} \\ \vec{A} \sim \vec{A}_0 e^{i\omega t} \end{matrix}}$$

$(v, x, q, I, \vec{E}, \vec{B})$



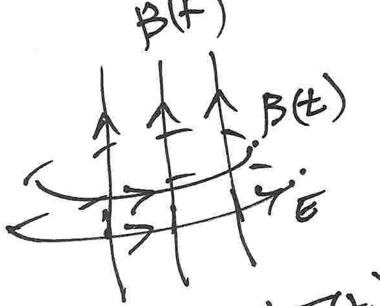


$e^{i\omega t}$

$$\boxed{\begin{matrix} u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ u_m \simeq \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \end{matrix}}$$

$B(t) \to E(t)$

$E(t) \to B(t)$



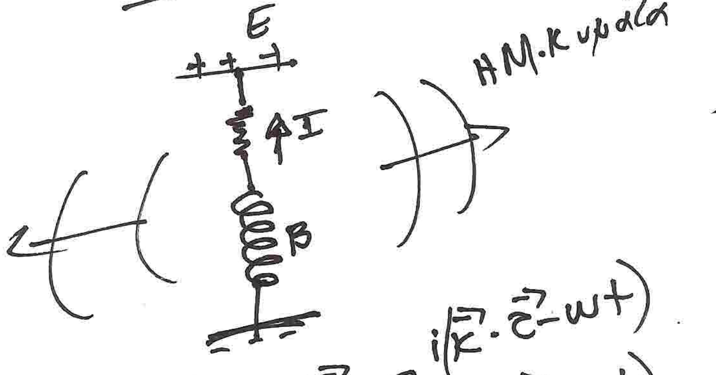


$B(t) \to \vec{E}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$







$$\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0 \end{matrix}}$$

εξισώσεις Maxwell στον κενό χώρο

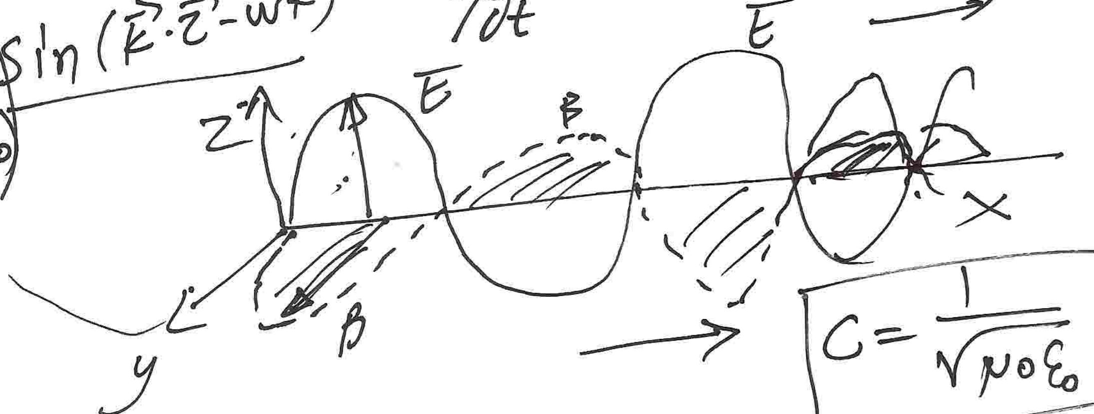
$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$\vec{\nabla}(\cdots) \Longrightarrow i\vec{k}(\cdots)$

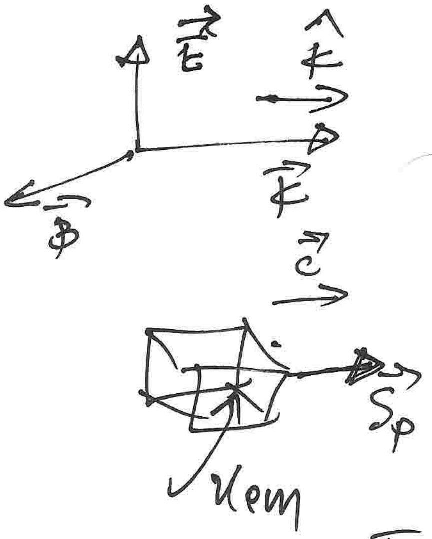
$\partial/\partial t \cdots \Longrightarrow -i\omega(\cdots)$

$(E, B) \sim \begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$





$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$$




$$\vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \hat{K}$$

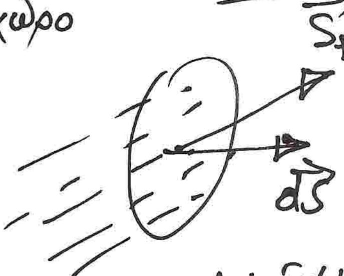
$$= u_{em}\, c\, \hat{K}$$

$$\boxed{\vec{J} = \rho\vec{v}} \sim u_{em}\vec{c}$$

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

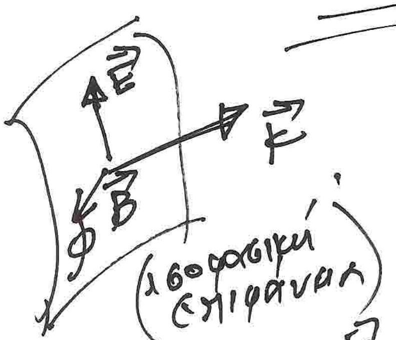
Ροή ΗΜ-Ενεργειας στό χώρο

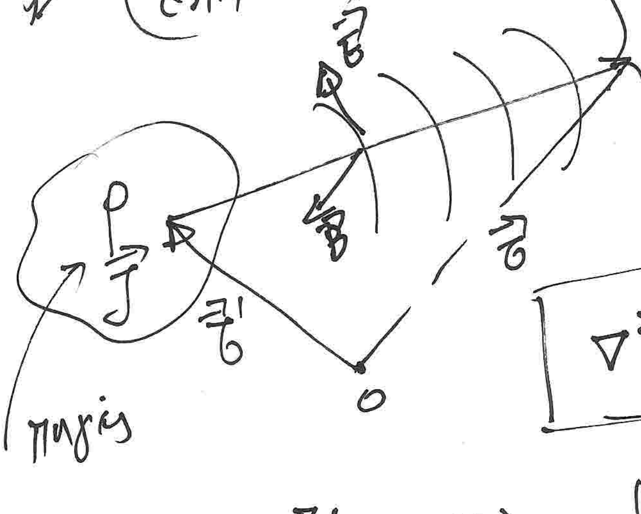
$$\frac{dU}{dt} = \vec{S}_p \cdot d\vec{S}$$




ΗΜ κύμα

ροή ΗΜ-ενεργειας




$\vec{E}(\vec{r},t)$ $\quad \phi(\vec{r},t)$

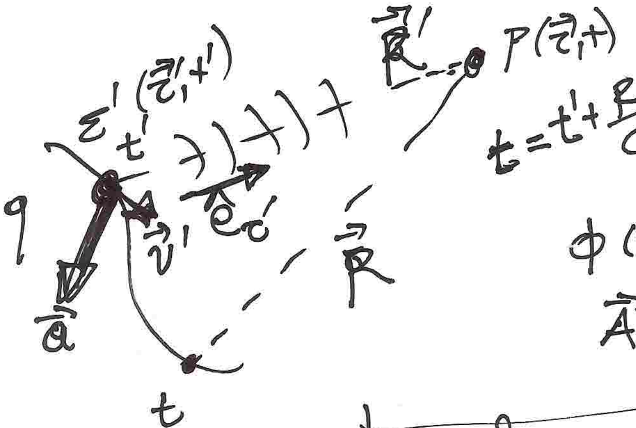
$\vec{B}(\vec{r},t)$ $\quad \vec{A}(\vec{r},t)$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -S}$$

(εξισώσεις Ναξου(?)

$$\left\{\begin{array}{l} \psi = \{\phi, A, E, B\} \\ S = \{\rho, \vec{J}\} = \text{πηγές} \end{array}\right.$$




$$t = t' + \frac{R}{c}$$

$$\phi(r,t) = q/4\pi\varepsilon_0\left[r' - \vec{v}'\cdot\vec{r}'/c\right]$$

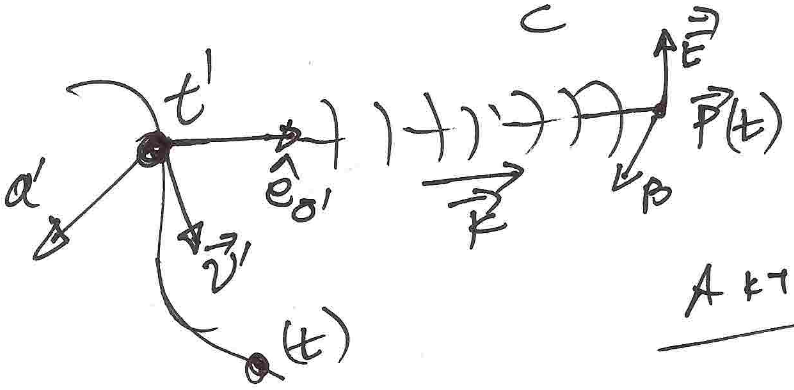
$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\vec{v}'\Big/\left[r' - \frac{\vec{v}'\cdot\vec{r}'}{c}\right]$$

Καθυστερούμενα δυναμικά

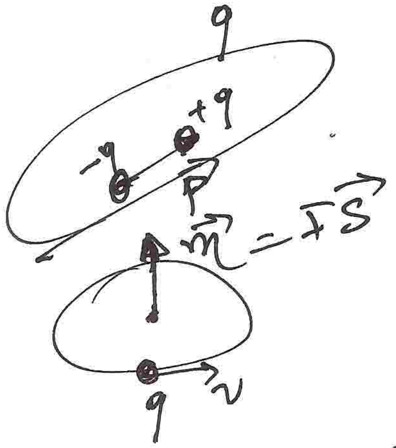
$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[ \dfrac{\hat{e}_{r'}}{r'^2} + \dfrac{r'}{c}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\hat{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\hat{e}(r')}{dt^2} \right] \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{\hat{e}_{r'} \times \vec{E}}{c} \end{cases}$$

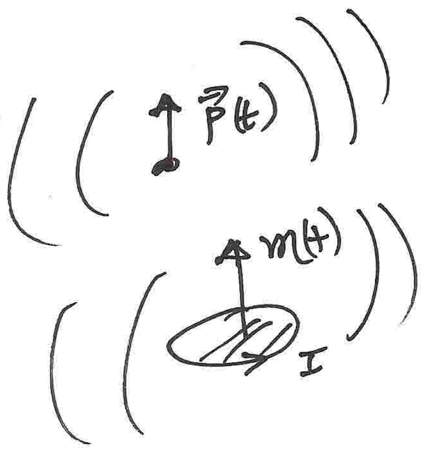
καθυστερούμενα πεδία

$t' = t - R/c$




## Ακτινοβολία διπόλου

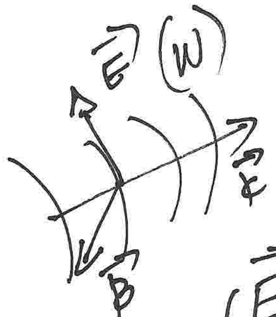



$\vec{p} = q\vec{r}$

$\vec{m} = I\vec{S}$

$$\boxed{\vec{S}_p = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$$


$\underline{\underline{P(\vec{r},t)}}$

$\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} \sim e^{i\omega t}$

πεδία

συχνότητα (ω) πηγών

$\Downarrow$

συχνότητα (ω) πεδίων

$\rho \sim e^{i\omega t}$

$\vec{J} \sim e^{i\omega t}$

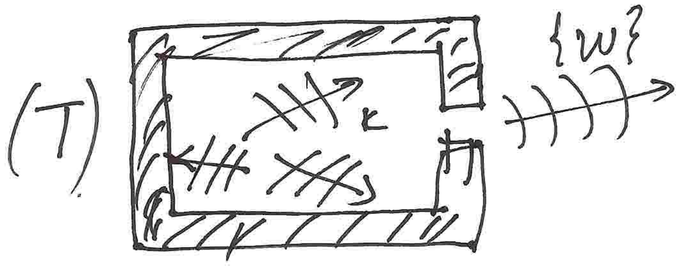
πηγές

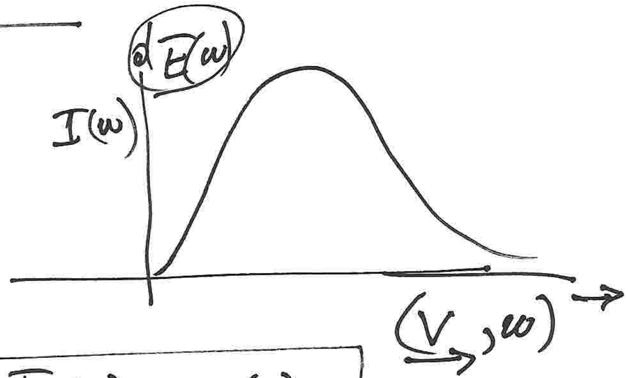
$$\begin{pmatrix}\rho(t)\\ \vec{J}(t)\end{pmatrix} \sim \sum_{\omega} \underline{\underline{C(\omega)\,e^{i\omega t}}}$$ (θεώρημα Fourier)

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{V(r')} \frac{S(\vec{r}', t - R/c)}{R}\,dv(r') \simeq \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V(r')} \frac{S_0(r')\,e^{ikR}}{R}\,dv(r')$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

# Μέλλαν σώμα




$$\boxed{I(\omega) = u(\omega)\, c}$$

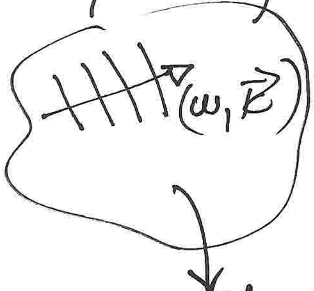
$$\boxed{E_{ολ} = \sum_{\omega} \overline{\varepsilon}(\omega)\, N(\omega)}$$

$$I(\omega) \sim |\vec{S}_p|$$

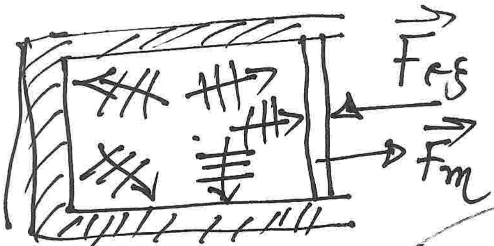
$$\boxed{dE(\omega) = I(\omega)\, d\omega}$$

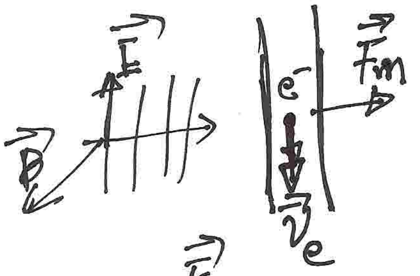
$$\{\overline{\varepsilon}(\omega), N(\omega)\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} I(\omega) \\ u(\omega) \end{matrix}\right\}$$


Μηχανικοί ταλαντωτές




ΗΜ ταλαντωτές (στάσιμα, ΗΜ κύματα)

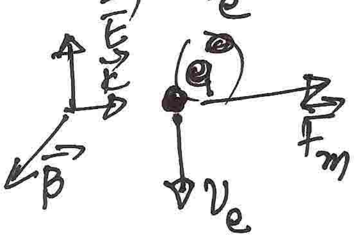


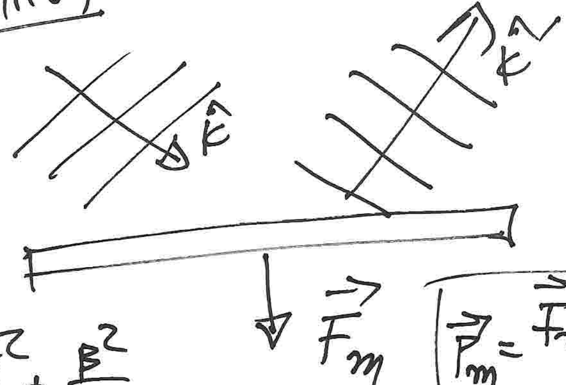




$$\vec{E} \rightarrow q\vec{E} = \vec{F}_e$$

$$\vec{B} \rightarrow q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{F}_m$$

Μαγνητική πίεση




$$\boxed{\vec{P}_m = \vec{F}_m / S}$$

$$\boxed{u_{em}/c^2 \simeq m_{em}}$$

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

$$\boxed{I = c\, u_{em}}$$

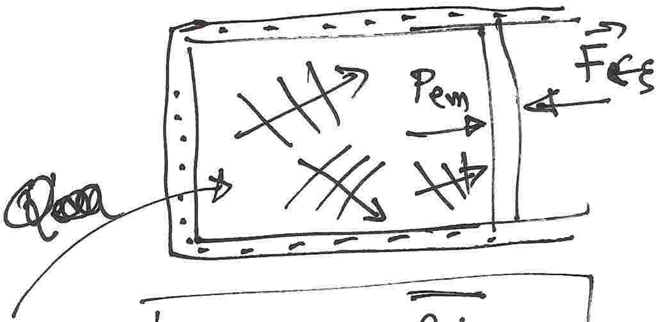
$$\cancel{I = P_{em}}$$

$$\boxed{\vec{P}_{em} = \left(\frac{u_{em}}{c}\right)\hat{k}}$$

$$P_{em} = \frac{u_{em}}{c^2} c = \frac{u_{em}}{c}$$

$$\vec{P}_{em} = \left(\frac{u_{em}}{c}\right)\hat{k}$$

# Θερμοδυναμική Μέλανος Σώματος




$$dW = F_{em}\,dx = -dU_{em}$$

$$dW_m = -dU_{em}$$

$$P_{em} = \bar{u}_{em}/3$$

$$\boxed{PV = \frac{1}{3}\bar{U}_{em}}$$

$$\boxed{dQ = dU + dW}$$

$$dQ = dU_{em} + P_{em}dV$$

$$dW = PdV$$

$$dQ = T\,dS_{em}$$

$$\bar{U}_{em} = u(T)$$

$$\boxed{\frac{du}{dT} = \frac{4u(T)}{T}}$$

εξίσωση Μέλανος σώματος

$$u_{em}(T) = aT^4$$ (Νόμος Stefan-Boltzmann)

$$S_{em} = \frac{4}{3T}u_{em}(T)V = \frac{4}{3}aT^3V$$

εντροπία μέλανος σώματος

$$u(\omega,T) = \omega^3 f(\omega/T)$$

$$u(T) = \int u(\omega,T)\,d\omega \simeq \int \omega^3 f(\omega/T)\,d\omega = aT^4, \quad \boxed{a = \int x^3 f(x)\,dx}$$

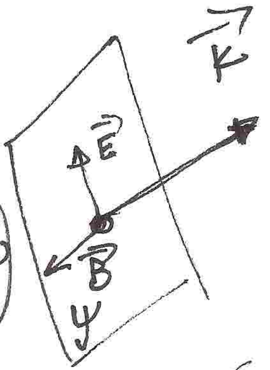
$$\frac{\omega_{max}}{T} = \text{σταθ.}$$

# Δυϊσμός της ύλης

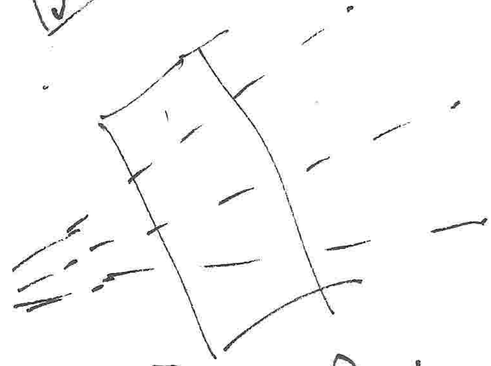
## Ηλεκτρομαγνητικό κύμα — φως

$$\psi(\vec{r},t)=\psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\left(\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0\right)$$




$\vec{S}_p \parallel \vec{k}$, $\quad \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}=|\vec{S}_p|\,\hat{k}$



ακτίνες φωτός

σωματίδια φωτός
κίνηση κάθετη στις
ισοφασ. επιφ.

## γεωμετρική οπτική

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \Longrightarrow \int \delta S=0$$

αρχή ελαχίστης δράσεως

(Το φως διαλέγει το συντομώτερο δρόμο
Γεωμετρική οπτική)

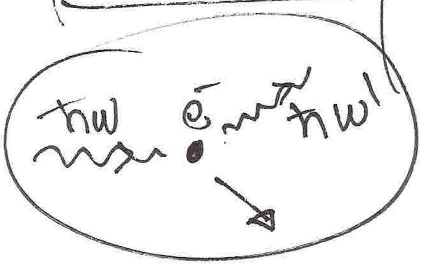
Einstein $\Longrightarrow$ φωτόνια

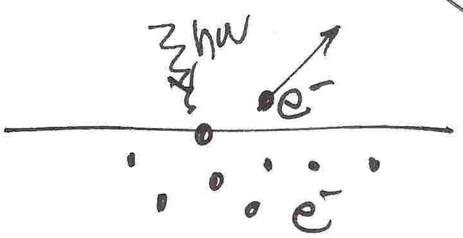
$$\left(\vec{p}=\hbar\vec{k},\ E=\hbar\omega\right)$$


ροή φωτονίων

φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

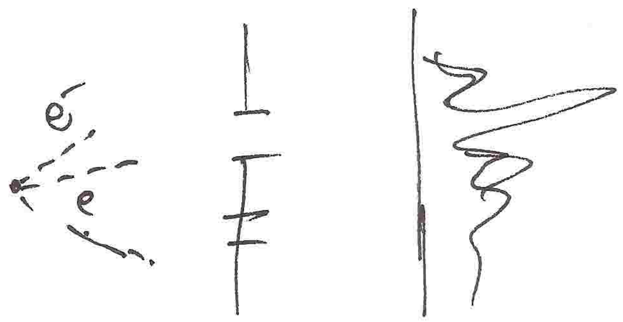
φαινόμενο Compton



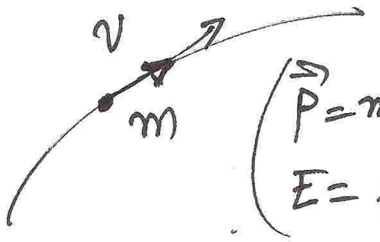




$$\hbar\omega=\frac{1}{2}mv^2$$

# κύματα πιθανότητας (Broglie)



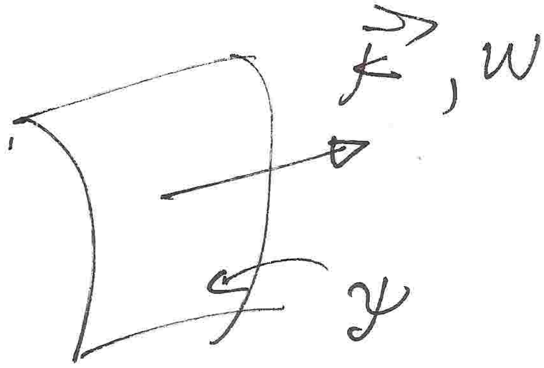

συμβολή περίθλαση σωματιδίων




$$\begin{pmatrix} \vec{p} = m\vec{v} \\ E = \frac{1}{2} m v^2 \end{pmatrix}$$

σωματίδια

$\Longrightarrow$




κύματα ύλης

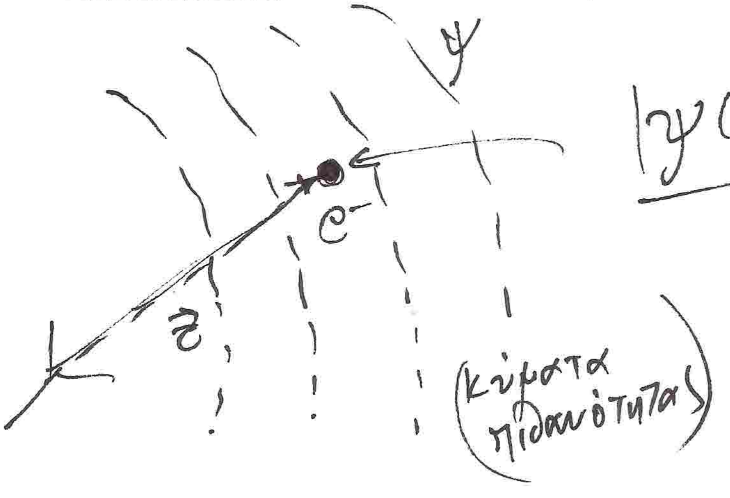
$$\left\{ \begin{aligned} \vec{k} &= \frac{\vec{p}}{\hbar} = \frac{m\vec{v}}{\hbar} \\ \omega &= \frac{E}{\hbar} \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r})\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

κυματική εξίσωση κυμάτων ύλης

εξίσωση Schrödinger

$$|\psi|^2 = \text{πιθανότητα } (P)$$




$|\psi(\vec{r},t)|^2 =$ πιθανότητα εμφάνισης σωματιδίου στην θέση $(\vec{r})$ την στιγμή $(t)$

# Κβαντική Μηχανική

(φυσικό σύστημα) $\Longrightarrow$ $|\psi\rangle$ κβαντική (ket) κατάσταση

φυσικά μεγέθη $\Longrightarrow$ $\hat{A}$ τελεστής

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow \hat{A} \rightsquigarrow |\psi'\rangle$$

μιγαδικός αριθμός

$\langle\psi|\phi\rangle$ = πλάτος πιθανότητας από $|\phi\rangle$ σε $|\psi\rangle$

$\langle\psi|$ (bra) $\Longleftrightarrow$ $|\psi\rangle$ (ket)

$$P(\varphi \to \psi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

$$|\psi(t_0)\rangle \rightsquigarrow \hat{U} \text{ (χρόνους)} \rightsquigarrow |\psi(t)\rangle$$

$\hat{U}$ = τελεστής χρόνου

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \vec{U}(t_0, t)\,|\psi(t_0)\rangle} \Longrightarrow$$

$\hat{E}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$ (εξίσωση Schrödinger)

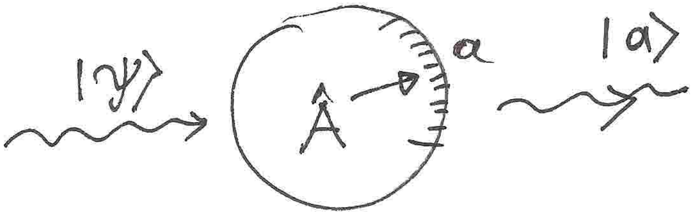
$\hat{H}$ = τελεστής ενέργειας (Hamilton)

$\hat{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$ (τελεστής ορμής)

$\hat{R} = \vec{r}$ (τελεστής θέσης)

$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, (τελεστής ενέργειας)

# Παρατήρηση - Μέτρηση




$$\hat{A}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

$|\alpha\rangle$ = ιδιοκατάσταση

$\alpha$ = ιδιοτιμή

$$|\langle \alpha|\psi\rangle|^2 = \text{πιθανότητα μέτρησης } (\alpha)$$

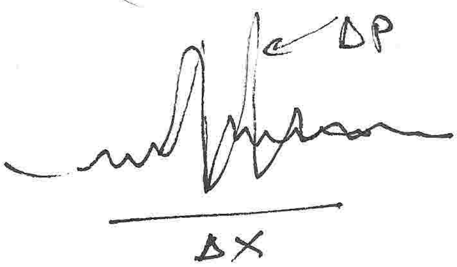
$$\boxed{\langle \hat{A}\rangle_{\text{μεσητιμή}} = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle}$$

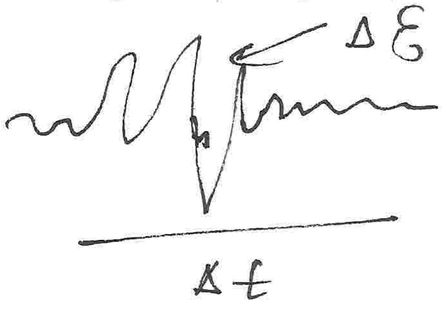
(Κλασσικά μεγέθη) $\equiv \langle \hat{A}\rangle$ (μέση τιμή κβαντικών μεγεθών)

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = \langle \hat{R}\rangle_{\mu\tau.}\,, \quad \vec{P}(t) = \langle \hat{P}\rangle_{\mu\tau} \\ \mathcal{E} = \langle \hat{E}\rangle_{\mu\tau.}\,, \quad \vec{L} = \langle \hat{L}\rangle_{\mu\tau.} \end{array}\right.$$

$$\Delta x\, \Delta p \sim \hbar \qquad \Delta E\, \Delta t \sim \hbar$$

(αρχές αβεβαιότητας) (θέση-ορμή) (ενέργεια-χρόνος)



# Κβαντική θεωρία

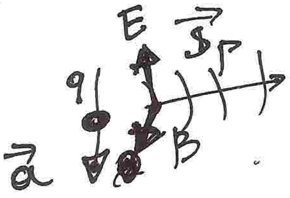
Ακτινοβολία μέλανος σώματος
φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
φαινόμενο Compton
φάσματα εκπομπής
Δυϊσμός - υλοκύματα

$\Longrightarrow$

Κβαντική θεωρία Heisenberg
Κβαντική θεωρία Schrödinger
Κβαντική θεωρία Feynman
ολοκλήρωση Dirac
~~και~~ σχετικιστική εξίσωση Dirac $\Rightarrow$ αντιύλη

## Ακτινοβολία

$\boxed{W = \text{ενέργεια διπόλου}}$




$$E = \left(\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\right) a\left(t - r/c\right)$$

$$S = \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \Rightarrow P_{ολ} = \oint \vec{S}\cdot d\vec{s} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

$$x = x_0 \cos\omega t$$
$$v = -(x_0\omega)\sin\omega t$$
$$a = -\omega^2 x_0 \cos\omega t$$
$$\langle a^2\rangle = \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$$

$$\boxed{P = \frac{q^2\omega^4 x_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}}$$
ισχύς ακτινοβολίας

(ακτινοβολία ηλεκ. διπόλου ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου)

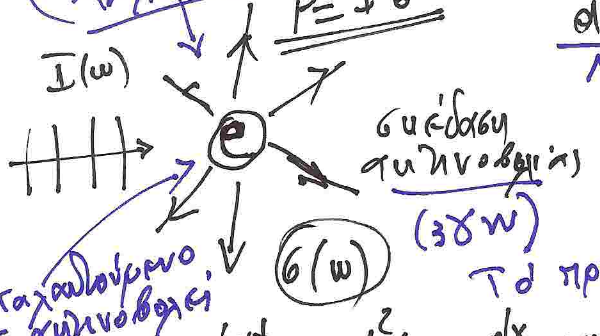
$$dW/dt = -\left(\frac{\omega}{Q}\right)W \quad \text{(μείωση ενέργειας)}$$

$$\frac{dW^a}{dt} = -\frac{dW}{dt} = \gamma W \quad (3\gamma W) \quad \text{(ακτινοβολία)}$$

Μείωση ενέργειας = ακτινοβολούμενη (σκεδαζόμενη) ενέργεια

W = ενέργεια ταλαντωτού

$$P = I\sigma$$




$$dP = I(\omega)\,\sigma(\omega)\,d\omega$$

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)$$

Το προσπίπτον ΗΜ κύμα εξαναγκάζει το e να ταλαντούται και επομένως να ακτινοβολεί.

$$\frac{dW^{σκ}}{dt} = \int_\omega I(\omega)\,\sigma(\omega)\,d\omega$$

$$q_e E_0 e^{i\omega t} = m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x$$

$$x_0 = \left(\frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}\right)e^{i\omega t}$$

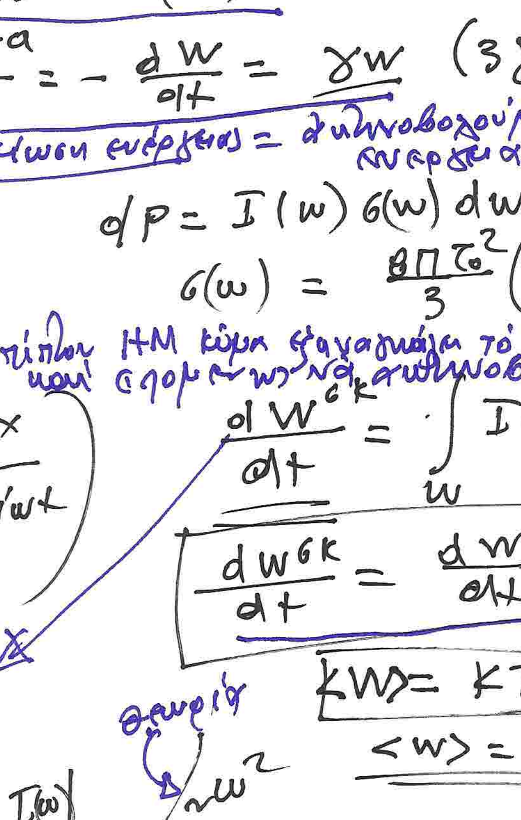
$$\boxed{\frac{dW^{σκ}}{dt} = \frac{dW^a}{dt} = 3\gamma kT}$$

εξίσωση σκέδασης-ακτινοβολίας $\Downarrow$ $\boxed{I(\omega)}$

$$\boxed{\langle W\rangle = kT}$$

$$\langle W\rangle = kT$$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2} \qquad I(\omega) = u(\omega)\,c \qquad u(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}}$$

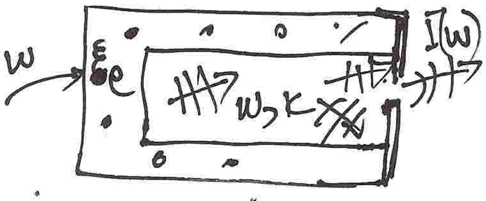


# Ισοκατανομή Ενέργειας

$$\langle \varepsilon \rangle = \iint \varepsilon\, e^{-\varepsilon/kT}\, dp\, dq \Big/ \iint e^{-\varepsilon/kT}\, dp\, dq$$

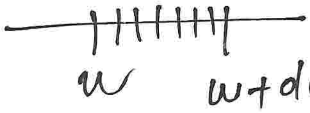
$$\boxed{\varepsilon = p^2 + q^2}$$

$$\boxed{\langle \varepsilon \rangle = \tfrac{1}{2} kT + \tfrac{1}{2} kT = kT}$$




$$dE(\omega) = \bar{\varepsilon}(\omega)\, dN(\omega)\, d\omega$$

$N(\omega)$ = πλήθος ταλαντωτών σε συχνότητα $(\omega, \omega + d\omega)$



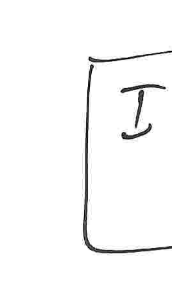

$$dN(\omega) = \frac{V \omega^2}{c^3 \pi^2}\, d\omega$$

$$E_{ολ} = \int dE(\omega) = \int_\omega u(\omega, T)\, d\omega$$

$$\boxed{u(\omega, T) = \frac{\bar{\varepsilon}(\omega)\, \omega^2}{c^3 \pi^2}}$$

$$\boxed{I(\omega) = kT \omega^2 / c^2 \pi^2}$$


$$\varepsilon(\omega) = n \hbar \omega$$




(κβάντωση ενέργειας)

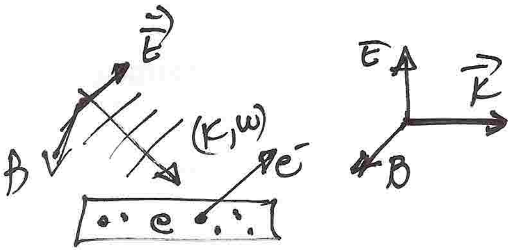
$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum (n\hbar\omega)\, e^{-(n\hbar\omega)/kT}}{\sum e^{-n\hbar\omega/kT}}$$

$$\boxed{\bar{\varepsilon}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}}$$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2 \pi^2}\, \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}}$$

# Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

α)

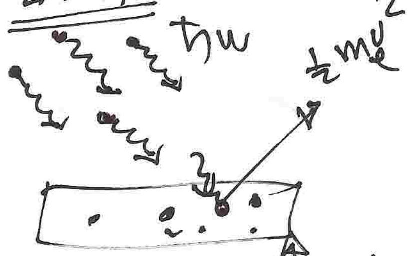



$$\vec F = q\vec E + q\vec v \times \vec B$$

$$qE = m\,dv/dt$$

$$\frac{mv^2}{2} \sim E$$

β) $E = \hbar\omega$

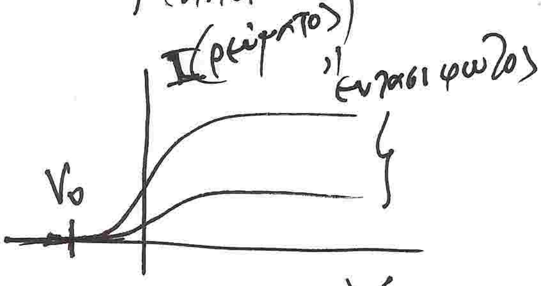


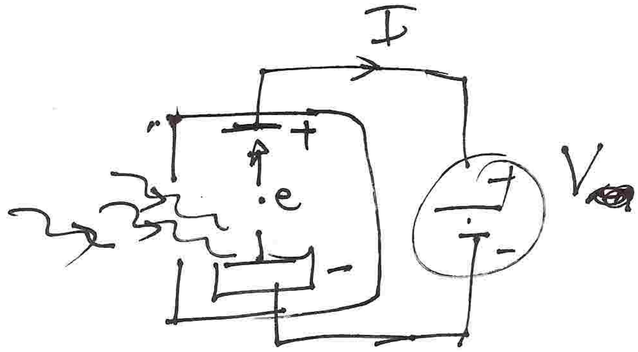

$$e^- + \hbar\omega \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m_e v^2}$$

Einstein

$E = n\hbar\omega$

Planck



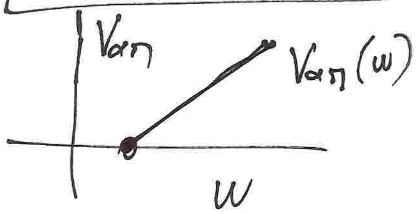




$$\boxed{I = n_e v_e}$$

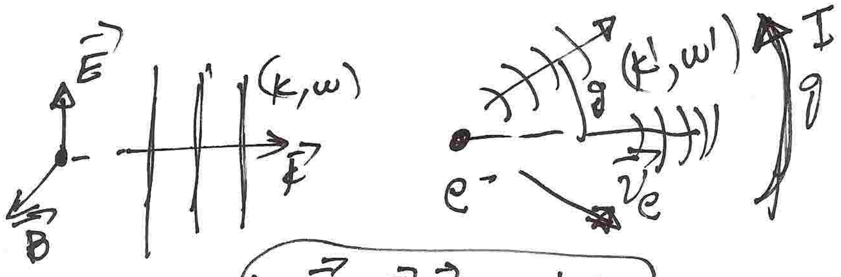
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \hbar\omega \text{ (κβαντική μηχανική)}$$

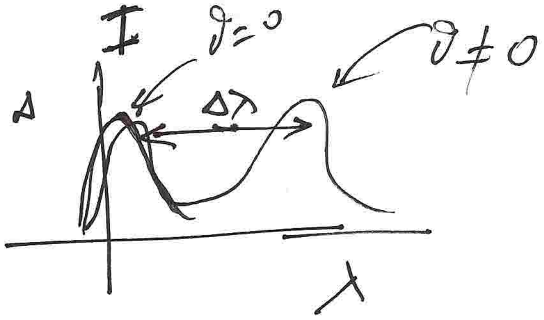
$$\frac{m v_0^2}{2} \sim |E|^2 \text{ (κλασσική μηχανική)}$$

$$\boxed{\hbar\omega = W_{εξ} + eV_{απ}}$$




## Φαινόμενο Compton



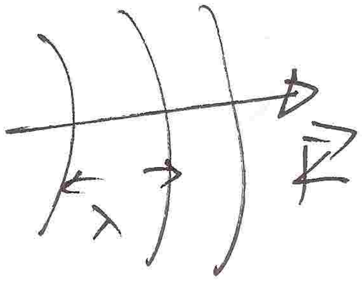

$$\boxed{q\vec E + q\vec v \times \vec B = m_e \frac{dv_e}{dt}} \Rightarrow \Delta\lambda = 0$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)}$$

# Δυϊσμός της ύλης

Κύματα - πεδία



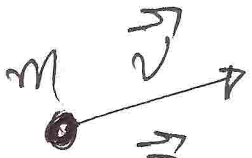

$(\omega, \vec{K})$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $c = \frac{\omega}{K}$

$K = 2\pi/\lambda$

## Σωματίδια

$(E, \vec{P})$




$\vec{P} = m\vec{v}$

$E = \frac{1}{2} m v^2$

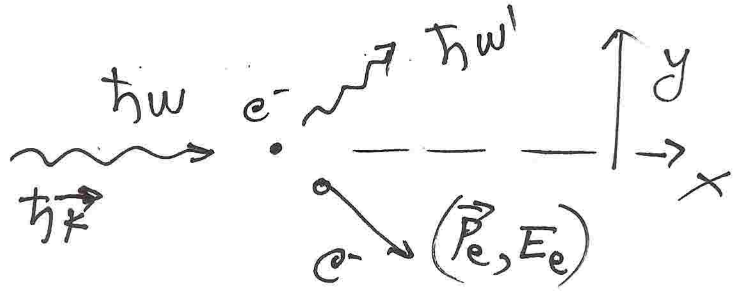
Κβαντική Θεωρία $(\hbar)$

$$(\omega, \vec{K}) \Longrightarrow (E = \hbar\omega, \ \vec{P} = \hbar\vec{K})$$

πεδία — φωτόνια, γραβιτόνια κ.λ.π.

$$(E, \vec{P}) \Longrightarrow (\omega = E/\hbar, \ \vec{K} = \vec{P}/\hbar)$$

σωματίδια $(e^-, p^+, n)$ — κύματα de Broglie (κύματα $e^-$, $p^+$ ...)




$$\boxed{\begin{aligned} E_\varphi &= \hbar\omega \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned}}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}}$$

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2}$$

$v = c \Longrightarrow \boxed{m_0 = 0}$

$$\boxed{m_\varphi = E/c^2}$$

$m_{0\varphi} = 0$

$m_\varphi = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}$

$\hbar = h/2\pi$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

$$\boxed{m_\varphi = \frac{h}{\lambda c}}$$

$$\boxed{p = \frac{h\nu}{c}}$$

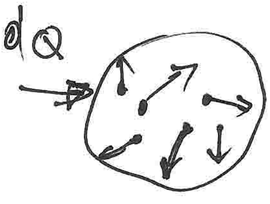
$$\begin{cases} x: & \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c}\cos\vartheta + p_e\cos\varphi \quad (1) \\ y: & 0 = \frac{h\nu'}{c}\sin\vartheta - p_e\sin\varphi \quad (2) \end{cases}$$

$E \qquad h\nu + m_{0e}c^2 = h\nu' + mc^2 \quad (3)$

$$\boxed{(1,2,3) \Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\vartheta)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \mu(MB) \\ C_v &= \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T} \end{aligned}}$$

Θερμοχωρητικότητα.




$U = N\bar{\varepsilon} = \mu\eta RT/2$

$\mu = N/N_0$

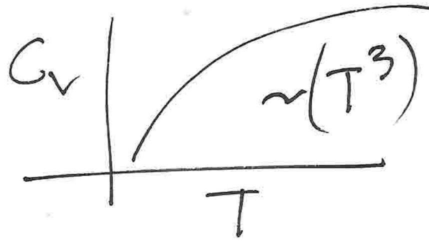
$dQ = d(U+W)$

$V = \sigma\tau\alpha\vartheta \Longrightarrow W = \sigma\tau\alpha\vartheta$

$\bar{\varepsilon} = \langle\varepsilon\rangle = n\left(\frac{kT}{2}\right)$

$C_v = \frac{dQ}{m\,dT} = \frac{dU}{m\,dT} = \underline{\underline{\sigma\tau\alpha\vartheta}} = \left(\mu\eta\frac{R}{2}\right)$

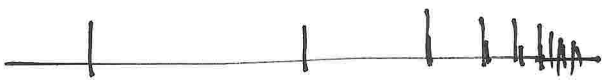
$\underline{\underline{dQ = dU + dW}}$




στερεά

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}$$

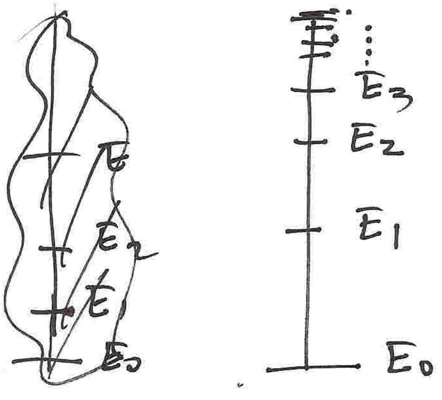
# ατομο Bohr



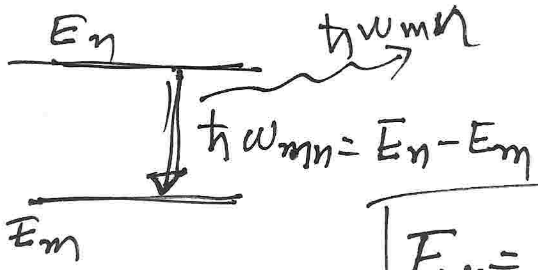
$\lambda$

$$\boxed{1/\lambda = R_H\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)}$$

Balmer–Rydberg




$$\Delta E_{mn} = h\nu_{mn} = E_n - E_m$$




$$\boxed{E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}}$$

$E_1, E_2, \dots E_n \dots$

$v_1, v_2, \dots v_n$

$r_1, r_2, \dots r_n$

$L_1, L_2, \dots L_n$

κβάντωση μηχανικών μεγεθών


$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \left(a_k = v^2/r\right)$$

$$v = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}\right)^{1/2}, \quad \nu = \frac{v}{2\pi r} = \left(\frac{Ze^2}{16\pi^3\varepsilon_0 m_e r^3}\right)^{1/2}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -Ze^2/8\pi\varepsilon_0 r$$

$$L = mvr = \left(\frac{Ze^2 m_e r}{4\pi\varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

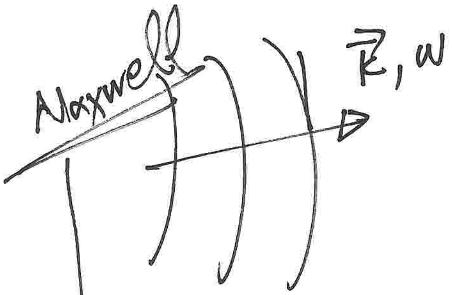
$$\boxed{r_n = a_0 n^2} \Rightarrow E_n = -(\dots)1/n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\boxed{L_n = n\hbar}$$

$$\boxed{E_n = \frac{-m_e Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}}$$

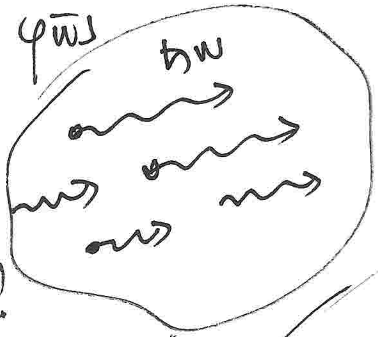
$$\boxed{a_0 = Ze^2/8\pi\varepsilon_0 hcR_H}$$

# Δυϊσμός ύλης (de Broglie)




$\Longrightarrow$ $\boxed{E = \hbar\omega \;,\; \vec{P} = \hbar \vec{k}}$

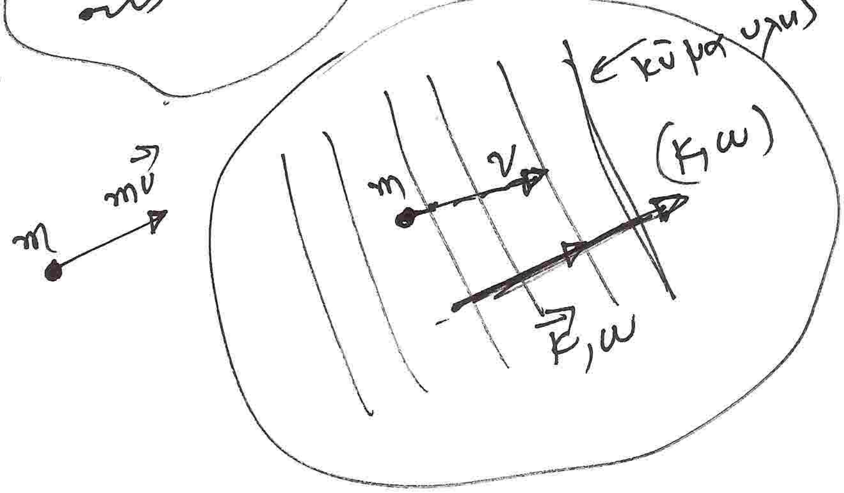
Einstein



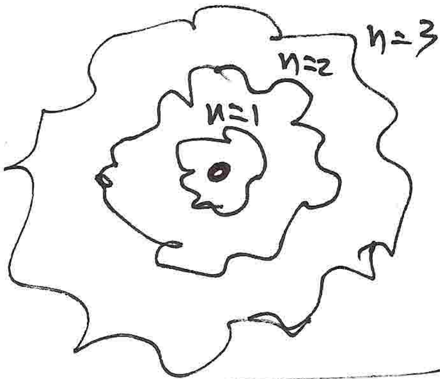

Einstein

$$\boxed{\omega = E/\hbar \;,\; \vec{k} = \vec{P}/\hbar}$$

de Broglie

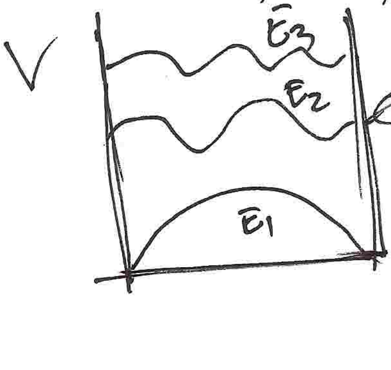



Κύματα de Broglie




$kl = n2\pi$ $\quad \boxed{l = n\lambda}$

στάσιμο κύμα




πηγάδι δυναμικού

$$\boxed{2\pi r = n\lambda}$$

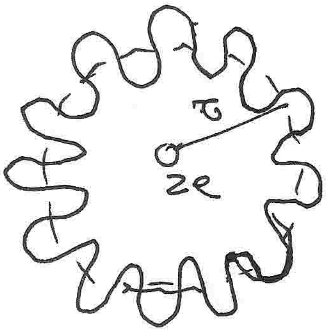
$$\Downarrow$$

$$(E_n, r_n, L_n)$$
$$(n = 1, 2, \dots)$$

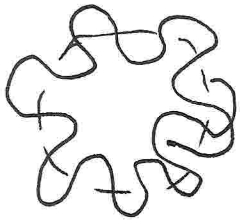
# Κύματα de Broglie και άτομο του Bohr

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2}\,,\quad \boxed{L = n\hbar} \quad \boxed{r = a_0 n^2}\,,\quad \boxed{\hbar\vec{k} = \vec{p} \quad \hbar\omega = E}$$

$$\hbar k = p \rightarrow \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = p \leadsto \boxed{\lambda = h/p} \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$




$$2\pi r = n\lambda$$



$$2\pi r \neq n\lambda$$

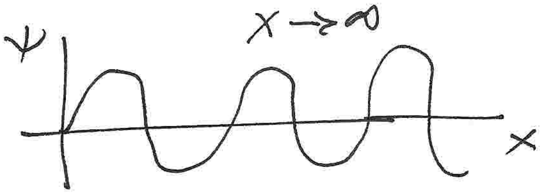
$$2\pi r = n\frac{h}{mv}$$

$$\cancel{2\pi} r\, mv = n\frac{h}{2\pi} \Longrightarrow \boxed{mvr = n\hbar}$$

$$\boxed{L = mvr}.$$

στροφορμή

$$\psi = A\sin kx = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$$




$$|\psi|^2 = P(x)$$

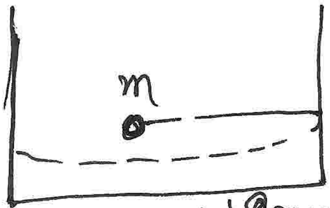
$$\psi = A\sin(kx - \omega t)$$

$$\hookrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}}$$

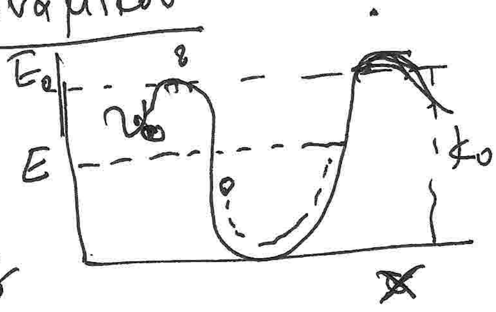
$$\boxed{|\psi|^2 = \tfrac{1}{2}A^2 = \text{σταθ}} \rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$\Delta x < D$$

## Πηγάδι Δυναμικού




κλασσική θεωρία



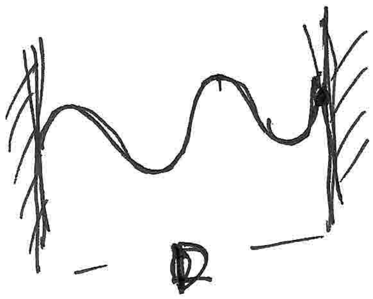

$$V(x)$$

$$E = E_k + V$$

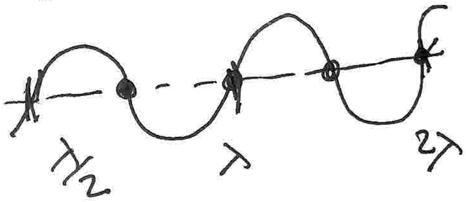
$$E_k = E - V = K$$

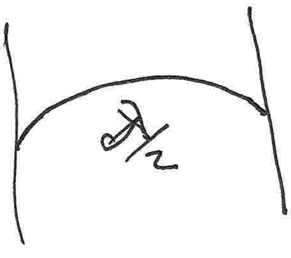
$$E_0 - V_0 = K_0 = \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

ταχύτητα διαφυγής




$$L = n\frac{\lambda}{2}$$



$$D = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n\lambda = 2D \\ \lambda = \frac{h}{p} \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2D}n$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$\boxed{p = \frac{h}{2D}n = n\frac{h}{2D}}$$

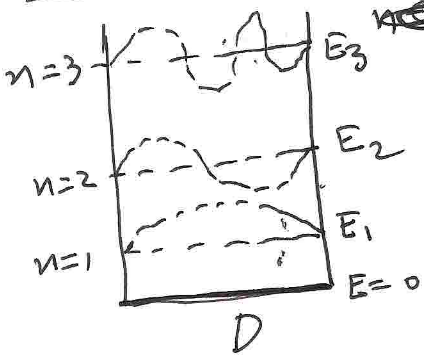
$$p = mv$$
$$p^2 = mv^2 = 2K$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \rightsquigarrow \quad K = n^2\left(\frac{h}{2D}\right)^2 \Big/ 2m = \frac{h^2}{8mD^2}n^2$$

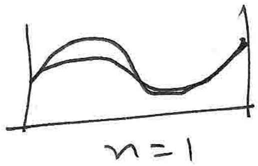
$$\boxed{K = \frac{h^2}{8mD^2}n^2}$$

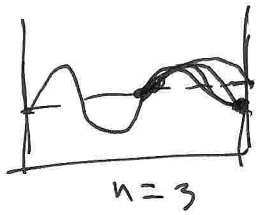
$$E = K + V,\ V = 0 \Rightarrow \boxed{E = K}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{h^2}{8mD^2} \neq 0}$$

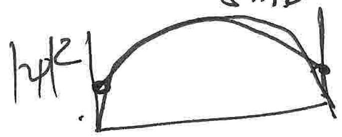


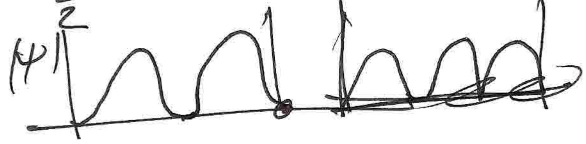


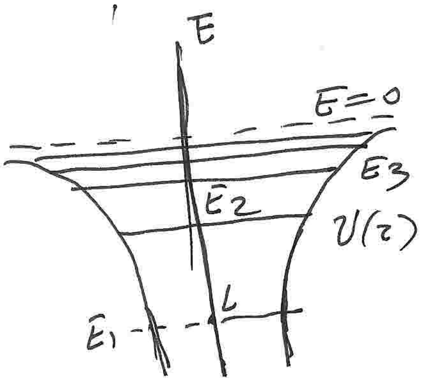


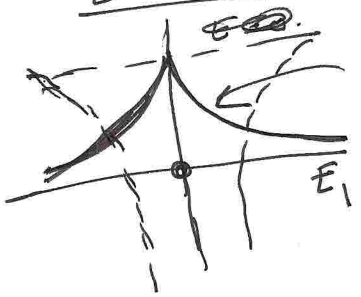

$$E_1 = \frac{h^2}{8mD^2} \qquad E_2 = 4E_1 \qquad E_3 = 9E_1$$

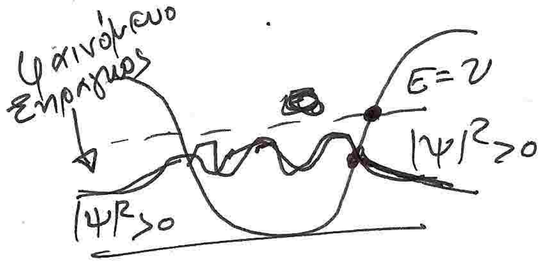



$$E = K + V$$




$$E = K + V$$
$$K = E - V > 0$$
$$K = 0 \to \boxed{E = V}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda = \frac{h}{p} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array}\right) \rightsquigarrow \psi = A\sin(kx + \varphi)$$

$$\hbar k = p \rightsquigarrow p = \hbar k$$

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mK}}{\hbar}$$

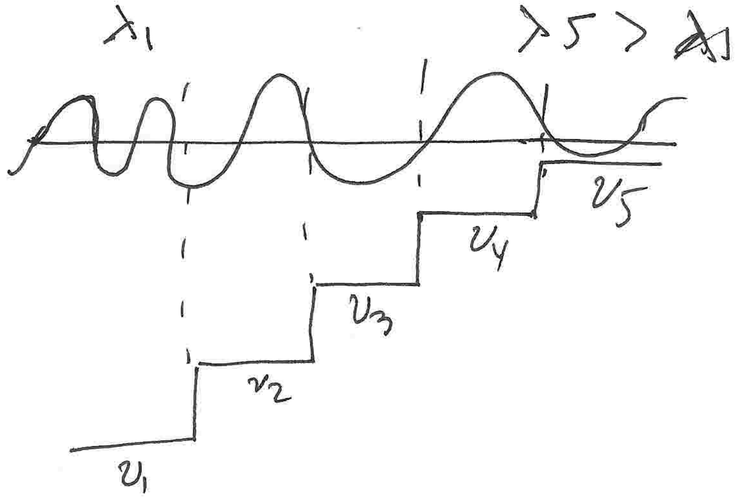
$$\frac{p^2}{2m} = K \Rightarrow p = \sqrt{2mK}$$

$$K = E - V$$

$$\boxed{k = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar} \rightsquigarrow \lambda = h \Big/ \sqrt{2m(E-V)}$$

$$V \uparrow \Rightarrow (E - V)\downarrow \Rightarrow \lambda \uparrow$$




$$\lambda_i = \frac{h}{\sqrt{2m(E-\upsilon_i)}}$$

$$\psi = A\sin(kx+\varphi)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = kA\cos(kx+\varphi)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2 A\sin(kx+\varphi)$$

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m\mathcal{K}}{\hbar^2}\psi}$$

$$\mathcal{K} = E - \upsilon$$

$$\left( k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{K}}}{\hbar} \qquad k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{K}_{\epsilon\nu}}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E-\upsilon)}}{\hbar} \right)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}[(E-\upsilon)]\psi \Rightarrow \underline{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \upsilon\psi = E\psi}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \upsilon\right]\psi = E\psi$$

κβαντική Μηχανή

$$\underline{\mathcal{K} + \upsilon = E}$$

κλ. Μηχαν

$$\frac{p^2}{2m} + \upsilon = E$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \longrightarrow \hat{p}^2/2m$$

(Τελεστής)

$$\boxed{\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{\upsilon}\right)\psi = E\psi}$$

εξίσωση Schrödinger

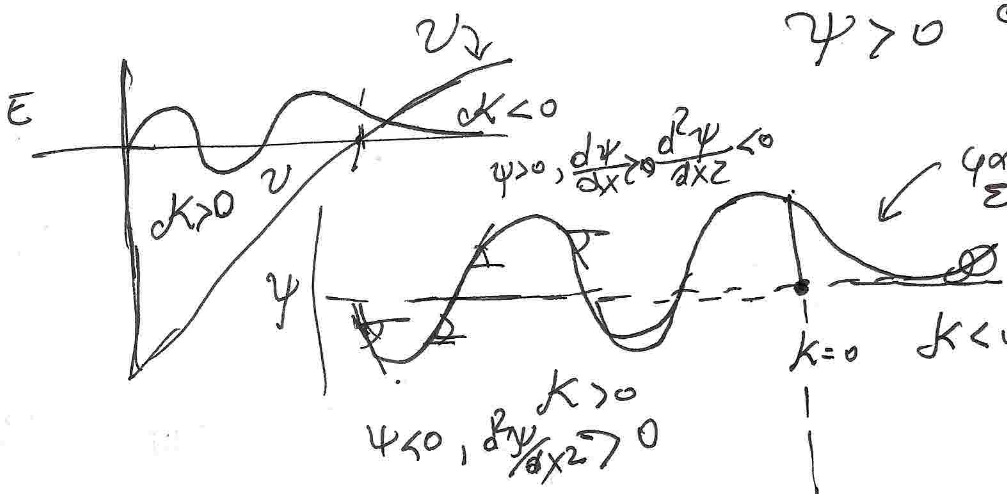
$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2}\Big/\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}(E-\upsilon)}$$

$E-\upsilon>0$, $\psi>0$ $\frac{d^2\psi}{dx^2}<0$, $\quad E-\upsilon>0$, $\psi<0$ $\frac{d^2\psi}{dx^2}>0$

$\mathcal{K} = E-\upsilon<0$

$\psi>0$ $\frac{d^2\psi}{dx^2}>0$

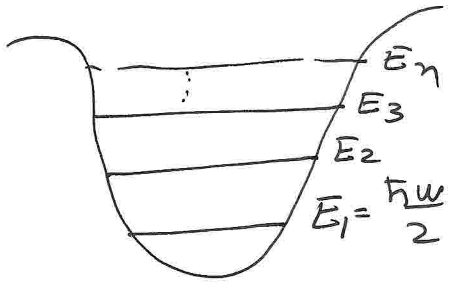
$\mathcal{K} = E-\upsilon$



# Ταλαντωτής

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$




$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\psi(x) = 0$$

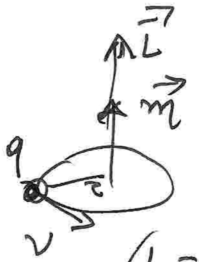
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]\psi(x) = 0$$

$$\psi \sim A\, e^{-ax^2}(\cdots)$$

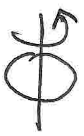
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi(x) = 0$$

$$E_1 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad E_2 = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{3\hbar\omega}{2}, \ldots$$

$$E_n = n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$




## Spin



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{m} \simeq g\vec{L}$$

$$L = mvr$$

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

$$2\pi r = vT$$


$$\boxed{\vec{m} = I\vec{S}} \qquad \vec{m} \to \vec{\mu}$$

$$m = IS = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2$$

$$m = \frac{1}{2}\frac{qvrm}{m}$$

$$= \frac{1}{2}qL/m$$

$e^-$ spin

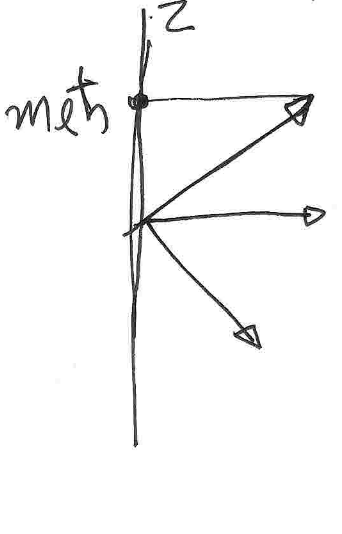
$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$$

$$E \sim \frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\ell = 0, 1, 2 \ldots n-1$$

$$\boxed{\vec{\mu} = -2\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}}$$

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$$




$$\boxed{L_z = m_\ell \hbar}$$

$$\boxed{m_\ell = -\ell \ldots +\ell}$$

$$S = \pm\frac{1}{2}\hbar$$

| $\ell$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Σύμβολο | s | p | d | f | g | h … |

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{P} &\to -i\hbar\vec{\nabla} \\ p &\to -i\hbar\,\partial/\partial x \end{aligned}}$$

$n \longrightarrow$ (κύριος κβαντικός αριθμός) $(E_n)$

$m_\ell$, $\ell$, $m_s$

$$\left\{\begin{aligned} &L_z = m_\ell\hbar \\ &L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \\ &\pm\tfrac{1}{2}\hbar \end{aligned}\right.$$

Ενέργεια

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

$$\frac{\hat{P}^2}{2m}\psi + \hat{U}(x)\psi = E\psi$$

εξίσωση Schrödinger

$|\psi|^2 =$ πιθανότητα.

$$\left\{\begin{matrix} E_1, & E_2 & \cdots & E_n & \cdots \\ n=1 & n=2 & \cdots & n & \cdots \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} &n = 1, 2, \dots \infty \\ &\ell = 0, 1, 2 \dots n-1 \\ &m_\ell = -\ell \dots +\ell \\ &m_s = \pm\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

(Απαγορευτική Αρχή Pauli)

(2) $n=1$ $\ell = 0$, $m_\ell = 0$, $m_s = \pm 1/2$

(8) $n=2$ $\ell = (0, 1)$, $m_\ell = (-1, 0, +1)$ $m_s = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$

(18) $n=3$ $\ell = (0, 1, 2)$ $m_\ell = \begin{pmatrix} 0 & & (\ell=0) \\ 0, & \pm 1 & (\ell=1) \\ 0 & \pm 1, & \pm 2 \end{pmatrix}$ $m_s = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$

| | | |
|---|---|---|
| 3 | ——— | (18 υποφλοιοί |
| 2 | ——— | (8 υποφλοιοί) |
| $n=1$ | ——— | (2) |

$\psi(x) \longrightarrow \boxed{\psi_{n,\ell,m_\ell,m_s}}$

| $\ell$ | $m_\ell$ |
|---|---|
| $\ell = 0$ | 0 |
| $\ell = 0,1$ | 0 $\pm 1$ |
| $\ell = 0,1,2$ | 0 $\pm 1$ $\pm 2$ |

~~ποτέ δύο~~ δύο $e^-$, $p^+$ ποτέ το ίδιο $\psi$

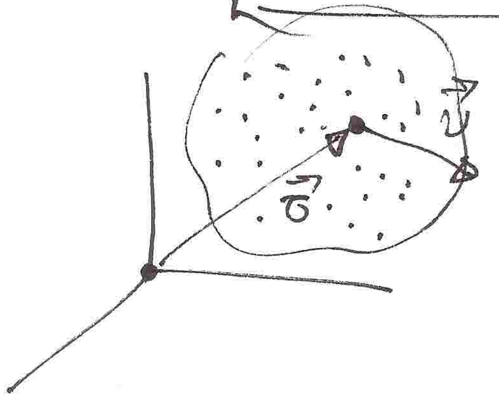
Pauli

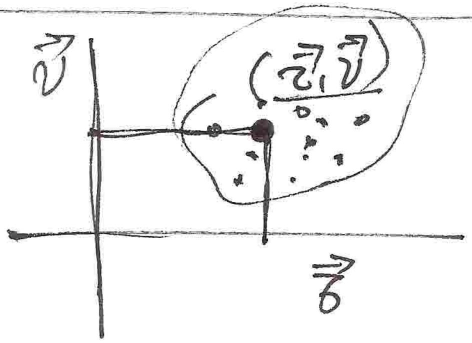
$$\Omega(n, n_i, m_j) = \frac{n!}{(n_1!\, n_2! \cdots n_N!)(m_1!\, m_2! \cdots m_N!)}$$

$(n_1, n_2 \dots n_N)$ = περιοχές θέσης

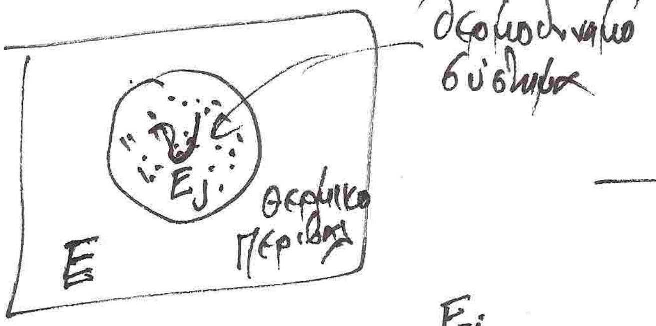
$(m_1, m_2, \dots m_N)$ = περιοχές ταχύτητας.

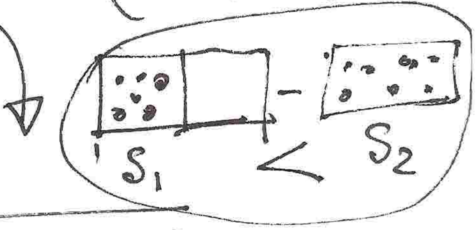
$$\boxed{S = k \ln \Omega(n, n_i, m_j)_{i,j=1,\dots N}}$$

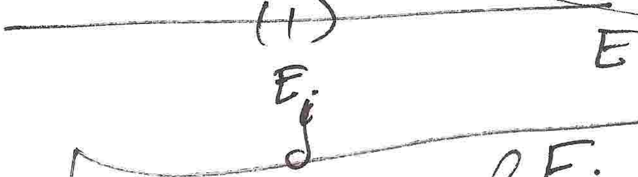



$$\frac{dS}{ds} \geq 0 \Longrightarrow \boxed{S \Longrightarrow S_{max}}$$ (μέγιστη αταξία)




$$E_0 = E + V_j = E_j$$

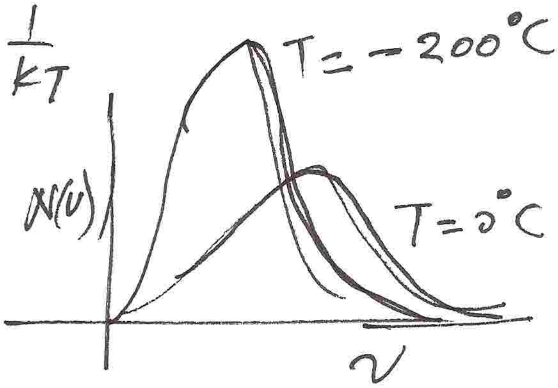
$$(V = E_j)$$

$$\boxed{P(E_j) = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}}$$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$$ συνάρτηση επιμερισμού

$$\boxed{S = -k \sum_j P_j \ln P_j}, \quad P_j = P(E_j)$$

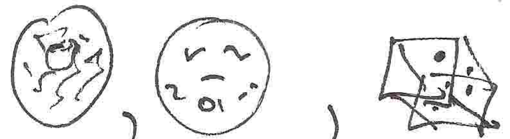
$$P(E) \simeq \frac{e^{-\beta E}}{Z} \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$




$$P(v) = C\, e^{-mv^2/2kT}$$

$$P = \frac{N(v)}{N}$$

# Πληροφορία (I)



κορώνα (1), γράμματα (0), ζάρι

$R_0 = 2$ συμβάντα (μικρή αβεβαιότητα)

$R = 6$ συμβάντα (μεγάλη αβεβαιότητα)

$$(R_0, I_0 = 0) \Longrightarrow I_1 \neq 0 \quad (R_1 = 1)$$

$$R_0 = R_{01} R_{02} \Longrightarrow I(R_{01} R_{02}) = I(R_{01}) + I(R_{02})$$

$$\boxed{I = k \ln R_0} \qquad \boxed{k \ln 2 = 1 \text{ bit}}$$

$$R = 2^n \Longrightarrow I = k \ln R = kn \ln 2 = n \text{ (bit)}$$

$$k = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

$$R = 8 = 2^3 \Rightarrow I = 3 \text{ bit}$$

$$R_0 \Longrightarrow R_1 \qquad I = k \ln R_0 - k \ln R_1$$

# Λέξεις και πληροφορία

$$( - - \cdot \cdot \cdot - \cdot \cdot )$$

$$I(N_1^{(\cdot)}, N_2^{(-)}) = ;$$

$$N_1^{(\cdot)} + N_2^{(-)} = N$$

$$R = \frac{N!}{N_1!\,N_2!} \Rightarrow I = k \ln R = k \ln \frac{N!}{N_1!\,N_2!}$$

$$I = k(\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2!)$$

$$P_j = \frac{N_j}{N} \quad j = 1,2$$

$$I = -kN\left[\frac{N_1}{N}\ln\frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N}\ln\frac{N_2}{N}\right]$$

$$I = -kN[P_1 \ln P_1 + P_2 \ln P_2]$$

$$i = \frac{I}{N} = -k(P_1 \ln P_1 + P_2 \ln P_2) = -k\sum_j P_j \ln P_j$$

$(i \sim S)$ πληροφορία = αρνητική εντροπία

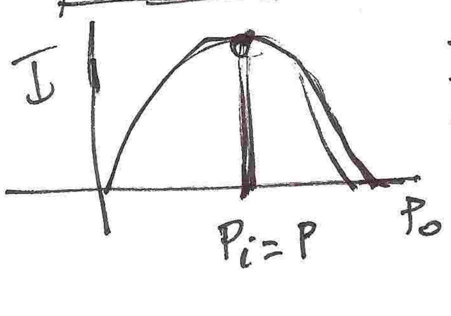
$$I\uparrow \Rightarrow S\downarrow, \quad I\downarrow \Rightarrow S\uparrow$$

$S\uparrow$ = αύξηση άγνοιας, αβεβαιότητας, αταξίας

$I\uparrow$ = ελάττωση άγνοιας, αβεβαιότητας εντροπίας

$$\boxed{\text{Πηγή}} \longrightarrow (s_1, s_2, \ldots s_q)$$

$$I = -\sum P(s_i) \log_2 P(s_i)$$



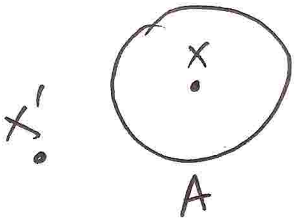
Ιστορία του ΗΜ-ΜΥ

Μάθημα 10ο

(Συνοχα, λογική
Κυκλώματα, Υπολογιστές
Σήματα, Νοημοσύνη)

# Σύνολα

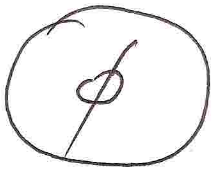
$A = \{x : x \in A\}$




$x \in A$

$x' \notin A$

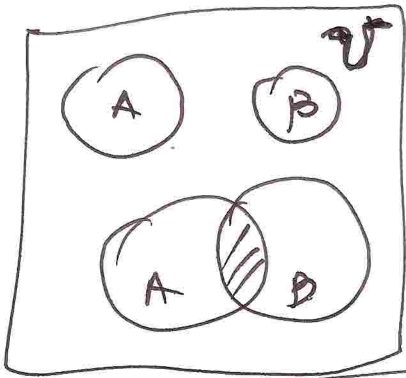
$\exists x : x \in A$



$\nexists x : x \in A$

$A = \emptyset$

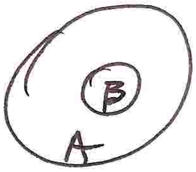
κενό σύνολο




$A \cap B = \emptyset$

$A \cap B \neq \emptyset$

$(A, B \subset U)$




$B \subset A$

$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

| | |
|---|---|
| $\in$ = ανήκει | $\notin$ = δεν ανήκει |
| $\exists$ = υπάρχει | $\nexists$ = δεν υπάρχει |
| $\Longrightarrow$ | συνεπάγεται |

$A \cup B = B \cup A$ , $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

$A \cap B = B \cap A$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A - B = A \cap B'$ , $A \subset B \Longrightarrow A' \supset B'$ , $B' \subset A'$

$A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cup U = U$ $\quad A \cap U = A$

υ $U = \Omega$ = παγκόσμιο σύνολο $\rightarrow$ $U = \Omega$

# Προτασιακός Λογισμός - Σύνολα

$P \simeq$ αληθής , Σήμερα βρέχει

$\exists\ x : P(x) =$ αληθής

$\exists$ (σήμερα βρέχει $= x$)

$\exists =$ Υπάρχει

$\nexists =$ δεν υπάρχει

$\Omega = \{x : P(x) =$ αληθής$\}$

$\Omega = \{x :$ Σήμερα βρέχει$\}$

$P \simeq \Omega \simeq 1$

Αλήθεια.

$\Omega = \emptyset$ $\{\nexists\ x :$ Σήμερα βρέχει$\}$

$P = \emptyset = 0$

(ψευδής)

$P \wedge Q$ , Σήμερα βρέχει (και) κάνει κρύο

$P \vee Q$ Σήμερα ή βρέχει ή κάνει κρύο

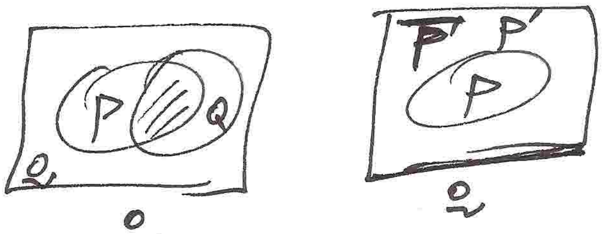
$P' = \bar{P}$ (όχι P) Σήμερα δεν βρέχει

(ή) $P \cup Q$

(και) $P \cap Q$

$\bar{P} = P'$

(όχι)




φυσική κατάσταση : σήμερα βρέχει

Νοητική κατάσταση : Υπάρχουν ρητοί αριθμοί


$F(T, O, \Pi\theta) = 1$

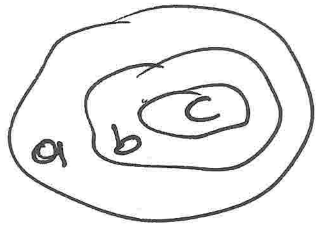
$T =$ τρίγωνο , $O =$ ορθογώνιο , $\Pi\theta =$ Πυθαγόρειο θεώρημα

$F =$ ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα

# Αλγεβρα Boole

$$\left\{ \begin{array}{lll} \wedge \equiv \text{καί}, & \Longrightarrow = \text{συνεπάγεται}, & \in = \text{ανήκει}. \\ \vee = \text{ή}, & \Longleftrightarrow = \left(\text{συνεπάγεται και αντιστρόφως}\right) & \notin = \text{δεν ανήκει} \end{array} \right\}$$

**A1:** $a \overset{\supset}{\cancel{\subset}} b \wedge b \overset{\supset}{\cancel{\subset}} c \Longrightarrow a \overset{\supset}{\cancel{\subset}} c$ $\left(\{a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow c\} \Rightarrow \{a \Rightarrow c\}\right)$

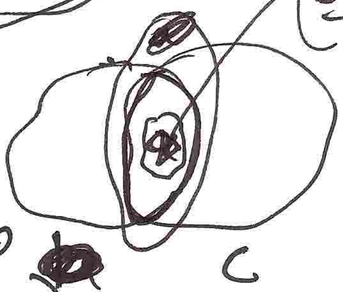


(A1)

**A2:** $a \subset a$

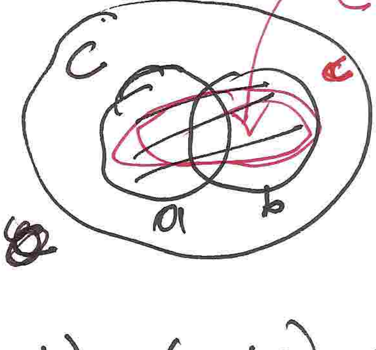
$a = a$

A3. $a \subset (b \wedge c) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \subset b \\ a \subset c \end{array} \right.$



A3

**A4.** $a \vee b \subset c \Leftrightarrow (a \subset c) \wedge (b \subset c)$




$$\left\{ \frac{P \cup Q \subset R \Longleftrightarrow}{P \subset R \wedge Q \subset R} \right\}$$

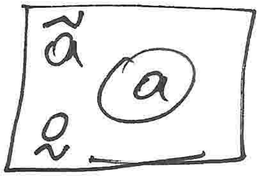
**A5** $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \subset a \vee (b \wedge c)$

(ή a ή b) και (ή a ή c) συνεπάγεται (a και (b ή c))

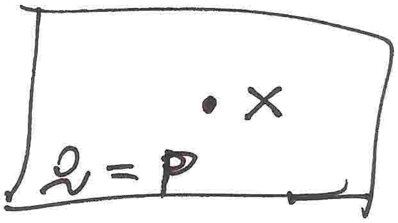
Αξίωμα 6 : $\underline{0 \subset a}$ $\qquad \dfrac{\emptyset \subset P}{\emptyset \subset \Sigma}$

$0 = \emptyset$

$\boxed{\forall x \Rightarrow P(x) \Rightarrow P \simeq \Omega}$




$a \subset \Omega$




$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a} = \text{όχι } a. \\ a = \Omega, \tilde{a} = \emptyset \end{array} \right\}$

Τό κενό υποσύνολο κάθε συνόλου

Αξίωμα 7 $\qquad \underline{a \subset 1}$

$\boxed{\begin{array}{l} \emptyset = 0 \\ \Omega = 1 \end{array}}$

$\underline{a} \neq \emptyset \Rightarrow a = \text{αληθής}$

$\exists\, x : \underline{a(x)}$

$\left( \forall = \text{διά κάθε},\ Q,\ \exists = \text{υπάρχει} \right)$ $\qquad \left( \begin{array}{c} 0,\ 1,\ \exists,\ \forall \\ \vee \ \wedge \ \Rightarrow \end{array} \right)$

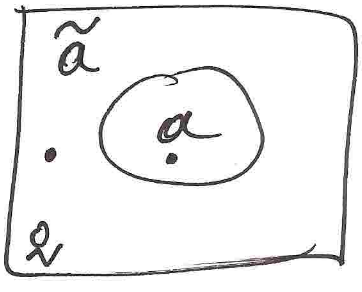
$\left( \begin{array}{l} 0 = \emptyset \Rightarrow P(x) = \text{ψευδής} \\ \nexists\, x : P(x) \text{ άρα} \\ P = 0 \end{array} \right)$

Αξίωμα 8 : $\underline{a \wedge \tilde{a} \subset 0}$ , η τομή τό $a$ μέ τό όχι-$a$ είναι τό κενό

(και $a$ και όχι-$a$ = ψευδής)

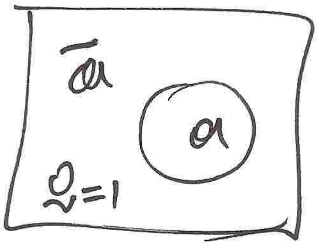
$\nexists\, x : \underline{a(x) \wedge \tilde{a}(x) = Q}$

$\left( a \cap \tilde{a} \subset \emptyset = \text{ψευδής} \right)$



## αξίωμα 9

$1 \subseteq a \vee \tilde{a}$




$a \vee \bar{a} = \Omega = 1$

$\Omega \subseteq a \vee \tilde{a} = a \vee \bar{a}$

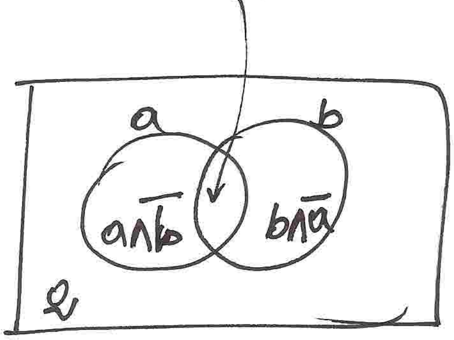
Ω = παγκόσμιο σύνολο

$\Omega = 1 =$ αληθές $(\forall x : x \in \Omega)$

Θεωρήματα: $(a \subseteq a \wedge a \,,\; a \vee a \subseteq a)$

$a \subseteq a \vee a$

αΛb




$\phi \cup \phi = \phi$

$\phi \cap \Omega = \phi$

$\phi \cup \Omega = \Omega$

$\phi \cup \phi = \phi$

1) ένωση ψευδών προτάσεων οδηγεί σε ψευδή πρόταση

$\phi \cap \Omega = \Omega$

2) η τομή αληθούς - ψευδούς είναι ψευδής

3) η ψευδής πρόταση περιέχεται σε αληθή

$o \subset a$, $o(x) = \phi$, $a(x) = \Omega = 1$

Προτασιακός Λογισμός:

$\Omega \cup \phi = \Omega$

4) η ένωση αληθούς και ψευδούς προτάσεις είναι αληθής

$(a \vee \phi = 1)$

$P \supset Q \equiv P \supset Q \,,\; P \Rightarrow Q$

P = βρέχει, Q = βρεγμένος δρόμος

$P \supset Q \equiv \bar{P} \supset \bar{Q}$

$\boxed{\phi \cup \phi = \phi \quad \phi \cap P = P}$

$\boxed{a = \Omega \quad \bar{a} = \phi}$

$\overline{P} \equiv$ όχι $P$ = ($P$ = ψευδής)

$P \wedge q$, $P \vee q$, $P \supset q$, $P \equiv q$

($P$ και $q$) ($P$ ή $q$), ($P$ συνεπάγεται $q$), {$P$ ισοδύναμη $q$: $P$ = αληθής εάν και μόνο εάν $q$ = αληθής}

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $0 \wedge 1$ |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\vee$ |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $q$ | $P \Rightarrow q$ ($\supset \equiv \Rightarrow$) |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$\tilde{Q}$ $\left(\begin{array}{ll} Q = 1 & \tilde{Q} = 0 \\ Q = 0 & \tilde{Q} = 1 \end{array}\right)$

$\underline{P \equiv Q}$ $\left(\begin{array}{ll} 0 \equiv 0, & 1 \\ 0 \equiv 1, & 0 \\ 1 \equiv 0, & 0 \\ 1 \equiv 1, & 1 \end{array}\right)$ ($P \equiv Q$)

$\left(\begin{array}{l} 0 \Longrightarrow \text{Low}, L \\ 1 \Longrightarrow \text{High}, H \end{array}\right)$ χαμηλή τάση / υψηλή τάση

$\wedge \Rightarrow \bullet$ (λογικός πολλαπλασιασμός)

$\vee \Rightarrow +$ (λογική πρόσθεση)

$(\cdot)$ $\left\{\begin{array}{l} 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}\right\}$ $(+)$ $\left\{\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 1 \end{array}\right\}$

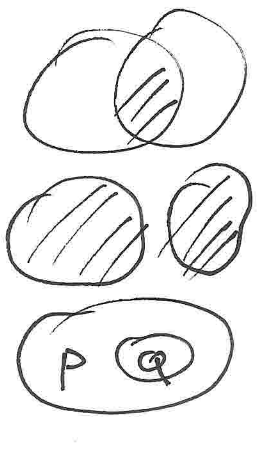
$P \wedge Q$

$P \vee Q$,

$\cancel{PQQ}$,

$Q \subset P$

$P \supset Q$



# Προτασιακός Λογισμός — Άλγεβρα Boole

(και) $x \cdot y = 1$ όταν $x=1, y=1$ αλλιώς $x \cdot y = 0$

$(0 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 1 = 0,\ 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1)$

(ή) $x + y = 1$ όταν ή το $x$ ή το $y$ είναι 1

$(0+0=0,\ 1+0=1,\ 0+1=1,\ 1+1=1)$

(όχι) Άρνηση: $\underline{x'} = 0$ αν $x=1$, $\underline{x'=1}$ αν $x=0$

Να αποδειχθή ότι $\left\{ \begin{array}{l} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z) \end{array} \right\}$

| $z$ | $x$ | $y$ | $x \cdot y$ | $x+y$ | $x \cdot z$ | $x+z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | | | |

| $x \cdot y + x \cdot z$ | $(x+y) \cdot (x+z)$ |
|---|---|
| | |

$x, y$, $(0, 1)$, (ψευδής, Αληθής)

($0 \to$ ψευδής $1 \to$ Αληθής)

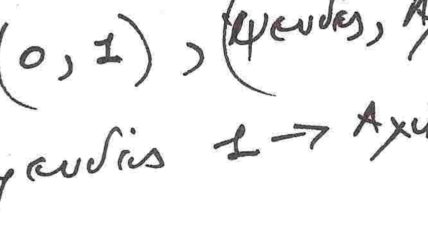
$\emptyset =$ ψευδής(0) $\nexists x : x \in \emptyset$

$\Omega =$ αληθής (1) $\forall x \Rightarrow x \in \Omega$

$P(x) = 0 \Rightarrow \nexists x : P(x) =$ αληθής

$P(x) = 1 \Rightarrow \forall x : P(x) =$ αληθής

$\Omega = \{x : P(x) =$ αληθής$\}$



# Άλγεβρα Boole

$$+,\ x+y,\quad P\vee Q,\quad A\cup B$$
$$\cdot,\ x\cdot y,\quad P\wedge Q,\quad A\cap B$$

(Ένωση - Τομή, Προτάσεις, Σύνολα, Αριθμοί)

<u>αξιώματα</u>

0 = ουδέτερο στοιχείο, +

1 = ουδέτερο στοιχείο, ·

$(+,\ \cdot,\ 0\ 1)$ <u>Λογικά σύμβολα</u>. όχι αριθμητικά

$(+,\ \cdot,\ -,\ :)$ = αριθμητικές πράξεις $\Longrightarrow$ $\left\{\begin{matrix} + & \cdot \\ \vee & \wedge \\ \cup, & \cap \end{matrix}\right\}$ Λογικές Πράξεις Boole

Μαθηματικά — Λογική

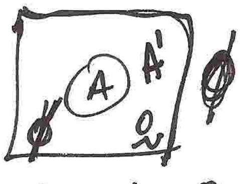
$$\left\{\begin{matrix} x+0=0+x=x \\ x\cdot 1=1\cdot x=x \end{matrix}\right.$$
(ουδέτερα στοιχεία)

$$\left\{\begin{matrix} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{matrix}\right.$$
(μετάθεση)

$$\left\{\begin{matrix} x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z) \\ x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z) \end{matrix}\right.$$
(Επιμεριστικός)

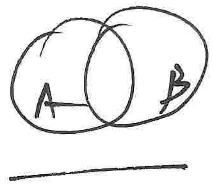
$$\begin{matrix} A\cup\emptyset=\emptyset\cup A=A \\ A\cap\Omega=\Omega\cap A=A \end{matrix},\quad \begin{matrix} A\cup B=B\cup A \\ A\cap B=B\cap A \end{matrix},$$

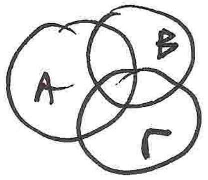
$$A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$$
$$A\cup(B\cdot\Gamma)=(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$$




$\Omega\to 1$

$\emptyset\to 0$



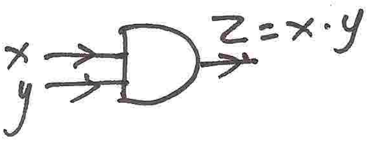

$\Omega\cup\emptyset=\Omega$ $\quad(1+0=1)$

$\Omega\cap\emptyset=\emptyset$ $\quad(1\cdot 0=0)$

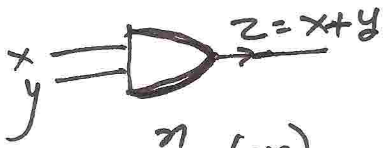
$x'\to A'=$ όχι

$$\left\{\begin{matrix} x+x'=1 \\ x\cdot x'=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} A\cup A'=\Omega \\ A\cap A'=\emptyset \end{matrix}\right\}$$
(συμπλήρωμα - Άρνηση - όχι)

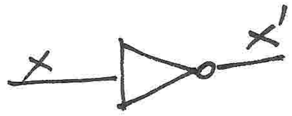
# Λογικές Πύλες



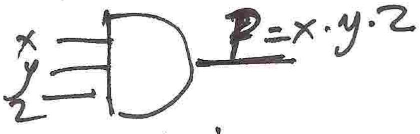

(Και)
(and)



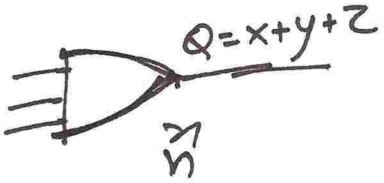

ή (or)




όχι




και




ή

**Επεξεργασία σήματος – άλγεβρα Boole – Υπολογισμός**

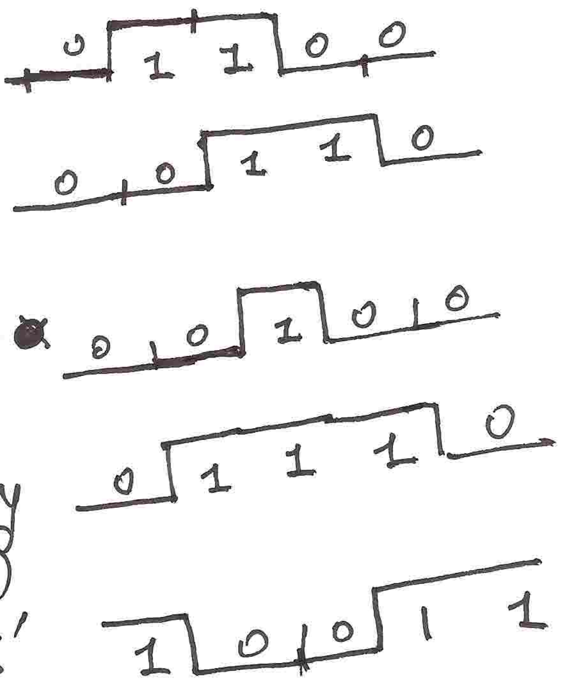
x

y

x·y
και

x+y
(ή)

x'
όχι



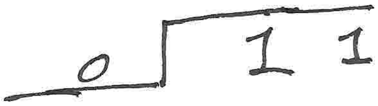

λέξη x = 0 1 1 0 0

λέξη y = 0 0 1 1 0

λέξη x·y = 0 0 1 0 0

λέξη x+y = 0 1 1 1 0

λέξη x' = 1 0 0 1 1



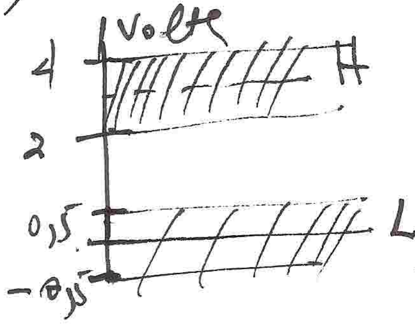

0 ⇒ V = (-0,5 – 0,5) Volts (H)
~~χ~~αμηλή τάση

1 ⇒ V = (2 – 4) Volts (L)
υψηλή τάση

V(-0,5 – 0,5) volts, V(2 – 4) volts

(Αληθεια)

(ψευδής)

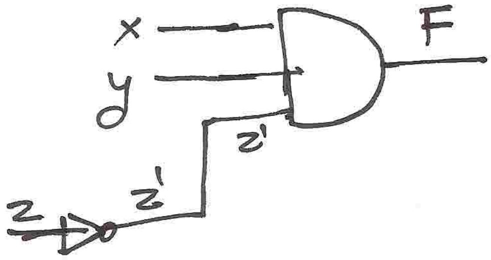



Λογικό (1) (ναι) (Α)
Αληθής

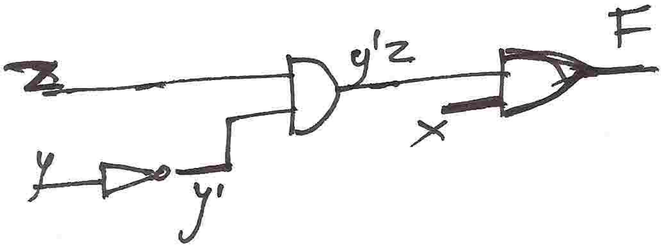
Λογικό (0) όχι (Ψ)
ψευδής

# Συναρτήσεις Boole - Λογικά κυκλώματα

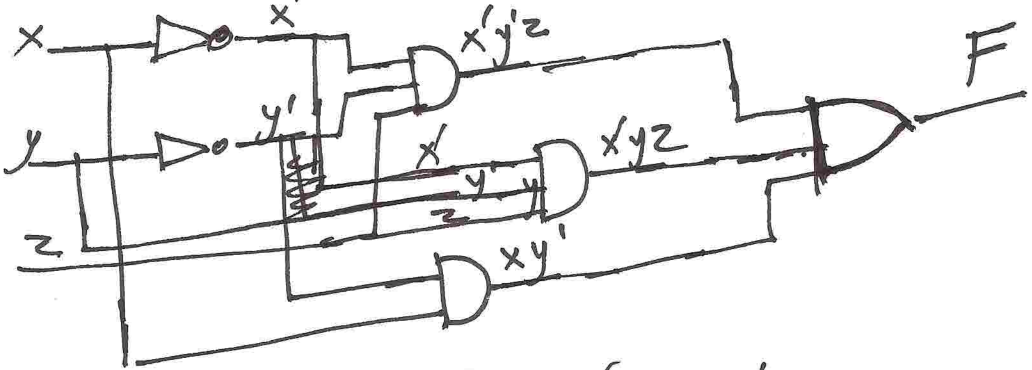
$F = xyz'$,



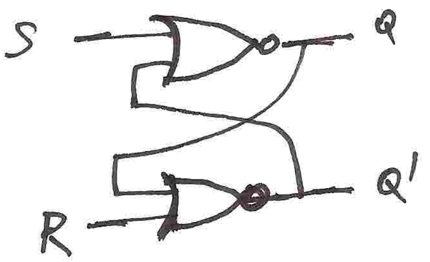

$F = x + y'z$




$F = x'y'z + x'yz + xy'$




Κύκλωμα flip-flop (Μνήμη

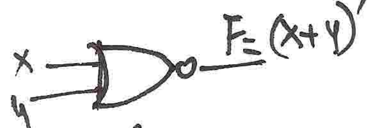



(Μνήμη


Nand
(όχι-και)

| x | y | F |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Nand



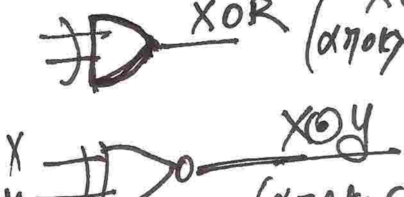

| x | y | F |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

(ΟΥΤΕ)
Nor

Nor

XOR $x \oplus y$ (αποκλειστικό ή)

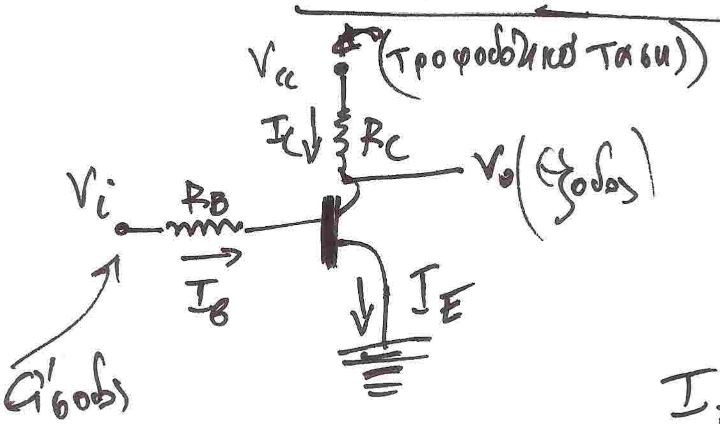
00 → 0
01 → 1
10 → 1
11 → 0

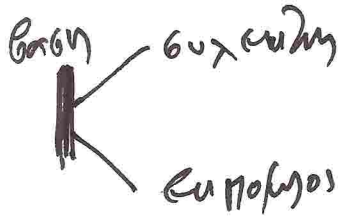



$x \odot y$
(αποκλειστικό ούτε)
ισοδυναμία

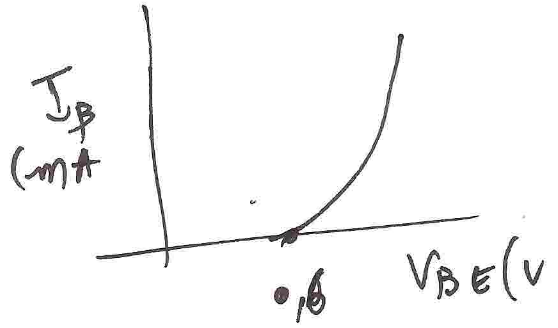
00 → 1
11 → 1
01 → 0
10 → 0

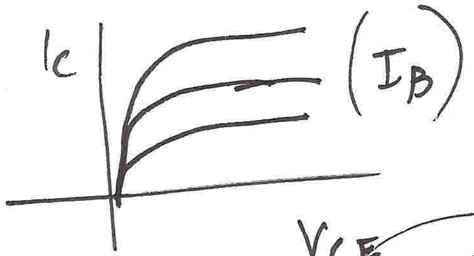
# Transistors – λογικά κυκλώματα

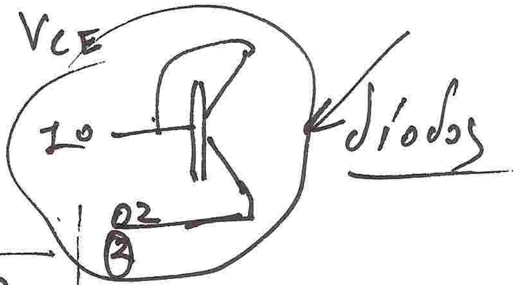



$$I_E = I_C + I_B$$



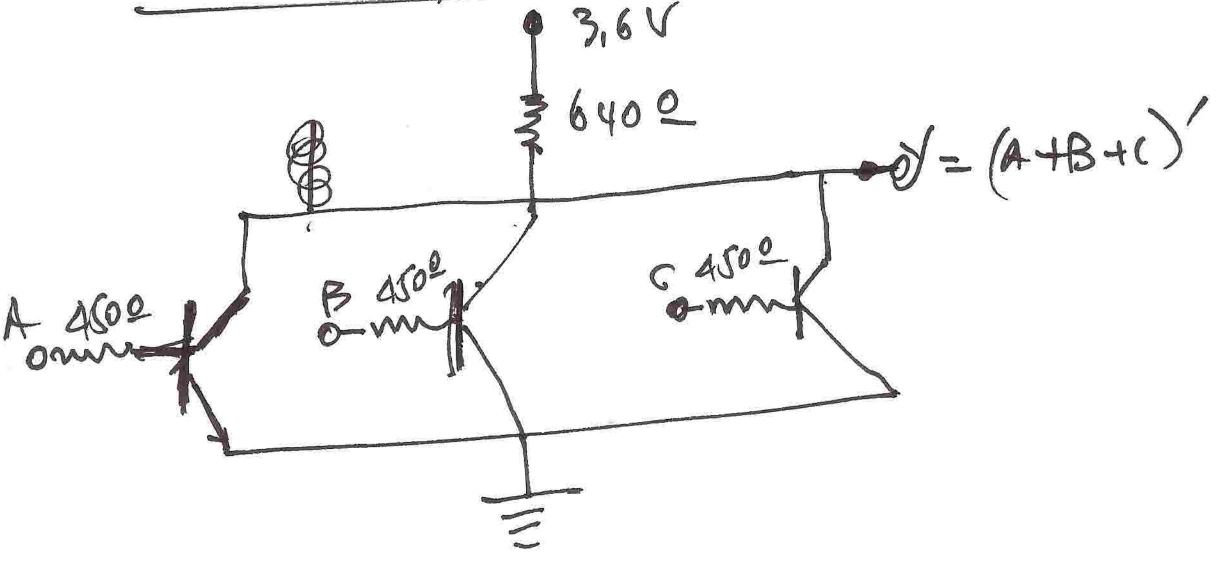



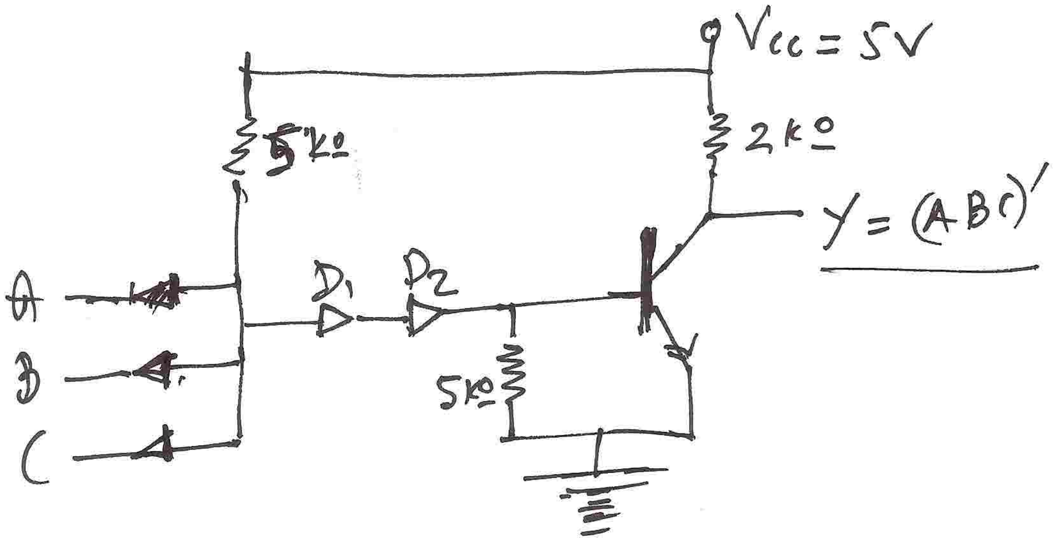

| Περιοχή | $V_{BE}$ (V) | $V_{CE}$(V) | Ρεύμα |
|---|---|---|---|
| αποκοπή | <0,6V | ανοικτό | $I_B = I_C = 0$ |
| ενεργή | 0,6–0,7V | >0.8 | $I_C = h_{FE} I_B$ |
| κορεσμός | 0,7–0,8V | 0.2 | |

($h \simeq 50$)

## Βασική πύλη ΟΥΤΕ   $Y = (A+B+C)'$



Βασική πύλη όχι-και ($y=(ABC)'$)




Συνδυαστικά κυκλώματα MSI, LSI (αθροιστές, πολυπλέκτες, αποκωδικοποιητές)

Σύγχρονα κυκλώματα ακολουθιακά (flip-flops, καταχωρητές, μνήμη)

(Ασύγχρονα ακολουθιακά κυκλώματα)

(καταχώρηση - επεξεργασία)

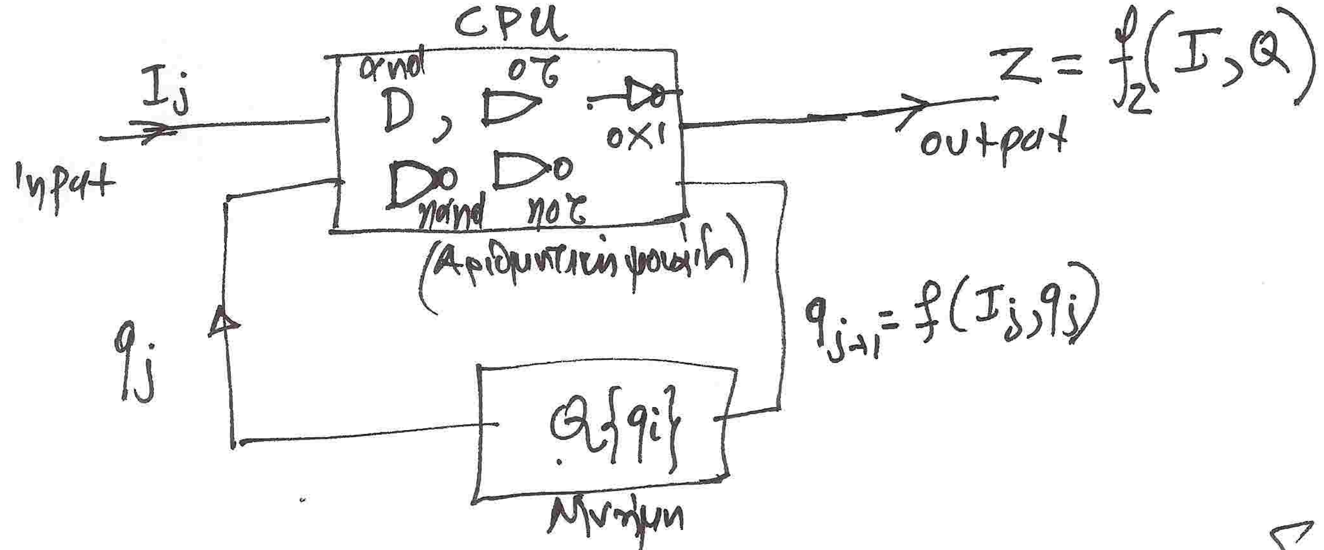
(Δεδομένα - Αλγόριθμος) ⟹ (CPU) ⟹ Αποτέλεσμα.

Gödel

(Αυτόματα - Μηχανές Turing) ⟶ (CPU)

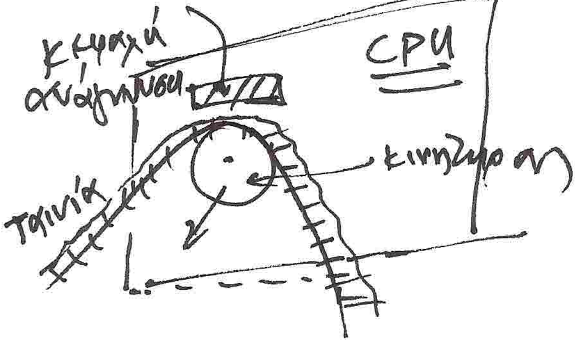
Θεωρητικά μαθηματικά ⟹ { Υπολογιστής, Αυτόματος έλεγχος, Τεχνητή Νοημοσύνη

# Ακολουθιακό αυτόματο




ακολουθιακό αυτόματο : $M \equiv \langle I, Q, Z, \delta, w \rangle$

- $Q$ = σύνολο εσωτερικών καταστάσεων $\{q_1, q_2, \dots q_N\}$
- $I$ = αλφάβητο εισόδου
- $Z$ = αλφάβητο εξόδου
- $\delta = I \times Q \Longrightarrow Q$ (συνάρτηση αλλαγής εσ. καταστάσεων)
- $w = I \times Q \Longrightarrow Z$ (συνάρτησης εξόδου




## Μηχανή Turing

- $(b, q, \tau, \ell, h)$
- Γράψε νέο σύμβολο
- Κίνησε δεξιά - αριστερά
- Σταμάτησε.

Ταινία απείρου μήκους (Μνήμη)

$$T_m = \langle I, Q, Z, \delta, w, q_0 \rangle$$

$T_m = \langle I, Q, Z, \delta, \omega, q_0 \rangle$ , $(b, a, \tau, \ell, h)$

$T_m = (\underline{A \vee b \vee \tau \vee \ell \vee h})$

$I = A \vee b$ σύμβολα εισόδου και κενό $\underline{b = \text{blank}}$

$A$ = αλφάβητο

$Q$ = εσωτερικές καταστάσεις

$Z = A \vee b \vee \tau \vee \ell \vee h$ (έξοδος)

$\delta = I \times Q \to Q$ , $\omega = I \times Q \to Z$

$q_0$ = αρχική κατάσταση

Παραδείγματα

| Q \ I (κατάσταση) | b (είσοδος) | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | $q_2/\tau$ | $q_1/b$ | $q_2/\tau$ |
| $q_2$ | $q_1/\tau$ | $q_1/\tau$ | $q_2/h$ |

$[q, a]$ = παρούσα κατάσταση

$Q = \{q_1, q_2\}$

$A = \{a_1, a_2\}$

$Z = \{b, a_1, a_2, h, \tau, \ell\}$

$q_1$ = αρχική κατάσταση

$q/s$ = επόμενη κατάσταση / έξοδος

$(b a_1 a_1 b)$ είσοδος

$[q_1, b] a_1 a_1 a_2 b \to b [q_2, a_1] a_1 a_2 b \Rightarrow$

$\Rightarrow b a_1 [q_1, a_1] a_2 b \to b a_1 [q_1, b] a_2 b$ Ταινία: $\underline{b a_1 a_1 a_2 b}$

$\Rightarrow b a_1 b [q_2, a_2] b \Rightarrow$ Halt $(\underline{b a_1 b a_2 b})$ έξοδος

$\underline{\text{εισοδος}}$ $(\cancel{b a_1 a_2 a_2 b})$ $a_1$

$[q_1, b] a_1 a_2 a_1 a_2 b \ldots$ $(\underline{\text{δεν σταματά}})$

ακέραιος $n \Rightarrow b\underbrace{11\cdots1}_{n+1}b$ $A=\{1\}$

(λέξεις) $5 = b111111b$, $2 = b111b$, $4 = b11111b$, $1 = b11b$

Μηχανή T. για την πρόσθεση

$4+2=6 \Rightarrow b1111b111b \Rightarrow b1111111b$

$[q_1,b]1111b111b \Rightarrow \cdots$

αλγόριθμος πρόσθεσης

| Q \ I | b | 1 |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_1/r$ | $q_2/r$ |
| $q_2$ | $q_3/l$ | $q_2/r$ |
| $q_3$ | $q_4/l$ | $q_3/r$ |
| $q_4$ | — | $q_5/b$ |
| $q_5$ | $q_5/l$ | $q_6/b$ |
| $q_6$ | $q_6/h$ | $q_6/h$ |

Συναρτήσεις - Λέξεις

$(f \Rightarrow T_m)$ $x \xrightarrow{f} y$ $y = \{y / f(x) = y,\ x \subset D\}$

$W = \{$ άπειρο πλήθος λέξεων που ικανοποιεί η $f\}$

$D \subset W$, $D$ = πεδίο ορισμού

$y = f(x_1, x_2 \cdots x_r)$

λέξη $= \{$σύνολο συμβόλων από ωρισμένο αλφάβητο $+b)$
$b\,a_1 a_2 a_3 \cdots b\, a_5 \cdots b \cdots$ $= w =$ λέξις (word)

$W = \{w / A, b\}$

Κάθε υπολογίσιμη συνάρτηση $(f)$ με $T_m$ αντιστοιχεί σε ακολουθία εκφράσεων της ταινίας

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \to \cdots a_k$$

όπου $a_1 = (x)$ η αρχική έκφραση της ταινίας και $a_k$ η τελική έκφραση $a_k$ είναι η $y = f(x)$

$x = \{\text{δεδομένα}\}$ $\quad f = T_m : x \xrightarrow{\{a_i\}} y$

$y = \{\text{αποτέλεσμα}\}$

Κάθε συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots x_8)$ αντιστοιχεί σε ένα λογικό κατηγορούμενο $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$

Τα $\{x_i\}$ είναι λογικές μεταβλητές (προτάσεις που εφαρμόζουν από μεταβλητές) ή προτάσεις που δεν προσδιορίζονται ~~ως~~ ως προς το αληθές - ψευδές

$P(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{cases} \text{αληθές} \\ \text{ψευδές} \end{cases} \Rightarrow f_P(x_1, x_2, \cdots x_n) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

(κατηγορούμενο)

Gödel $\Longrightarrow$ Δεν γνωρίζουμε εξ αρχής εάν $f_P = (0, 1)$ ή $T_m(P)$ δεν ξέρουμε αν σταματά ή όχι