
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ: ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Κεφάλαιο 1. Μιγαδικές Συναρτήσεις.

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy, \quad |e^z| = e^x.$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

$$\log z = \log r + i\theta, \quad r = |z|, \quad \theta = \text{Arg} z \text{ το όρισμα } z = x + iy$$
$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Θεώρημα. (του Laurent)

Εστω c_1, c_2 ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο z_0 και ακτίνες r_1, r_2 αντιστοίχως. (μπορεί $r_1 = 0$, είτε $r_2 = +\infty$) Υποθέτουμε ότι η $f(z)$ είναι μονότιμη και αναλυτική στον δακτύλιο

$$R = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2 \}.$$

Τότε η $f(z)$ μπορεί να γραφτεί κατά ένα μόνο τρόπο ως

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$
$$= \dots + a_{-2} (z - z_0)^{-2} + a_{-1} (z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1 (z - z_0)^1 + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z},$$

όπου c οποιαδήποτε καμπύλη μεταξύ των c_1 και c_2 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0 \implies z_0 \text{ πόλος τάξεως } k.$$

$$\int_c f(z) dz = 2\pi i (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots)$$

όπου $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad \text{εάν το } z_0 \text{ είναι απλός πόλος (τάξεως 1)}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \right)$$

εάν το z_0 είναι πόλος τάξεως k .

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων.

$$1. \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt, \quad F \text{ συνεχής ως προς } t$$

$$\text{Με } z = e^{it} = \cos t + i \sin t \implies \bar{z} = z^{-1} = \cos t - i \sin t \implies$$

$$\cos t = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin t = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad dt = \frac{1}{iz} dz, \quad \text{Άρα}$$

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt = \oint_c F\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz,$$

Όπου c ο κύκλος $c: z(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$.

Υποθέτουμε:

- A. η $\frac{h(x)}{g(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, και τα πολυώνυμα h, g έχουν πραγματικούς συντελεστές
- B. το $g(x)$ έχει στο άνω ημιεπίπεδο του \mathbb{C} τις μη πραγματικές ρίζες z_1, z_2, \dots, z_n .

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} dx$ όπου

(1). βαθμός $h(x) \leq$ βαθμός $g(x) - 2$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)}, z_k \right).$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx$, $a > 0$.

(1). βαθμός $h(x) \leq$ βαθμός $g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες,

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, z_k \right).$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx$, $a > 0$.

(1). βαθμός $h(x) \leq$ βαθμός $g(x) - 1$,

(2). το $g(x)$ έχει απλές πραγματικές ρίζες, x_1, x_2, \dots, x_m

Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} e^{iax} dx = \pi i \sum_{k=1}^m \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, x_k \right) + 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{h(x)}{g(x)} e^{iax}, z_k \right)$$

Κεφάλαιο 2. Σειρές Fourier και Μετασχηματισμοί Fourier.

Σειρές Fourier.

Σειρά (ή ανάπτυγμα) Fourier της f ως προς B

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

"Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier της f ".

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

f Αρτία $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} .$$

f Περιττή $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} .$$

"Αντίστροφος Πεπερασμένος Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$f_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

"Πεπερασμένος (Μιγαδικός) Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-in\pi x/L} dx$$

Μετασχηματισμος Fourier.

"Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier της F(ω)

$$f(x) = F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega ,$$

(Μιγαδικός) Μετασχηματισμός Fourier της f".

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt .$$

Ολοκληρωτική Παράσταση (ή Ολοκληρωτικό Ανάπτυγμα ή Ολοκλήρωμα) Fourier της f .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Με Αναδιανομή Συντελεστών έχουμε:

f Αρτία Συνημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f .

$$B(\omega) = 0 \quad A(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

f Περιτή Ημιτονικός Μετασχηματισμός Fourier της f .

$$A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

Συνέλιξη των συναρτήσεων f, g :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x - u) du .$$

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = F(\omega)G(\omega)$$

$$f * g(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(F(\omega)G(\omega) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} F(\omega)G(\omega) d\omega .$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = i\omega \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = i\omega \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = -\omega^2 \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(v)$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n\mathcal{L}[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Ο παραπάνω πίνακας συμπληρωθεί με τις μετασχηματιστικές Laplace όμοιων συναρτήσεων, που επιθυμούνται ακόμα ότι πρέπει.

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1. 1	$1/s$
2. $t^n, n=1,2,\dots$	$n!/s^{n+1}$
3. e^{at}	$1/(s-a)$
4. $t^n e^{at}, n=1,2,\dots$	$n!/(s-a)^{n+1}$
5. $\sin at$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
6. $\cos at$	$s/(s^2+\omega^2)$
7. $e^{at} \sin at$	$\omega/[(s-a)^2+\omega^2]$
8. $e^{at} \cos at$	$(s-a)/[(s-a)^2+\omega^2]$
9. $t \sin at$	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
10. $t \cos at$	$(s^2-\omega^2)/(s^2+\omega^2)^2$
11. $\sinh bt$	$b/(s^2-b^2)$
12. $\cosh bt$	$s/(s^2-b^2)$
13. $e^{at} \sinh bt$	$b/[(s-a)^2-b^2]$
14. $e^{at} \cosh bt$	$(s-a)/[(s-a)^2-b^2]$
15. $t \sinh at$	$2\omega s/(s^2-\omega^2)^2$
16. $t \cosh at$	$(s^2+\omega^2)/(s^2-\omega^2)^2$