ακριβώς τιμή $z \in R_z$ τότε η απεικόνιση $R_z \to R_w$ είναι αμφιμονότιμη. Συνεπώς, θα υπάρχει επίσης μια αμφιμονότιμη αντιστοιχία μεταξύ των καμπύλων του R_z,

$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t) \quad (\text{ή}\ \ z = z(t))\,,$$

και των εικόνων των στο R_w,

$$u = u(t),\quad v = v(t) \quad (\text{ή}\ \ w = w(t))\,.$$

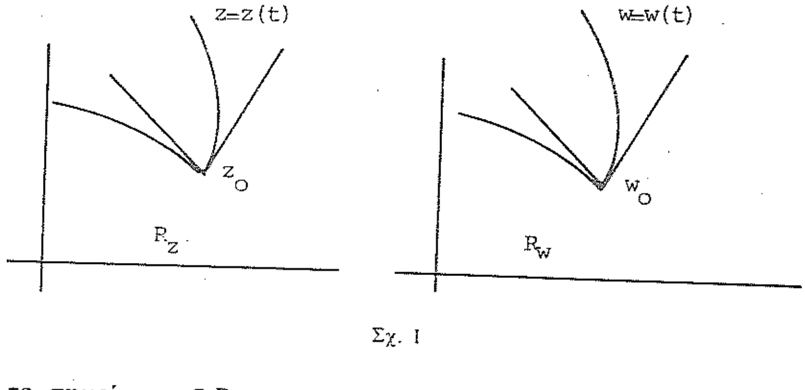
Αν κάθε ζευγάρι καμπύλων στο R_z που τέμονται κατά γωνία θ αντιστοιχεί σε ένα ζευγάρι καμπύλων του R_w που τέμονται κατά την αυτή γωνία θ, η απεικόνιση w καλείται **ισογώνια** στον R_z. Αν, επιπλέον, η φορά των γωνιών διατηρείται, η απεικόνιση w καλείται **σύμμορφη** στον R_z.

Θα αποδείξουμε το παρακάτω βασικό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω ότι η συνάρτηση $w=f(z)$ είναι αναλυτική στον τόπο R_z και αμφιμονότιμη από τον R_z στον τόπο R_w. Τότε, αν $f'(z) \neq 0$ στον R_z, η w είναι σύμμορφη στον R_z.

Απόδειξη. Έστω ότι η διαφορίσιμη καμπύλη $z=z(t)$ που διέρχεται



Σχ. 1

από το σημείο $z_0 \in R_z$, απεικονίζεται στην καμπύλη $w=w(t)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $w_0 \in R_w$. Τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπύλων αυτών έχουν συντεταγμένες

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right),\qquad \left(\frac{du}{dt},\ \frac{dv}{dt}\right).$$

Σε μιγαδική μορφή τα παραπάνω διανύσματα γράφονται ως

Ισχύει,
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} + i\,\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} + i\,\frac{dv}{dt}.$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{dt},$$

συνεπώς, αν στο σημείο z_0 εκφράσουμε τις $\frac{dw}{dz}$ και $\frac{dz}{dt}$ σε πολική μορφή,

$$\frac{dw}{dz} = \alpha e^{i\theta} \quad (\alpha \neq 0), \qquad \frac{dz}{dt} = re^{i\varphi},$$

έχουμε στο αντίστοιχο σημείο w_0·

$$\frac{dw}{dt} = are^{i(\varphi+\theta)}.$$

Συνεπώς, η απεικόνιση πολλαπλασιάζει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο z_0 επί $a = |f'(z)|$ και περιστρέφει αυτά κατά την αυτή γωνία θ. Έτσι η γωνία μεταξύ δύο εφαπτόμενων διανυσμάτων στο z_0 (Σχ. 1) διατηρείται κατά μέγεθος και φορά και ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $|f'(z)|$ είναι ανεξάρτητος των διευθύνσεων αυτών.

Ένα απειροστό καμπυλόγραμμο τρίγωνο με κορυφή το z_0 απεικονίζεται σ' ένα όμοιο τρίγωνο με κορυφή το w_0, διότι οι γωνίες τών τριγώνων θα είναι ίσες και οι πλευρές τους ανάλογες. Αλλά, ενώ, η απεικόνιση είναι τοπικώς σύμμορφη, οι αντίστοιχοι τόποι δεν είναι αναγκαστικώς όμοιοι «εν εκτάσει», εφόσον ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας ποικίλλει από σημείο σε σημείο.

Χωρίς απόδειξη αναφέρουμε το παρακάτω επίσης βασικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν η απεικόνιση $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ **είναι σύμμορφη σ' έναν τόπο** R, **η συνάρτηση** $f(z)=u+iv$ **είναι αναλυτική στον** R.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (Στροφή - Ομοθεσία)

Αν $\alpha e^{i\theta} \neq 0$ είναι μιγαδική σταθερή σε πολική μορφή, τότε η

$$w = ae^{i\theta} z, \quad (a,\ \theta \text{ πραγματικοί})$$

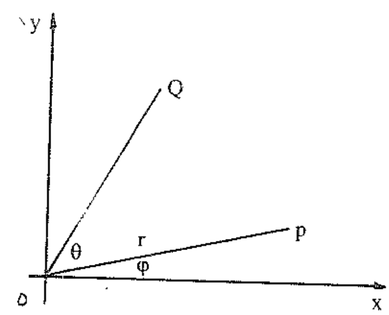
απεικονίζει ολόκληρο το z-επίπεδο συμμόρφως πάνω στο w-επίπεδο, εφόσον $\frac{dw}{dz} \neq 0$. Αν

$$z = re^{i\varphi}, \quad w = Re^{i\Phi},$$

η w είναι ισοδύναμη των

$$R = ar\,, \quad \Phi = \theta+\varphi\,.$$

Έτσι, αν το w-επίπεδο τεθεί πάνω στο z-επίπεδο, ώστε οι άξονες να συμπίπτουν, οποιοδήποτε σημείο $P \neq 0$ απεικονίζεται σ' ένα σημείο Q, όπως στο παρακάτω Σχ. 2.



Σχ. 2

Όταν $a=1$, έχουμε απλή στροφή $w=e^{i\theta}z$, όταν $\theta=0$ έχουμε απλή ομοθεσία $w=az$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (Παράλληλη μεταφορά).

Η συνάρτηση $w = z+be^{i\beta}$ απεικονίζει το z-επίπεδο συμμόρφως πάνω στο w-επίπεδο και αντιστοιχεί σε κάθε σημείο z την αυτή διανυσματική μετατόπιση $be^{i\beta}$. Άρα από το Παράδειγμα 1,

$$w = ae^{i\theta}z+be^{i\beta}\,,$$

είναι μια σύμμορφη απεικόνιση που παράγεται με μια στροφή θ, μια ομοθεσία a, και μια παράλληλη μεταφορά $be^{i\beta}$. Συνεπώς, αν α και b είναι μιγαδικοί αριθμοί, η

$$w = \alpha z+b\,,$$

είναι μια στροφή - ομοθεσία και μια παράλληλη μεταφορά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (Αντιστροφή)

Η συνάρτηση $w = \dfrac{1}{z}$, απεικονίζει το z-επίπεδο συμμόρφως πάνω στο w-επίπεδο εκτός από μια περιοχή του σημείου $z=0$, όπου η dw/dz δεν υπάρχει. Θέτοντας

$$z = re^{i\varphi}\,, \quad w = Re^{i\Phi}\,,$$

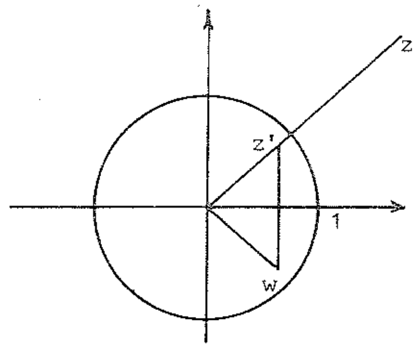
έχουμε

$$Re^{i\Phi} = e^{-i\varphi}/r\,.$$

Άρα,

$$R = 1/r, \quad \Phi = -\varphi\,.$$

Έτσι το σημείο $z \neq 0$ απεικονίζεται στο σημείο $w=e^{-i\varphi}/r$, όπως στο Σχ. 3, όπου $z'=e^{i\varphi}/r$.



Σχ. 3

Η απεικόνιση $w=1/z$ είναι συνδυασμός ενός κατοπτρισμού πάνω στον κύκλο $|z|=1$ και στη συνέχεια κατοπτρισμός πάνω στον πραγματικό άξονα Οx. Επειδή ο κατοπτρισμός είναι ισογώνιος μετασχηματισμός, ο οποίος αντιστρέφει τη φορά των γωνιών το αποτέλεσμά τους θα είναι σύμμορφη απεικόνιση.

Η εξίσωση οποιουδήποτε κύκλου στο z-επίπεδο (παραγ. 3) μπορεί να γραφεί

$$z\bar{z}-\bar{c}\bar{z}-c\bar{z}+k = 0 \quad (k \text{ πραγματικός})\,.$$

Αν $k=0$, ο κύκλος αυτός διέρχεται από την αρχή. Ο μετασχηματισμός $w=1/z$ απεικονίζει τον κύκλο σε έναν άλλο κύκλο

$$1-\bar{c}\bar{w}-cw+kw\bar{w} = 0 \quad \text{αν } k \neq 0$$

ή σε ευθεία γραμμή, αν $k=0$. Επομένως η $w=1/z$ απεικονίζει κύκλους σε κύκλους, εκτός από εκείνους οι οποίοι διέρχονται από την αρχή και οι οποίοι απεικονίζονται σε ευθείες γραμμές. Ο μοναδιαίος κύκλος, $|z|=1$, απεικονίζεται στον εαυτό του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (Ρητός γραμμικός μετασχηματισμός)

Έστω

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad (a, b, c, d \text{ μιγαδικοί}).$$

Η w είναι σύμμορφη εκτός από μια περιοχή του σημείου $z=-d/c$, επειδή

$$\frac{dw}{dz} = \frac{D}{(cz+d)^2} \neq 0, \quad \forall z \neq -\frac{d}{c}.$$

Αν, $c \neq 0$,

$$w = \frac{a}{c} - \frac{D/c^2}{z+d/c}$$

και άρα η w είναι συνδυασμός των

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad z_3 = -\frac{D}{c^2} z_2, \quad w = \frac{a}{c} + z_3,$$

δηλαδή μιας παράλληλης μεταφοράς, μιας αντιστροφής, μιας στροφής-ομοθεσίας και πάλι μιας παράλληλης μεταφοράς.

Παρατηρήσεις:

α) Σημειωτέον, οι αναφερόμενες απεικονίσεις στα Παραδείγματα 1, 2, 3 και 4 καλούνται ομογραφικοί μετασχηματισμοί.

β) Ένα σημείο z_0 ενός ομογραφικού μετασχηματισμού w λέγεται σταθερό αν $w(z_0) = z_0$.

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ομογραφικών μετασχηματισμών με πράξη σύνθεσης το γινόμενο αυτών (σύνθεση αυτών) αποτελεί μη αβελιανή ομάδα, με μοναδιαίο στοιχείο τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και αντίστροφο στοιχείο του $w=f(z)$, το $f^{-1}(z)=\dfrac{dz-b}{-cz+a}$.

Από το Παράδειγμα 4 της παραγράφου 5 έπεται ότι οι ομογραφικοί μετασχηματισμοί $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, $cz+d \neq 0$, είναι σύμμορφες απεικονίσεις, που απεικονίζουν κύκλους του z-επιπέδου σε κύκλους του w-επιπέδου, όπου στους κύκλους περιλαμβάνονται και κύκλοι με άπειρη ακτίνα που είναι ευθείες γραμμές. Ισχύει, επίσης, το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Όταν δοθούν τρία διακεκριμένα σημεία z_1, z_2, z_2 **του z-επιπέδου, και τρία διακεκριμένα σημεία** w_1, w_2, w_3 **του w-επιπέδου υπάρχει μονάχα ένας ομογραφικός μετασχηματισμός, που απεικονίζει τα** z_1, z_2, z_3 **στα** w_1, w_2, w_3 αντιστοίχως.

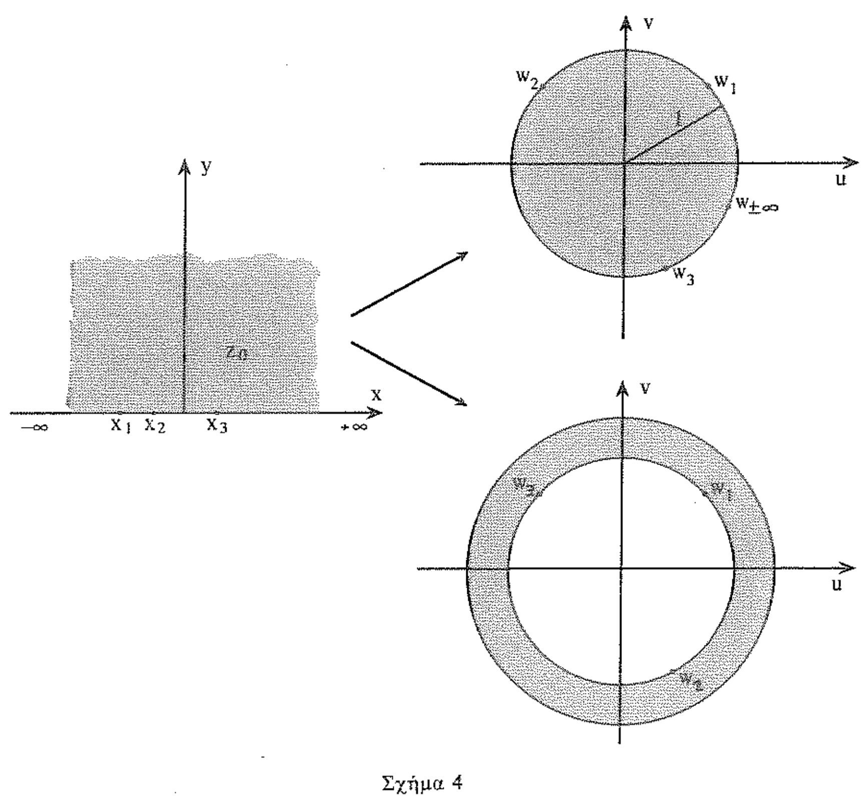
Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}\left(z+\frac{b}{c}\right):\left(z+\frac{d}{c}\right)$, οπότε χρειαζόμαστε μόνο τρεις σταθερές για να τον προσδιορίσουμε. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο ομογραφικός αυτός μετασχηματισμός είναι ο $w(z)$, όπου

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\,\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\,\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Ας σημειωθεί ότι στα z_i $i=1,2,3$, w_i $i=1,2,3$ μπορεί να περιλαμβάνονται και το 0 και ∞.

Δύο αξιοσημείωτοι ομογραφικοί μετασχηματισμοί είναι:

Α. Ο ομογραφικός μετασχηματισμός $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $\theta_0=$σταθ., $z_0=$ $=$σταθ., σημείο του άνω ημιεπιπέδου, **που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και αντιστρόφως** (Σχ. 4). Κάθε σημείο του



Σχήμα 4

άξονα των x απεικονίζεται πάνω στον κύκλο. Τρία σημεία $z_1=x_1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_3$, $x_1<x_2<x_3$, απεικονίζονται κάτα τη θετική κυκλική φορά πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Αν συμβεί το αντίθετο, τότε το άνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο εξωτερικό μέρος του μοναδιαίου κύκλου, αλλά τότε το z_0 κείται στο κάτω ημιεπίπεδο. Η σταθερή θ_0 μπορεί να οριστεί έτσι ώστε να απεικονίζεται ένα συγκεκριμένο σημείο του άξονα των x σ' ένα δοσμένο σημείο του κύκλου. Τα σημεία $\pm\infty$ του άξονα x απεικονίζονται στο αυτό σημείο $w_{\pm\infty}$ του κύκλου.

Β. Ο ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το άνω ημιεπίπεδο στο άνω ημιεπίπεδο. Προς τούτο, αρκεί να ορίσουμε εκείνο τον ομογραφικό μετασχηματισμό, που απεικονίζει τρία κατά τάξη μεγέθους σημεία $x_1<x_2<x_3$ του άξονα των x του z-επιπέδου, σε τρία κατά τάξη μεγέθους σημεία $w_1<w_2<w_3$ του άξονα u του w-επιπέδου, αντιστοίχως. Αν συμβεί το αντίθετο, τότε το επάνω ημιεπίπεδο απεικονίζεται στο κάτω ημιεπίπεδο. Υπάρχει ένα θεώρημα που δίνει έναν τύπο (τύπος των Schwarz-Christoffel) βάσει του οποίου βρίσκουμε μια σύμμορφη απεικόνιση, που απεικονίζει οποιοδήποτε κλειστό ή ανοικτό πολύγωνο του w-επιπέδου στο άνω ημιεπίπεδο του z-επιπέδου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να βρεθεί ο ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία 1, 2, 3 του z-επιπέδου στα 0, ∞ και 1 του w-επιπέδου.

Λύση. Έστω $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ ο μετασχηματισμός που ζητάμε. Θα ισχύουν οι σχέσεις

$$0=\frac{a+b}{c+d}$$

$$\infty=\frac{2a+b}{2c+d}$$

$$1=\frac{3a+b}{3c+d}$$

οπότε, $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=-3$, δηλαδή

$$w=\frac{z-1}{2z-4}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Έστω ο ομογραφικός μετασχηματισμός
$$w = \frac{z-1}{z-2} .$$
Να βρεθεί η εικόνα (α) του κύκλου $|z+1|=1$, (b) του κύκλου $|z+1|=3$ και (c) της ευθείας $|z-1|=|z-2|$.

Λύση: Πρώτα βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του w,
$$z = \frac{2w-1}{w-1} .$$

(α) Η εικόνα του κύκλου $|z+1|=1$ είναι η
$$\left|\frac{2w-1}{w-1}+1\right| = 1 \quad \text{ή} \quad |3w-2| = |w-1| ,$$
δηλαδή ο κύκλος με κέντρο (5/8, 0) και ακτίνα 1/8.

(b) Ομοίως η εικόνα του κύκλου $|z+1|=3$, είναι η
$$\left|\frac{2w-1}{w-1}+1\right| = 3 \quad \text{ή} \quad |3w-2| = |3w-3| ,$$
που είναι η μεσοκάθετη που ενώνει το 2/3 με το 1, δηλαδή η ευθεία $u = \frac{5}{6}$.

(c) Και ομοίως η εικόνα της ευθείας $|z-1|=|z-2|$ είναι η
$$\left|\frac{2w-1}{w-1}-1\right| = \left|\frac{2w-1}{w-1}-2\right| \quad \text{ή} \quad |w| = 1 ,$$
δηλαδή ο μοναδιαίος κύκλος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

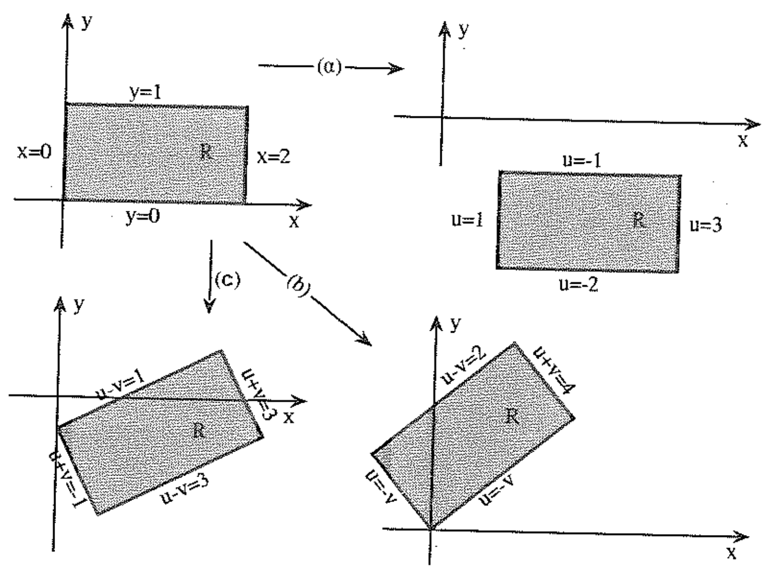
Έστω ο τόπος R που περικλείεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$. Να βρεθεί η εικόνα του R με τους μετασχηματισμούς,

(α) $w = z+(1-2i)$, (b) $w = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} z$, (c) $w = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} z+(1-2i)$.

Λύση. (α) Ο πρώτος μετασχηματισμός είναι παράλληλη μεταφορά κατά $1-2i$. Επειδή κατά τη μεταφορά οι ευθείες παραμένουν ευθείες, αρκεί να βρούμε τις εικόνες των σημείων (0, 0), (2, 0), (2, 1) και (0, 1).

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό, $z = w+(2i-1)$, θέτοντας $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2+i$, $z_4=i$, βρίσκουμε, $w_1=1-2i$, $w_2=3-2i$, $w_3=3-i$, $w_4=1-i$. (Σχ. 12).

Με τους μετασχηματισμούς (b) και (c), που είναι στροφή-ομοθεσία και στροφή-ομοθεσία, μεταφορά αντιστοίχως, εργαζόμαστε όμοια. (Σχ. 5).



Σχ. 5

Δίνουμε, παρακάτω, δύο εφαρμογές των ομογραφικών μετασχηματισμών στη σχεδίαση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

α) Στη θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων η εμπέδηση ή σύνθετη αντίσταση Z, που προέρχεται από ωμική αντίσταση R και αυτεπαγωγή L σε παράλληλη διάταξη, δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}=\frac{1}{R}-\frac{j}{\omega L} \qquad (1)$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα και $j^2=-1$. Από τη σχέση αυτή έχουμε $w=\frac{1}{Z}=u+jv=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}$. Ας θεωρήσουμε ότι μεταβάλλεται μόνο η L, από 0 έως ∞. Τότε η σύνθετη αγωγιμότητα w στο w-επίπεδο παριστάνεται από την ημιευθεία (ε) $u=\frac{1}{R}$ (παρακάτω σχήμα (α)). Ζητούμε να δούμε ποιά είναι η εικόνα αυτής μέσω της αντιστροφής $Z=\frac{1}{w}$, δηλαδή ποιά είναι η εμπέδηση Z. Τέτοιες γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιούνται συχνά στη σχεδίαση ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Από τη σχέση (1) έχουμε

$$Z = x + jy = \frac{R\omega L}{\omega L - jR} = \frac{R\omega^2 L^2}{R^2+\omega^2 L^2} + j\,\frac{R^2\omega L}{R^2+\omega^2L^2}$$

ή

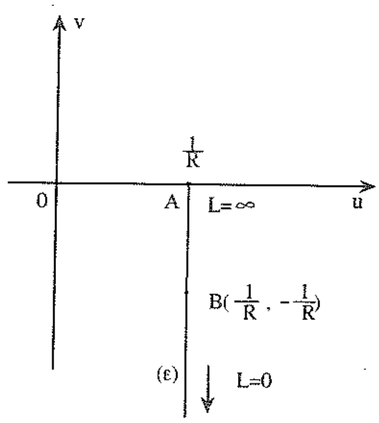
$$x = \frac{R\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2} \quad (2)\,, \qquad y = \frac{R^2\omega L}{R^2+\omega^2L^2} \quad (3)\,.$$

Θεωρούμε ολόκληρη την ευθεία $u = \frac{1}{R}$ πάνω στην οποία κείται η ημιευθεία (ε). Έχουμε

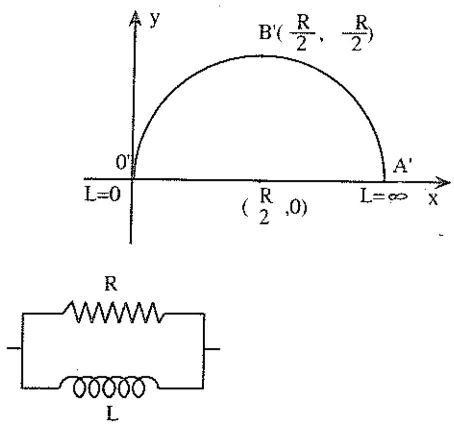
$$2u = w + \overline{w} = \frac{2}{R} \quad ή \quad \frac{1}{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{2}{R} \quad ή \quad 2Z\overline{Z} = R(Z+\overline{Z})$$

$$ή \quad |Z|^2 = x^2+y^2 = Rx \quad ή \quad \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\,.$$

Δηλαδή ο κύκλος αυτός έχει εικόνα ολόκληρη την ευθεία $u=\frac{1}{R}$. Για να βρούμε την εικόνα της ημιευθείας (ε) χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (2) και (3). Για $L=\infty$, $\lim x = R$ και $\lim y = 0$. Δηλαδή, το σημείο A αντιστοιχεί στο A΄. Για $L=0$, έχουμε $x=y=0$ και το επάπειρο σημείο της (ε) αντιστοιχεί στο 0΄.



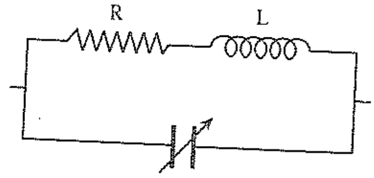
(a)



(b)

Για $L=\frac{R}{\omega}$, $x=\frac{R}{2}$ και $y=\frac{R}{2}$, δηλαδή στο σημείο B αντιστοιχεί το σημείο B΄. Επομένως η ημιευθεία (ε) αντιστοιχεί στο ημικύκλιο $\left(\frac{R}{2},\ 0\right)$ (παραπάνω σχήματα (a), (b)).

β) Ας θεωρήσουμε τώρα ένα RLC ηλεκτρικό κύκλωμα του παρακάτω



(a)

σχήματος (a), όπου θεωρούμε ότι η χωρητικότητα C μεταβάλλεται, ενώ η ωμική αντίσταση R και η αυτεπαγωγή L είναι σταθερές. Έστω πηγή εναλλασσόμενης τάσης σταθερής συχνότητας ω/2π. Η σύνθετη αντίσταση Z δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C \,. \qquad (4)$$

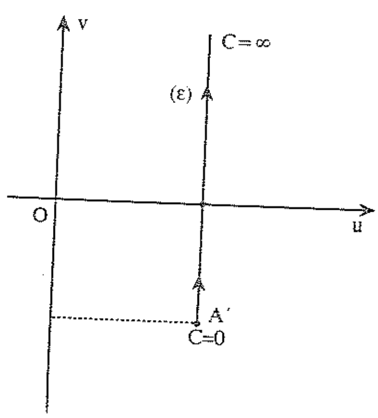
Από την (4)

$$w = u+jv = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right).$$

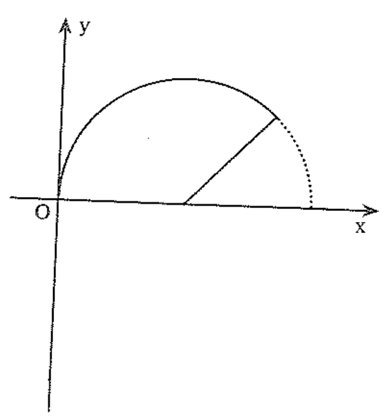
Άρα

$$u = \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} \quad (5) \qquad v = \frac{\omega C\,(R^2+\omega^2 L^2) - \omega L}{R^2+\omega^2 L^2} \,. \quad (6)$$

Όταν η χωρητικότητα C μεταβάλλεται από 0 έως ∞, έχουμε την ημιευθεία (ε) (παρακάτω σχήμα (b)), διότι για C=0 από την (6), έχουμε το σημείο A $\left(\frac{R}{R^2+\omega^2 L}, \frac{-\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right)$. Για να βρούμε την εικόνα της (ε)



(b)



(c)

βρίσκουμε πρώτα την εικόνα όλης της ευθείας $u = \dfrac{R}{R^2+\omega^2L^2}$.

Έχουμε από την (5),

$$2u = w+\overline{w} = \frac{2R}{R^2+\omega^2L^2} \quad ή \quad \frac{1}{Z}+\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{2R}{R^2+\omega^2L^2} \quad ή$$

$$2Z\,|Z|^2 = 2(R^2+\omega^2L^2)x \quad ή \quad x^2+y^2 = \frac{R^2+\omega^2L^2}{R}\,x \quad ή$$

$$\left(x-\frac{R^2+\omega^2L^2}{2R}\right)^2+y^2 = \left(\frac{R^2+\omega^2L^2}{R}\right)^2. \quad (7)$$

Αλλά από την (4), για $C=0$, έχουμε $Z = R+j\omega L$, δηλαδή το σημείο A αντιστοιχεί στο σημείο A΄ με συντεταγμένες $(x, y)=(R, \omega L)$. Για $C=\infty$, έχουμε $\dfrac{1}{Z} = \infty$ ή $Z=0$, δηλαδή το επάπειρο σημείο της (ε) αντιστοιχεί στο σημείο C΄ με συντεταγμένες (0, 0). Συνεπώς η ημιευθεία (ε) αντιστοιχεί στο τόξο O΄A΄ του κύκλου (A). (Παραπάνω Σχ. (c)).

6. Φυσικές εφαρμογές των σύμμορφων απεικονίσεων

Πολλά προβλήματα των μηχανικών, όταν εκφραστούν με μαθηματικό τρόπο, οδηγούν σε **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους**. Συγχρόνως, στα παραπάνω προβλήματα, δίνονται ορισμένες συνοριακές συνθήκες. Έτσι το πρόβλημα της εύρεσης λύσης μιας εξίσωσης με μερικές παραγώγους, που πληρεί και τις συνοριακές συνθήκες, λέγεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών**.

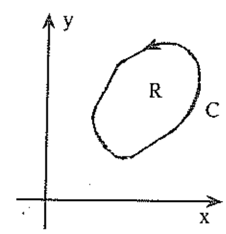
Έχει σημασία από μαθηματική άποψη, αλλά και από φυσική, ν' αποδείξουμε όχι μόνο την **ύπαρξη** τέτοιων λύσεων αλλά και τη **μοναδικότητα**.

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση που πληρεί την εξίσωση του Laplace

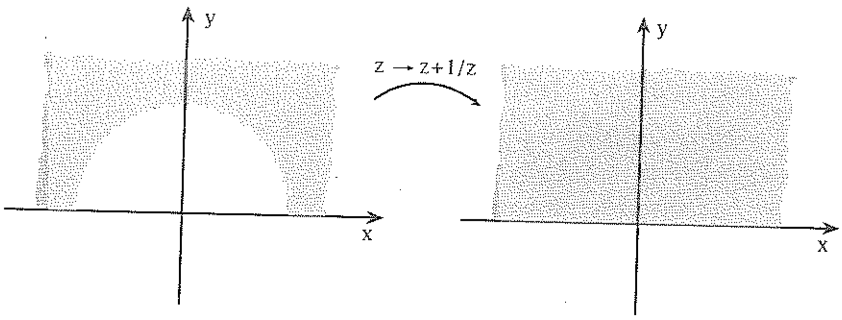
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

σε ένα τόπο R, καλείται **αρμονική**. Επίσης, αν η $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ είναι αναλυτική στον R, τότε οι συναρτήσεις u και υ είναι αρμονικές και λέγονται **συζυγείς αρμονικές**.

Έστω R είναι ένας απλός συναφής τόπος που περικλείνεται από μια κλειστή καμπύλη c (Σχ. 1). Θα εξετάσουμε δύο συνοριακά προβλήματα που είναι βασικά για την παρακάτω μελέτη.



Σχ. 1



Σχ. 7

Έτσι αφού $F_0(z)=\alpha z$ είναι το μιγαδικό δυναμικό που ζητάμε είναι

$$F(z) = \alpha\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Αν το εκφράσουμε δε σε πολικές συντεταγμένες,

$$\varphi(r,\theta) = \alpha\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi(r,\theta) = \alpha\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta \quad (\Sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 6b).$$

Ας σημειωθεί ότι τροποποιώντας λίγο το μετασχηματισμό $f\colon z \to z+\frac{1}{z}$, προσθέτοντας όρους ανώτερης τάξεως, το άνω ημικύκλιο μπορεί να αντικατασταθεί με κάτι που μοιάζει περισσότερο με φτερό αεροπλάνου. Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί σ' αυτή την περίπτωση λέγονται **μετασχηματισμοί του** Toukowski.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Η αμφιμονότιμη μιγαδική απεικόνιση $f\colon R_z \to R_w$ τέτοια ώστε η γωνία κάθε ζευγαριού καμπύλων στον R_z να απεικονίζονται με την f στον τόπο R_w σε ζευγάρι καμπύλων που σχηματίζουν την αυτή γωνία κατά μέγεθος και φορά, λέγεται **σύμμορφη απεικόνιση**.

Ισχύει «Αν η $f(z)$ είναι αναλυτική και $f'(z)\neq 0 \Leftrightarrow f$ σύμμορφη απεικόνιση».

2. Χαρακτηριστικές σύμμορφες απεικονίσεις είναι:

(i) Στροφή-Ομοθεσία: $w = \alpha e^{i\theta} z$

(ii) Παράλληλη μεταφορά: $w = z+be^{i\beta}$

(iii) Αντιστροφή: $w = \dfrac{1}{z}$

(iv) Ρητός μετασχηματισμός: $w = \dfrac{\alpha z+b}{cz+d}$, $\begin{vmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

3. Ισχύει «Υπάρχει μονάχα ένας ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τρία διακεκριμένα σημεία σε τρία άλλα σημεία».

4. Έστω Z η εμπέδηση σε RL ηλεκτρικό κύκλωμα σε παράλληλη διατάξη. Τότε

$$w = u+jv = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{1}{\omega L}\, j\,, \tag{1}$$

δηλαδή η Z είναι μιγαδικός αριθμός. Αποδεικνύεται ότι η εικόνα της ημιευθείας $u = \dfrac{1}{R}$ μέσω της αντιστροφής (1) είναι το πάνω ημικύκλιο

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}\,.$$

Ανάλογη θεωρία υπάρχει και για ένα RLC ηλεκτρικό κύκλωμα.

5. Η λύση επίσης ορισμένων συνοριακών προβλημάτων, διάδοσης θερμότητας, Ηλεκτροστατικής και Υδροδυναμικής επιτυγχάνεται με τη θεωρία των σύμμορφων απεικονίσεων.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα σημεία $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$ στα σημεία $w_1=1$, $w_2=i$, $w_3=-1$.
(Απάν. $w = (3z+2i):(iz+6)$)

2. Να βρεθεί ο ομογραφικός μετασχηματισμός, που απεικονίζει τα σημεία $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=-1$, στα σημεία $w_1=i$, $w_2=1$, $w_3=0$.
(Απάν. $w = -i(z+1):(z-1)$)

3. Να βρεθεί ο ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το 0 στο $-i$ και αφήνει σταθερά τα σημεία -1 και 1.
(Απάντ. $w = (z-i):(-iz+1)$)

4. Να βρεθεί ο ομογραφικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τα 0, ∞, 2 στα 1, 3, ∞.
(Απάν. $w = (3z-2):(z-2)$)

5. Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y=1$ με τον μετασχηματισμό $w(z) = \dfrac{z-i}{-iz+1}$.
(Απάν. $u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$)

6. (α) Βρείτε τον ομογραφικό μετασχηματισμό που αφήνει σταθερά τα σημεία 1 και −1. (b) Ομοίως εκείνο που αφήνει σταθερά τα i και −i.
(Απάν. (α) $w = \frac{az+1}{z+a}$, (b) $w = \frac{az-1}{z+a}$)

7. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός, $w = \dfrac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$, $|z_0|<1$, απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο στο μοναδιαίο κύκλο.

8. Έστω ο ομογραφικός μετασχηματισμός $w(z) = a\dfrac{z-b}{z-d}$. Να δείξετε ότι (α) κύκλο που περνούν από τα σημεία $z=b$ και $z=d$ απεικονίζονται σε ευθείες που περνούν από την αρχή. (b) Οι Απολλώνιοι κύκλοι με εξισώσεις $\dfrac{z-b}{z-d} = \dfrac{r}{|a|}$ απεικονίζονται σε κύκλους με κέντρο την αρχή 0 και ακτίνα r.

9. Βρείτε την εικόνα της ευθείας $x=5$ με το μετασχηματισμό $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.
(Απάν. $\left(u-\frac{5}{6}\right)^2+v^2 = \frac{1}{36}$).

10. (α) Αποδείξτε ότι το πρώτο τέταρτο του z-επιπέδου απεικονίζεται στο άνω ημιεπίπεδο με την απεικόνιση $w=z^2$.
(b) Να βρείτε την εικόνα του τριγώνου που περικλείεται από τις ευθείες $x=1$, $y=1$ και $x+y=1$ με την προηγούμενη απεικόνιση.
(c) Αποδείξτε ότι με την απεικόνιση αυτή το τρίγωνο απεικονίζεται σε ένα καμπυλόγραμμο τρίγωνο με τις ίδιες γωνίες.

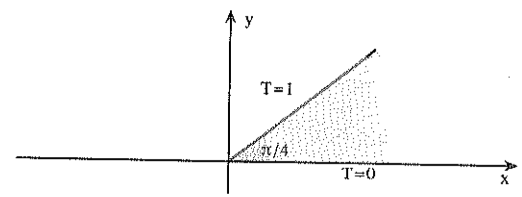
11. Αν $T_1(z) = \dfrac{a_1 z+b_1}{c_1 z+d_1}$, $T_2(z) = \dfrac{a_2 z+b_2}{c_2 z+d_2}$ και $\mu(T_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $\mu(T_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, τότε $\mu(T_1 \circ T_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, όπου $T_1 \circ T_2(z) = T_1(T_2(z))$, η σύνθεση των ομογραφικών μετασχηματισμών T_1 και T_2.

12. Αν $T_1(z) = \dfrac{2z+1}{2z-1}$ και $T_2(z) = \dfrac{z-1}{z+2}$, να βρεθούν τα σταθερά σημεία του $T_1 \circ T_2$.
(Απάν. $z_1=0$, $z_2=7$)

13. Δύο σημεία z και z′ λέγονται κατοπτρικά ως προς τον κύκλο $\{z: |z-a|=r\}$ αν τα σημεία a, z, z′ βρίσκονται στην αυτή ημιευθεία με αφετηρία το σημείο a και $z' = w(z) = a+\dfrac{r^2}{z-a}$. Να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $\{z: |z|=1\}$ με κατοπτρισμό ως προς τον κύκλο $\{z: |z-2|=1\}$.
(Απάν. $\left|w-\frac{4}{3}\right| = \frac{1}{3}$).

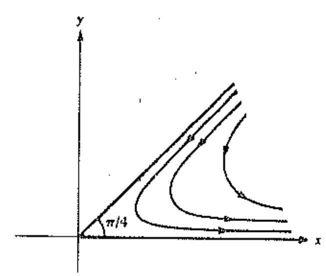
14. Ένας ομογραφικός μετασχηματισμός λέγεται ενελεικτικός αν $T(T(z))=z$. Να δειχθεί ότι ένας ομογραφικός μετασχηματισμός είναι ενελεικτικός τότε και μόνο αν $a^2=d^2$.

15. Να βρεθεί ο τύπος που ορίζει τη θερμοκρασία στον τόπο με τις συνοριακές συνθήκες που σημειώνονται πάνω στο παρακάτω σχήμα.



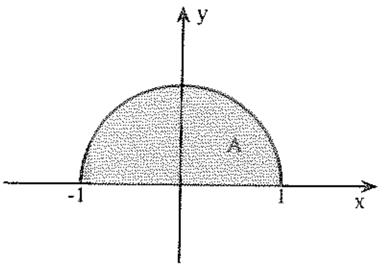
(Απάν. $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi} \tan^{-1} \dfrac{4x^3y-4xy^3}{x^4-6x^2y^2+y^4}$)

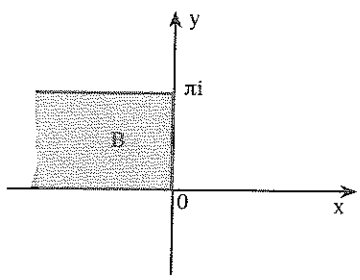
16. Να βρεθεί ο τύπος που ορίζει τη ροή ενός ρευστού στον τόπο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. (Η ταχύτητα στο άπειρο ισούται με a).



(Απάν.: $\varphi(r,\theta)=\alpha r^4 \cos 4\theta$, $\psi(r,\theta) = \alpha r^4 \sin 4\theta$ ή $\varphi(x,y)=(x^4-6x^2y^2+y^4)\alpha$,
$\psi(x,y)=4x^3y-4xy^3\alpha$)

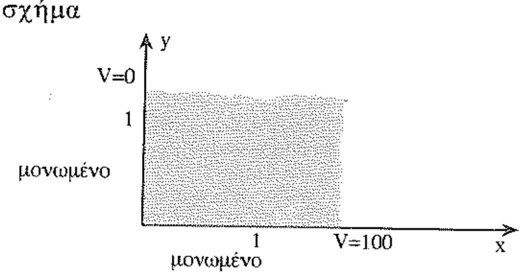
17. Έστω A είναι το άνω μοναδιαίο ημικύκλιο. Βρείτε τη θερμοκρασία μέσα σ' αυτό αν το κυκλικό τόξο είναι μονωμένο, $T=0$ για $x>0$ και $T=10$ για $x<10$ στον πραγματικό άξονα.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση του παρακάτω σχήματος)





(Απάν.: $T(x,y) = \frac{10}{\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}$)

18. Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στον τόπο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



(Απάν.: $V(x,y) = 50+ \frac{100}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{2} (\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}-\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}$

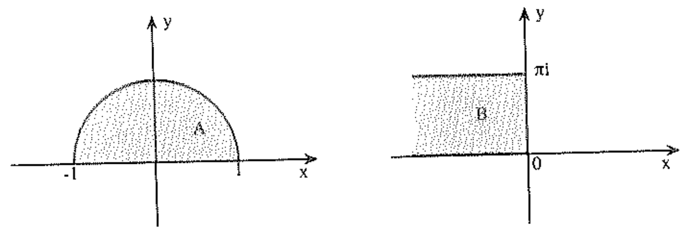
7. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο

Ο ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο είναι σχεδόν ο ίδιος με εκείνον του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πραγματικών συναρτήσεων.

Έστω c διαφορίσιμη καμπύλη στο z-επίπεδο ορισμένη από την συνάρτηση $z(a) = x(a)+iy(a)$ στο διάστημα $I=[b, d]$ (συνεπώς dx/da και dy/da είναι συνεχείς στο I). Έστω ότι η $f(z)$ είναι συνεχής πάνω

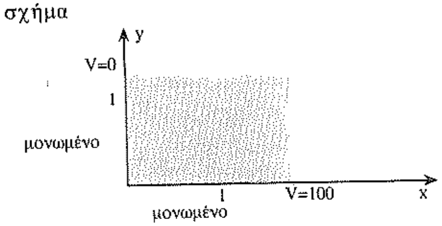
(Απάν.: $\varphi(r,\theta)=ar^4\cos4\theta$, $\psi(r,\theta)=ar^4\sin4\theta$ ή $\varphi(x,y)=(x^4-6x^2y^2+y^4)a$, $\psi(x,y)=4x^3y-4xy^3a$)

17. Έστω A είναι το άνω μοναδιαίο ημικύκλιο. Βρείτε τη θερμοκρασία μέσα σ' αυτό αν το κυκλικό τόξο είναι μονωμένο, T=0 για $x>0$ και T=10 για $x<10$ στον πραγματικό άξονα.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση του παρακάτω σχήματος)



(Απάν.: $T(x,y)=\frac{10}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$)

18. Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στον τόπο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



(Απάν.: $V(x,y)=50+\frac{100}{\pi}\sin^{-1}\frac{1}{2}\left(\sqrt{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}-\sqrt{(x^2-y^2-1)^2+4x^2y^2}\right)$

7. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο

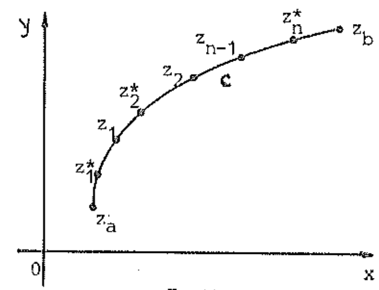
Ο ορισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο είναι σχεδόν ο ίδιος με εκείνον του επικαμπύλιου ολοκληρώματος πραγματικών συναρτήσεων.

Έστω c διαφορίσιμη καμπύλη στο z-επίπεδο ορισμένη από την συνάρτηση $z(a)=x(a)+iy(a)$ στο διάστημα $I=[b,d]$ (συνεπώς dx/da και dy/da είναι συνεχείς στο I). Έστω ότι η $f(z)$ είναι συνεχής πάνω

στη c. Διαιρούμε το I σε n υποδιαστήματα με τα σημεία $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ώστε

$$b=a_0<a_1<\ldots<a_{k-1}<\ldots<a_{n-1}<a_n=d\,.$$

Σε κάθε υποδιάστημα παίρνουμε μία τιμή a_k^* της παραμέτρου, τέτοια ώστε $a_{k-1}\leqq a_k^*\leqq a_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Τα σημεία $z(a_k)$ διαιρούν τη c σε n τμήματα το δε $z(a_k^*)$ είναι σημείο της c μεταξύ $z(a_{k-1})$ και $z(a_k)$ (Σχ. 11).



Σχ. 11

Για συντομία θα συμβολίζουμε το $x(a_k)$ με το x_k, το $z(a_k)$ με το z_k, κ.ο.κ. Έστω $\Delta a_k=a_k-a_{k-1}$, $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ και έστω $\|\Delta a\|$ η μέγιστη τιμή του Δa_k. Κατόπιν αυτών ορίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος της c ως

$$\int_c f(z)\,dz=\lim_{\|\Delta a\|\to0}\sum_{k=1}^{n}f(z_k^*)\,\Delta z_k\,, \qquad (1)$$

υποθέτοντας ότι το όριο υπάρχει. Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ και $\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta_k$, όπου $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ και $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$. Επομένως το άθροισμα στην (1) γράφεται

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k^*+iv_k^*)(\Delta x_k+i\Delta y_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(u_k^*\Delta x_k-v_k^*\Delta y_k)+i\,(u_k^*\Delta y_k+v_k^*\Delta x_k) \qquad (2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}u_k^*\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}v_k^*\Delta y_k+i\sum_{k=1}^{n}u_k^*\Delta y_k+i\sum_{k=1}^{n}v_k^*\Delta x_k\,.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο κάθε αθροίσματος στην (2) υπάρχει καθώς $\|\Delta a\|\to0$, οπότε

$$\int_c f(z)dz = \int_c u(x,\, y)\, dx - \int_c v(x,\, y)\, dy + i\int_c u(x,\, y)\, dy + i\int_c v(x,\, y)\, dx$$

$$= \int_c \left(u\,\frac{dx}{da} - v\,\frac{dy}{da}\right) da + i\int_c \left(v\,\frac{dx}{da} + u\,\frac{dy}{da}\right) da\,. \qquad (3)$$

Ομοίως, η (3) γράφεται

$$\int_c f(z)\, dz = \int_c (u+iv)\, dx + i(u+iv)\, dy = \int_c (u+iv)\,(dx+i\,dy)\,.$$

Γενικά αν $c=c(t)$ είναι ένας διαφορίσιμος (λείος) δρόμος στο $\mathbb{C}$, τότε

$$\int_c f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(c(t))\, c'(t)\, dt \qquad (a)$$

Απόλυτο επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του λείου δρόμου C, που συμβολίζεται $\int_c f(z)\,|dz|$, είναι το εξής

$$\int_c f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f(c(t))\,|c'(t)|\,dt\,, \qquad (b)$$

όπου $|c'(t)|$ είναι το μέτρο της παραγώγου του $c(t)$.

Αν όμως υπάρχει μιγαδική συνάρτηση $F(z)$ τέτοια ώστε, $F'(z)=f(z)$, δηλαδή η $f(z)$ είναι η παράγωγος της ολόμορφης συνάρτησης $F(z)$ στον τόπο μέσα στον οποίο βρίσκεται ο δρόμος ολοκλήρωσης, τότε, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο,

$$\int_c f(z)\, dz = [F(z)]_{z=z_1} = F(z_2) - F(z_1) \qquad (c)$$

Οι παρακάτω συμβολισμοί θα χρησιμοποιούνται στα επόμενα:

$$\int_A^B f(z)\, dz\,, \qquad \int_c f(z)\, dz\,.$$

Ισχύουν δε οι ιδιότητες:

$$\int_{A\atop c}^{B} f(z)\,dz = -\int_{B\atop c}^{A} f(z)\,dz\,,$$

$$\int_c kf(z)\,dz = k\int_c f(z)\,dz, \quad k \text{ μιγαδικός}$$

$$\int_c [f(z)+g(z)]\,dz = \int_c f(z)\,dz + \int_c g(z)\,dz\,.$$

Αν η c είναι τμηματικώς διαφορίσιμη, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ κατά μήκος της c είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των διαφορίσιμων τμημάτων.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα μόνο πάνω σε τμηματικώς διαφορίσιμες καμπύλες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστεί το $I = \int_{0\atop c}^{1+i} z^2 dz$, όπου c η παραβολή $y=x^2$.

Στην περίπτωση αυτή, $z^2 = (x^2-y^2)+2xyi$ και

$$I = \int_c (x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_c 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy\,. \tag{4}$$

Αν αντικαταστήσουμε $y=x^2$ και $dy=2x\,dx$ η (4) δίνει

$$I = \int_{x=0}^{1} (x^2-5x^4)\,dx + i\int_{x=0}^{1} (4x^3-2x^5)\,dx = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\,.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα στο προηγούμενο παράδειγμα αν η c αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα από το $z=0$ ως το $z=1$ και από $z=1$ ως το $z=1+i$.

Στο πρώτο ευθύγραμμο τμήμα της c, έχουμε $y=0$ και $dy=0$, οπότε η (4) δίνει

$$\int_{x=0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}\,.$$

Κατά μήκος του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος έχουμε $x=1$ και $dx=0$, οπότε η (4) δίνει

$$\int_{y=0}^{1} (-2y)\,dy + i\int_{y=0}^{1} (1-y^2)\,dy = -1+\frac{2}{3}i\,.$$

Άρα κατά μήκος ολόκληρου του γωνιακού δρόμου

$$I = \int_{0\,c}^{1+i} z^2 dz = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} i \, .$$

Το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα έχει την αυτή τιμή στα παραδείγματα 1 και 2 είναι συνέπεια της αναλυτικότητας της $f(z)=z^2$. Η ιδιότητα αυτή θα εξεταστεί στην επόμενη παράγραφο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

$$I = \int_{0\,c}^{1+i} (x+2yi)\, dz,$$ όπου c είναι ο δρόμος του Παραδείγματος 1 και μετά ο δρόμος του Παραδείγματος 2.

Έχουμε

$$\int_{0\,c}^{1+i} (x+2yi)\,(dx+i\,dy) = \int_c (x\,dx-2y\,dy)+i \int_c (2y\,dx+x\,dy) \, . \qquad (5)$$

Για την παραβολή $y=x^2$, η (5) δίνει

$$\int_0^1 (x-4x^3)\, dx+i \int_0^1 4x^2 dx = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} i \, .$$

Πάνω στο πρώτο τμήμα του γωνιακού δρόμου η (5) δίνει

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

και πάνω στο δεύτερο τμήμα

$$\int_0^1 (-2y)\, dy+i \int_0^1 dy = -1+i \, .$$

Άρα κατά μήκος του δρόμου του Παραδείγματος 2

$$\int_{0\,c}^{1+i} (x+2yi)\, dz = -\frac{1}{2} +i \, .$$

Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα εξαρτάται από το δρόμο c, όπως επίσης και από το άκρο του δρόμου. Πρέπει να σημειωθεί ότι για τη συνάρτηση αυτή

$$u_x = 1, \; u_y = 0 \quad \text{και} \quad v_x = 0, \; v_y = 2$$

και άρα δεν πληρούνται οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann σ' ολόκληρο το z-επίπεδο.

Ενίοτε χρειάζεται να έχουμε ένα ανώτερο φράγμα για το μέτρο του $\int_c f(z)\,dz$. Έστω ΔS_k ισούται με το μήκος τόξου κατά μήκος της c μεταξύ των σημείων z_{k-1} και z_k. Το μήκος της χορδής που συνδέει τα σημεία αυτά είναι $|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}|$ και άρα $|\Delta z_k| \leqq \Delta S_k$. Έχουμε

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k\Big| \leqq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)\,\Delta z_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)|\,|\Delta z_k| \leqq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)|\,\Delta S_k .$$

Εφόσον η συνάρτηση $f(z(a))$ είναι συνεχής στο $I=[b,\, d]$ έπεται ότι θα είναι φραγμένη, δηλαδή θα υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $|f(z)| \leqq M$, για όλα τα $z \in c$. Άρα

$$\Big|\int_c f(z)\,dz\Big| = \Big|\lim_{\|\Delta a\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k\Big| =$$

$$= \lim_{\|\Delta a\|\to 0} \Big|\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k\Big| \leqq \lim_{\|\Delta a\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)|\,\Delta S_k =$$

$$= \int_c |f(z)|\,dz \leqq \int_c M\,ds = ML , \tag{6}$$

όπου L είναι το μήκος της c.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να βρεθεί ένα ανώτερο φράγμα του $\Big|\int_C \frac{dz}{z^2}\Big|$, όπου c είναι ο δρόμος κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος από το $z=2$ ως το $z=2+i$.

Πάνω στο C έχουμε $x=2$ και άρα

$$|f(z)| = \Big|\frac{1}{z^2}\Big| = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{4+y^2} .$$

Πάνω στη c έχουμε επίσης $0 \leqq y \leqq 1$ και άρα $|f(z)| \leqq \frac{1}{4}$. Το μήκος της c είναι 1. Άρα

$$\Big|\int_c \frac{dz}{z^2}\Big| \leqq \frac{1}{4} .$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

(α) $\int_c \frac{z}{\bar{z}}\, dz, \quad c(t) = e^{-i\pi t}, \quad t \in [0, 1]$

(β) $\int_c (3\bar{z}+2z)\, |dz|, \quad c(t) = e^{-i\pi t}, \quad t \in [0, 1]$

(γ) $\int_c |z|^2 dy, \quad c(t) = e^{i\pi t}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

(δ) $\int_c (3z^2+2e^{i\pi z})\, dz$, c το άνω ημικύκλιο ακτίνας 2.

Λύση. (α) Σύμφωνα με τον τύπο (a),

$$\int_c \frac{z}{\bar{z}} dz = -\int_0^1 \frac{e^{-i\pi t}}{e^{i\pi t}} i\pi e^{-i\pi t}\, dt = \frac{1}{3}\left[e^{-3i\pi t}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

(β) Σύμφωνα με τον τύπο (b),

$$\int_c (3\bar{z}+2z)\, |dz| = \int_0^1 (3e^{i\pi t}+2e^{-i\pi t})\, |e^{-i\pi t}(-i\pi)|\, dt$$

$$= \pi \int_0^1 (3e^{i\pi t}+2e^{-i\pi t})\, dt = 2i\,.$$

(γ) Η καμπύλη c έχει εξίσωση $z(t)=e^{i\pi t}=\cos\pi t+i\sin\pi t=x+iy$. Δηλαδή $x=\cos\pi t$, $y=\sin\pi t$, $|z|=1$. Συνεπώς,

$$\int_c |z|^2 dy = \pi \int_0^{1/3} \cos\pi t\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\,.$$

(δ) Η συνάρτηση $3z^2+2e^{i\pi z}$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $z^3+\frac{2}{i\pi}e^{i\pi z}$. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (c), έχουμε

$$\int_c (3z^2+2e^{i\pi z})\, dz = \left[z^3+\frac{2}{i\pi}e^{i\pi z}\right]_{z=2}^{2\cdot e^{i\pi}} = -16\,.$$

8. Ολοκλήρωση αναλυτικών συναρτήσεων

Η παράγραφος αυτή περιλαμβάνει ορισμένα θεωρήματα που αφορούν ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων. Το πρώτο από αυτά είναι ένα από τα σπουδαιότερα θεωρήματα της θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων.

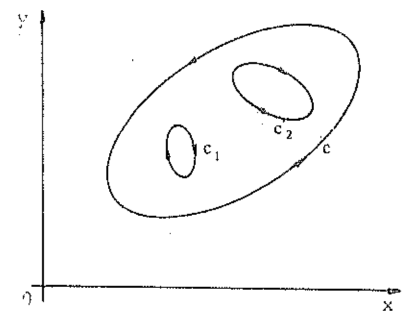
ΘΕΩΡΗΜΑ **1. (Ολοκληρωτικό θεώρημα των** Cauchy-Goursat).

Έστω D ανοικτός τόπος στο z-επίπεδο, που έχει σύνορο c ένα σύνολο κλειστών καμπύλων οι οποίες δεν τέμνονται μεταξύ τους. Έστω ότι η συνάρτηση f(z) είναι αναλυτική στον τόπο D και πάνω στο c. Τότε,

$$\int_c f(z)\, dz = 0\,,$$

όπου η ολοκλήρωση κατά μήκος του c θεωρείται κατά τη θετική φορά.

Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Cauchy ο οποίος θεώρησε επιπλέον την υπόθεση ότι η $f'(z)$ είναι συνεχής στο D και πάνω στο c. O Goursat έδειξε ότι η επιπλέον υπόθεση μπορεί να παραλειφθεί και έτσι το νέο θεώρημα αποδείχθηκε εξαιρετικής σημασίας στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων. Η παρακάτω απόδειξη είναι η πρώτη δηλαδή εκείνη που υποθέτεται ότι $f'(z)$ είναι συνεχής.



Σχ. 1

Απόδειξη. Η θετική φορά ορίζεται στο Σχ. 1. Έστω $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$. Εφόσον η $f'(z)$ είναι συνεχής, οι πρώτες μερικές παράγωγοι των u και v ως προς x και y, είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επειδή η f(z) είναι αναλυτική, οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann πληρούνται, δηλαδή,

$u_x=v_y$ και $u_y=-v_x$. Η εφαρμογή του θεωρήματος του Green στο επίπεδο δίνει

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c (u\,dx-v\,dy)+i\int_c (u\,dx+u\,dy) =$$

$$= \iint_D (-v_x-u_y)\,dx\,dy+i\iint_D (u_x-v_y)\,dx\,dy = 0\,.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ **είναι αναλυτική στον απλώς συναφή τόπο** D. **Έστω** z_1 **και** z_2 **κείνται στο** D. **Τότε** $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ **είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ακολουθείται από το** z_1 **στο** z_2 **μέσα στο** D.

Απλώς συναφής καλείται ένας τόπος D στον οποίο κάθε κλειστή καμπύλη που κείται στο D μπορεί να συσταλεί σε ένα σημείο χωρίς να περάσει από σημεία εκτός του D. Π.χ. ο τόπος μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων δεν είναι απλώς συναφής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Έστω $f(z)$ **είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα απλώς συναφή τόπο** D. **Έστω** z_0 **σταθερό σημείο στο** D **και** z **μεταβλητό σημείο στο** D. **Έστω ότι το** $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ **είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στο** D. **Τότε υπάρχει συνάρτηση** $F(z)$, **αναλυτική στο** D, **τέτοια ώστε** $F'(z)=f(z)$. **Ακόμη, αν** z_1 **και** z_2 **ανήκουν στο** D,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1)\,,$$

πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη στο D.

Απόδειξη. Ανεξάρτητα του δρόμου που ακολουθείται μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\,.$$

Παίρνουμε σημείο $z \in D$ και το διατηρούμε προς στιγμή σταθερό. Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η $f(z)$ είναι συνεχής στο z, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε η $|z-z'|<\delta$ συνεπάγεται την $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$. Παίρνουμε σημείο

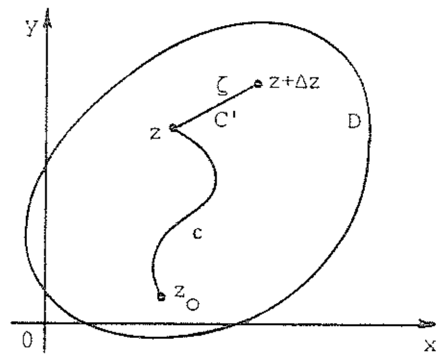
$z+\Delta z$, $|\Delta z|<\delta$ και έστω c' ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το z και το $z+\Delta z$, (Σχ. 2). Έστω ζ βοηθητική μεταβλητή σημείων κατά μήκος του c'. Σύμφωνα με την παράγραφο 6

$$\int_{z \atop c'}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z .$$

(Να αποδειχθεί). Επειδή $f(z)$ είναι σταθερή κατά την ολοκλήρωση κατά μήκος της c',

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z \atop c'}^{z+\Delta z} f(z)\, d\zeta .$$

Έστω c καμπύλη στο D από το z_0 στο z.



Σχ. 2

Αν ολοκληρώσουμε κατά μήκος της c και στη συνέχεια κατά μήκος της c', θα έχουμε, από τον ορισμό της $F(z)$, ότι

$$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)\, dz - \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta .$$

Άρα,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\, d\zeta\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta)-f(z)|\, dz < \frac{1}{|\Delta z|}\, \varepsilon\, |\Delta z| = \varepsilon ,$$

επειδή $|\zeta - z| \leqq |\Delta z| < \delta$. Από αυτό έπεται ότι

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z), \quad \text{ή} \quad F(z) = f(z) .$$

Τώρα έστω z_1 και z_2 τυχόντα σημεία στο D και c καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία z_0, z_1 και z_2. Τότε η ολοκλήρωση κατά μήκος της c δίνει

$$\int_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

ή

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2)-F(z_1) .$$

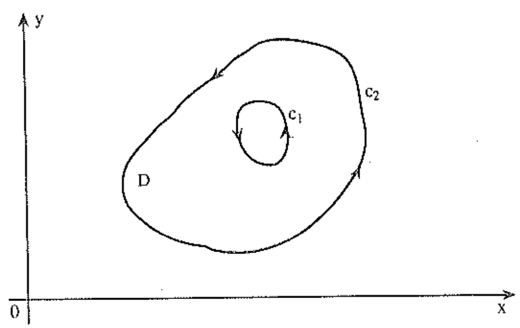
Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η υπόθεση της συνέχειας της $f(z)$ στο Θεώρημα 3 αντικατασταθεί από την αναλυτικότητα, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2, η υπόθεση της ανεξαρτησίας κατά μήκος του δρόμου αυτομάτως πληρούται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Έστω c_1 και c_2 απλές κλειστές καμπύλες και c_1 εντός της c_2. Έστω $f(z)$ αναλυτική στον τόπο D μεταξύ των c_1 και c_2 και πάνω στις c_1 και c_2. Τότε

$$\oint_{c_2} f(z)\,dz = \oint_{c_1} f(z)\,dz .$$

Απόδειξη. (Σχ. 3). Έστω c το σύνορο του D. Από το Θεώρημα 1 $\int_c f(z)\,dz = 0$, όπου η ολοκλήρωση θεωρείται κατά τη θετική φορά



Σχ. 3

κατά μήκος της c. Τότε, εφόσον

$$\int_c f(z)\,dz = \oint_{c_2} f(z)\,dz - \oint_{c_1} f(z)\,dz ,$$

έχουμε

$$\int_{c_2} f(z)\,dz = \oint_{c_1} f(z)\,dz .$$

Στην πράξη ως c_1 συνήθως θεωρείται κύκλος που έχει ως κέντρο ένα ανώμαλο σημείο της $f(z)$.

9. Ο θεμελιώδης τύπος του Cauchy

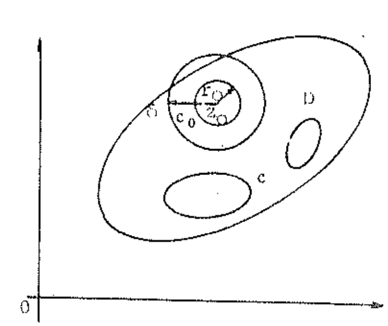
Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε μερικές σπουδαίες συνέπειες του θεωρήματος των Gauchy-Goursat.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω D κλειστός τόπος στο z-επίπεδο που έχει σύνορο c που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος απλών κλειστών καμπυλών που δεν τέμνονται. Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική στο D και πάνω στο c. Έστω z_0 τυχόν εσωτερικό σημείο του D. Τότε,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} , \qquad (1)$$

όπου η ολοκλήρωση κατά μήκος της c θεωρείται κατά τη θετική φορά.



Σχ. 4

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον η $f(z)$ είναι αναλυτική στο $z=z_0$, είναι συνεχής και άρα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, αν $|z-z_0|<\delta$ έπεται ότι $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Έστω c_0 ο κύκλος $|z-z_0|=r_0$, όπου η ακτίνα $r_0<\delta$, είναι επίσης αρκετά μικρή ώστε ο δίσκος που ορίζεται απ' αυτόν να βρίσκεται ολόκληρος μέσα στο D. (Σχ. 4). Η συνάρτηση που ολοκληρώνεται στην (1) είναι αναλυτική σ' ολόκληρο τον κλειστό τόπο D΄, ο οποίος αποτελείται από το D εκτός του εσωτερικού του c_0, και πάνω στο σύνορο c΄ του D΄.

Από το Θεώρημα 4, της προηγούμενης παραγράφου

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_{c_0} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}\,. \tag{2}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\oint_{c_0} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{c_0} \frac{f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]}{z-z_0}\,dz =$$

$$= f(z_0) \oint_{c_0} \frac{dz}{z-z_0} + \oint_{c_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\,. \tag{3}$$

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (3), θέτοντας $z-z_0=r_0e^{i\varphi}$ πάνω στο c_0. Οπότε, $dz=ir_0e^{i\varphi}d\varphi$ και

$$\int_{c_0} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ir_0e^{i\varphi}d\varphi}{r_0e^{i\varphi}} = 2\pi i\,, \tag{4}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο του r_0. Ακόμη, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (3) είναι ανεξάρτητο του r_0 πράγμα που συνεπάγεται από την ισότητα (2). Άρα το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (3) πρέπει επίσης να είναι ανεξάρτητο του r_0. Επειδή πάνω στη c_0, $|z-z_0| = r_0<\delta$, έχουμε

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} < \frac{\varepsilon}{r_0}\,,$$

και το μήκος της c_0 είναι $2\pi r_0$. Σύμφωνα με τη σχέση (6) της παραγράφου 6,

$$\left|\oint_{c_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leqq \frac{\varepsilon}{r_0}\,2\pi r_0 = 2\pi\varepsilon\,. \tag{5}$$

Εφόσον το ε είναι αυθαιρέτως μικρό, το ολοκλήρωμα στη σχέση (5) πρέπει να ισούται με μηδέν. Κατά συνέπεια,

$$\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)\,,$$

η οποία είναι η σχέση (1) που θέλαμε να αποδείξουμε.

Η (1) καλείται ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy και συνδέει την τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης σ' ένα εσωτερικό σημείο ενός τόπου με τις τιμές αυτής πάνω στο σύνορο του τόπου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογιστεί το

$$I = \int_c \frac{z^2\,dz}{z-(2+i)}$$

όπου c είναι ο κύκλος $|z-(2+i)| = 1$.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα του ολοκληρώματος της σχέσης (1), όπου $f(z)=z^2$ και $z_0=2+i$. Άρα

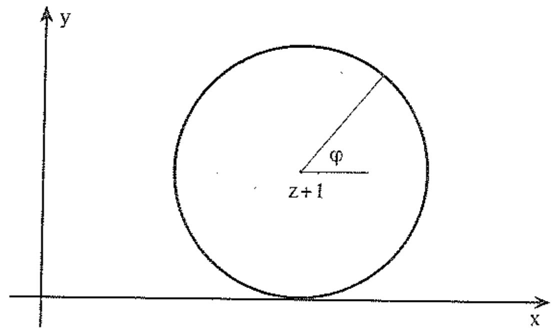
$$I = 2\pi i(2+i)^2 = -8\pi+6\pi i\,.$$

Το εξαγόμενο αυτό μπορεί να επαληθευτεί και με κατευθείαν ολοκλήρωση, θέτοντας z ίσο με $2+i+e^{i\varphi}$ πάνω στη c όπως στο Σχ. 15.

Οπότε $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ και

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{((2+i)+e^{i\varphi})^2\, ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} ((3+4i)+2(2+i)\,e^{i\varphi}+e^{2i\varphi})\,d\varphi =$$

$$= (3+4i)\,2\pi = -8\pi+6\pi i\,,$$



Sx. 5

διότι $\int_0^{2\pi} e^{2i\varphi}\,d\varphi = 0$ και $\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,d\varphi = 0$, αφού η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική.

Χωρίς απόδειξη δίνουμε το παρακάτω:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω $f(z)$ συνάρτηση αναλυτική στο $z=z_0$. Τότε οι παράγωγοι οποιασδήποτε τάξης αυτής υπάρχουν στο $z=z_0$ και άρα αυτές είναι αναλυτικές στο z_0.

Ακόμη

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{\pi!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,, \tag{6}$$

όπου $f^{(n)}(z_0)$ είναι η n-οστή παράγωγος της $f(z)$ στο σημείο $z=z_0$ και c είναι ο κύκλος κέντρου z_0 αρκούντως μικρής ακτίνας.

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι ο τύπος (6) προκύπτει αν διαδοχικώς παραγωγίσουμε τη σχέση (1) ως προς z_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Έστω $f(z)$ συνεχής συνάρτηση στον απλώς συναφή τόπο D. Έστω $\oint_c f(z)\,dz = 0$, γύρω από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη c στον τόπο D. Τότε η $f(z)$ είναι αναλυτική στον τόπο D.

Απόδειξη. Όπως γίνεται η απόδειξη και για το πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αποδεικνύεται ότι το $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στο D. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 της Παραγράφου 7 υπάρχει συνάρτηση $F(z)$ τέτοια ώστε $F'(z)=f(z)$ σ' ολόκληρο το D. Επομένως η $F(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση και η $f(z)$, ως παράγωγος μιας αναλυτικής συνάρτησης, είναι αναλυτική στον D, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.

Το Θεώρημα 3 είναι γνωστό ως Θεώρημα του Morera και μπορεί να θεωρηθεί ως το αντίστροφο του ολοκληρωτικού θεωρήματος των Gauchy-Goursat.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

1. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c f(z)\,dz$ εξαρτάται γενικά από τη συνάρτηση $f(z)$ από το δρόμο $c=c(t)$ τη φορά διαγραφής αυτού και από τα άκρα του.

2. Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος, αν $f(z)=$ $=u(x, y)+iv(x, y)$, $z=x+iy$ και $y=y(x)$ είναι ο λείος δρόμος ολοκλήρωσης, θέτουμε $y=y(x)$ και $dy=y'(x)\,dx$, στο ολοκλήρωμα. Ομοίως αν $x=x(y)$ ο λείος δρόμος ολοκλήρωσης, θέτουμε $x=x(y)$ και $dx=x'(y)\,dy$ στο ολοκλήρωμα. Και στις δύο περιπτώσεις θέτουμε αντίστοιχα κατάλληλα τα όρια για το x ή το y.

3. Αν ο δρόμος ολοκλήρωσης είναι ο $c(t)=x(t)+iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\int_c f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f\,[c(t)]\;c'(t)\,dt$$

και για το απόλυτο ολοκλήρωμα τον τύπο

$$\int_c f(z)\,|dz| = \int_\alpha^\beta f\,[c(t)]\;|c'(t)|\,dt\,.$$

4. Αν υπάρχει μιγαδική συνάρτηση $F(z)$ τέτοια ώστε $F'(z)=f(z)$, τότε

$$\int_c f(z)\,dz = [F(z)]_{z=z_1}^{z_2} = F(z_1)-F(z_2)$$

όπου z_1, z_2 είναι τα άκρα του λείου δρόμου ολοκλήρωσης.

5. (Ολοκληρωτικό θεώρημα των Cauchy-Goursat). Το ολοκλήρωμα πάνω σε λεία απλή κλειστή καμπύλη c μέσα σε ένα τόπο D όπου η $f(z)$ είναι αναλυτική, είναι μηδέν, δηλαδή

$$\oint_c f(z)\,dz = 0\,.$$

6. (Θεμελιώδης τύπος του Cauchy). Με τις προηγούμενες υποθέσεις για το δρόμο ολοκλήρωσης και τη συνάρτηση $f(z)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz .$$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_c dz$, $\int_c |dz|$, όπου c ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή.
(Απ. 0, 2π)

2. Υπολογίστε το $\int_c \frac{1}{z} dz$, όπου c ο κύκλος $|z|=1$.
(Απ. $2\pi i$)

3. Υπολογίστε το $\int_c \operatorname{Re} z \, dz$ κατά μήκος
(α) του ευθύγραμμου τμήματος από το 0 στο $1+i$,
(b) της γωνίας από το 0 στο 1 και μετά στο $1+i$.
$\left(\text{Απ. } \frac{1+i}{2}, \ \frac{1}{2}+i\right)$

4. Να δειχθεί ότι $\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq \int_c |f(z)| \, |dz|$.

5. Να βρεθεί ένα ανώτερο φράγμα της $\left| \int_C \log(z+1)\, dz \right|$, όπου c είναι το ευθύγραμμο τμήμα από i έως $2+i$.
$\left(\text{Απ. } 2\left(\log\sqrt{10}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_c dz$, $\int_c |dz|$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.
(Απ. 0,8)

7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c |z|^2 dz$, όπου c
(α) η καμπύλη $y=x^2$ από το (1, 1) στο (2, 4)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz .$$

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_c dz$, $\int_c |dz|$, όπου c ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή.
(Απ. $0, 2\pi$)

2. Υπολογίστε το $\int_c \frac{1}{z} dz$, όπου c ο κύκλος $|z|=1$.

(Απ. $2\pi i$)

3. Υπολογίστε το $\int_c \mathrm{Re}\, z\, dz$ κατά μήκος

(α) του ευθύγραμμου τμήματος από το 0 στο $1+i$,
(b) της γωνίας από το 0 στο 1 και μετά στο $1+i$.
(Απ. $\frac{1+i}{2}$, $\frac{1}{2}+i$)

4. Να δειχθεί ότι $\left|\int_c f(z)\, dz\right| \leq \int_c |f(z)|\, |dz|$.

5. Να βρεθεί ένα ανώτερο φράγμα της $\left|\int_C \log(z+1)\, dz\right|$, όπου c είναι το ευθύγραμμο τμήμα από i έως $2+i$.
(Απ. $2\left(\log\sqrt{10}+\frac{\pi}{4}\right)$)

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_c dz$, $\int_c |dz|$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.
(Απ. 0,8)

7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c |z|^2 dz$, όπου c

(α) η καμπύλη $y=x^2$ από το (1, 1) στο (2, 4)

(b) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο προηγούμενα σημεία.
(Απ. (α) $\frac{128}{15}+i\frac{57}{2}$, (b) $\frac{28}{3}(1+3i)$)

8. Βρείτε ένα ανώτερο φράγμα του $\left|\int_c z^2 dz\right|$ όπου c το τόξο του ημικύκλιου $|z|=1$, που ενώνει το (1, 0) με το (0, 1).
(Απ. $\frac{\pi}{2}$)

9. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c \mathrm{Re}\, z\, dz$ όπου c είναι

(α) το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο i,
(b) το δεξιό τόξο του κύκλου $\left|z-\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$ από το 0 στο i, στο δεξιό ημικύκλιο,
(c) η παραβολή $y = 2x^2+1$ από το (1, 3) στο (2, 9),
(d) ο κύκλος $|z|=7$ κατά τη θετική φορά,
(e) η έλλειψη $4x^2+y^2 = 4$ κατά τη θετική φορά.
(Απ. (α) 0, (b) $\frac{\pi}{8} i$, (c) $\frac{3}{2}+\frac{28}{3} i$, (d) $49\pi i$, (e) $2\pi i$)

10. Υπολογίστε το $\int_c \left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}\right) dz$, όπου c ο κύκλος $|z-2|=3$, που να διαγράφεται μια φορά κατά τη θετική φορά.
(Απ. $2\pi i$)

11. Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{1-i}^{1+i} z\, dz$, όπου c ο δρόμος που ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi(t)=|t|+it^3$, $\forall\, t \in [-1, 1]$.
(Απ. i)

12. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int_1^{-1} |z^2-1|\, |dz|, \quad \int_1^{-1} (z-1)\, |dz|,$$

όπου c ο δρόμος που ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi(t) = \cos t+i \sin t$, $\forall\, t \in [0, \pi]$.
(Απ. $4, -\pi+2i$)

13. Να υπολογιστεί το $\int_c z^2 dz$, όπου c η καμπύλη $z(t) = \eta\mu^2\pi t + i\,\sigma\upsilon\nu 2\pi t$ από $t=0$ έως $t=\frac{1}{2}$.

(Απ. $-\frac{2+i}{3}$)

14. Να υπολογιστεί το $\int_c \eta\mu z\, dz$, όπου c η παραβολή $y=x^2$ από $z=0$ έως $z=1+i$.

(Απ. $1-\sigma\upsilon\nu 1\, ch 1 + i\,\eta\mu 1\, sh 1$)

15. Να υπολογιστεί το $\int_{-i}^{i} ze^{iz} dz$.

(Απ. $2e^{-1}$)

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $\oint_c e^z dz$, c η περίμετρος του μοναδιαίου τετραγώνου με κέντρο την αρχή,

(b) $\oint_c \frac{1}{z^2} dz$, c ο μοναδιαίος κύκλος,

(c) $\oint_c \frac{dz}{z}$, c ο κύκλος $c(\theta) = 3+e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

(d) $\int_c z^2 dz$, c το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $1+i$ με το i.

(Απ. (α) 0, (b) 0, (c) 0, (d) $\frac{10}{3} - \frac{2i}{3}$)

17. Να υπολογιστεί το $\oint_c \frac{1}{z}$, όπου c οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή.

18. Να υπολογιστεί το $\oint_c \frac{2z-1}{z^2-z} dz$,

(α) γύρω από κλειστή καμπύλη c που περικλείει τα σημεία 0 και 1,

(b) γύρω από τον κύκλο $|z| = \frac{1}{2}$.

(Απ. (α) $4\pi i$, (b) $2\pi i$)

19. Να υπολογιστεί το $\oint_c \frac{z^2+1}{z^2-1} dz$, όπου c είναι:

(α) $|z-1|=1$, (b) $|z-\frac{1}{2}|=1$, (c) $|z+1|=1$, (d) $|z-i|=1$.

(Απ. (α) $2\pi i$, (b) $2\pi i$, (c) $-2\pi i$, (d) 0)

20. Να υπολογιστεί το $\oint_c \frac{z^4+1}{(2z+1)^3} dz$, c ο κύκλος $|z|=1$.

(Απ. $3\pi i$)

21. Να υπολογιστεί το $\oint_c \frac{z+2}{z^2+2} dz$, όπου c είναι:

(α) $|z|=\frac{1}{2}$, (b) $|z-1|=3$, (c) $|z-1|=\frac{1}{2}$, (d) $|z-i|=\frac{1}{2}$.

(Απ. (α) $4\pi i$, (b) $2\pi i$, (c) 0, (d) 0)

22. Υπολογίστε τα επόμενα ολοκληρώματα πάνω στον κύκλο $|z|=1$ κατά τη θετική φορά.

(α) $\oint_c \frac{e^z}{z} dz$, (b) $\oint_c \frac{e^z-1}{z} dz$, (c) $\oint_c \frac{\cos z}{z} dz$,

(d) $\oint_c \frac{z^2-1}{z^2+2} dz$, (e) $\oint_c \frac{z^3}{z-\frac{1}{2}} dz$, (f) $\oint_c \frac{\cos z}{z^2} dz$,

(g) $\oint_c \frac{\cos z}{z^4} dz$, (h) $\oint_c \frac{z^8+1}{(z-\frac{1}{2})^7} dz$, (i) $\oint_c \frac{e^z}{z^4} dz$, (j) $\oint_C \frac{\sin z}{z^4} dz$

(Απ.: (α) $2\pi i$, (b) 0, (c) $2\pi i$, (d) 0, (e) $\frac{\pi}{4}$, (f) 0, (g) 0, (h) $14\pi i$, (i) $\frac{\pi}{3} i$, (j) $-\frac{\pi}{3} i$)

23. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, που η παράγωγος $f'(x_0)$ να υπάρχει, αλλά η f' να μην είναι συνεχής στο