

Σύγχρονος Αυτόματος Έλεγχος

Προβλημα Βήματος 1.

Σχεδιασμός ελεγκτή για το Βήμα 1 (δες προηγούμενη διάλεξη), δηλαδή για το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Να σχεδιασθεί ελεγκτής $u=f(x)$, έτσι ώστε $x(t) \rightarrow 0$

Έχουμε ότι

$$\dot{x} = Ax + Bf(x) = g(x)$$

Επίσης, έστω ότι $x(0) = x_0$

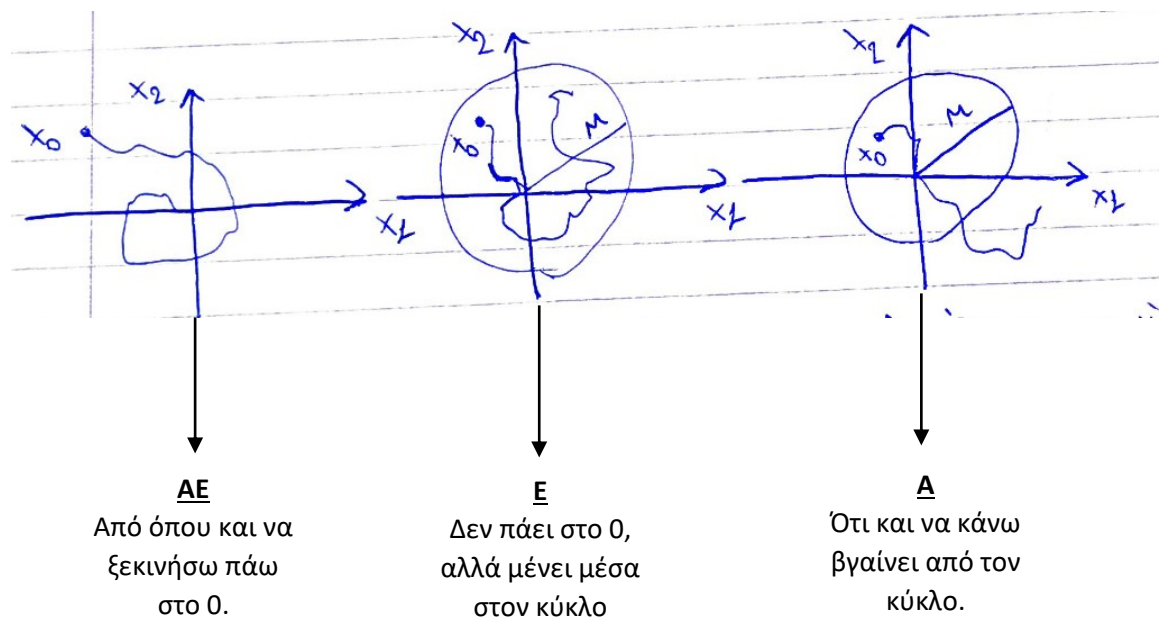
Ευστάθεια συστήματος

Το παραπάνω σύστημα είναι

ΑΕ $\rightarrow$ Ασυμπτωτικά Ευσταθές, όταν $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \forall x_0$

E $\rightarrow$ Ευσταθές, όταν $|x(t)| < M < \infty, \forall t, \forall x_0$

A $\rightarrow$ Ασταθές, όταν $|x(t)| = \infty, \forall t$



Αρά, το πρόβλημα του Βήματος 1 λύνεται αν καταφέρουμε να σχεδιάσουμε το έλεγκτή $u(t)=f(x(t))$ έτσι ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι ΑΕ

$$\dot{x} = Ax + Bf(x)$$

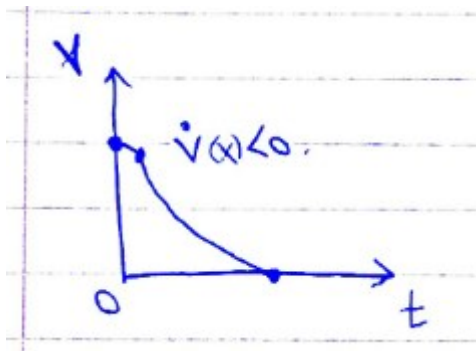
Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov

Το σύστημα $\dot{x} = g(x)$ είναι ΑΕ

αν και μόνο εάν

$\exists V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω 2 συνθήκες

- $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ και $V(x) = 0$ μόνο αν $x = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ και $\dot{V}(x) = 0$ μόνο αν $x = 0$



Όταν $\dot{V}(x) = 0$ τότε $x=0$

Παραδείγμα

$$\dot{x} = -3x,$$

$$V = \frac{1}{2}x^2$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}2x\dot{x} = x\dot{x} = -3x^2$$

Το σύστημα είναι ΑΕ.

Η V πληρεί και τις 2 προϋποθέσεις του θεωρήματος.

Παραδείγμα

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

Για να εξετάσω αν το σύστημα είναι ΑΕ πρέπει να δοκιμάσω πολλές διαφορετικές συναρτήσεις $V(x)$

Η συνάρτηση

$$V = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2,$$

πληροί την πρώτη προϋπόθεση του θεωρήματος, αφού

$$V(x) > 0 \text{ για } x_1 \neq 0 \text{ και } x_2 \neq 0$$

Η δεύτερη προϋπόθεση, όμως, δεν πληρείται γιατί

$$\dot{V} = \frac{1}{4}4x_1^3\dot{x}_1 + \frac{1}{2}2x_2\dot{x}_2 = x_1^3x_2 + x_2(-x_1^3 - x_2^3) = x_1^3x_2 - x_1^3x_2 - x_2^4 = -x_2^4$$

αφού $\dot{V} = 0$ δεν συνεπάγεται ότι $x = 0$ (π.χ., $\dot{V} = 0$ για $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \neq 0$).

Θεώρημα ευστάθειας Lyapunov για Γραμμικά Συστήματα

Έστω ότι στο πρόβλημα του βήματος 1, ο έλεγκτης είναι γραμμικός, δηλαδή για το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ο ελεγκτής έχει την μορφή $u=Kx$ για κάποιο σταθερό πίνακα K . (Προσοχή στις διαστάσεις: αν $x \in R^n, u \in R^m$ τότε $K \in R^{m \times n}$)

Το σύστημα **κλειστού βρόχου** (δηλαδή μετά την εφαρμογή του ελεγκτή $u=Kx$) παίρνει τη μορφή

$$\dot{x} = A_{cl}x$$

$$A_{cl} = A + BK$$

Το θεώρημα ευστάθειας Lyapunov σε αυτή την περίπτωση, γίνεται ως εξής:

Το σύστημα $\dot{x} = A_{cl}x$ είναι ΑΕ

αν και μόνο εάν

$\exists$ πίνακες P, Q τέτοιοι ώστε

- $P > 0, Q > 0$ (δηλαδή είναι θετικά ορισμένοι)
- $PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q$

Απόδειξη

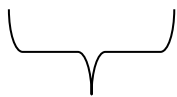
Έστω $V = x^T P x$, η οποία πληροί την πρώτη προϋπόθεση του θεωρήματος αφού ο P είναι θετικά ορισμένος.

Όσον αφορά στην δεύτερη προϋπόθεση, έχουμε ότι (ο P είναι σταθερός, άρα $\dot{P} = 0$)

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T \dot{P} x + x^T P \dot{x} = (A_{cl}x)^T P x + x^T P A_{cl}x =$$

$$x^T A_{cl}^T P x + x^T P A_{cl}x =$$

$$x^T (A_{cl}^T P x + P A_{cl}x) = -x^T Q x$$



$$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q$$

και, άρα, πληρείται και η δεύτερη προϋπόθεση του θεωρήματος, αφού ο Q είναι θετικά ορισμένος.

Παραδείγμα

$$\dot{x} = A_{cl}x, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$V = x^T Q x = x_1^2 + x_2^2 > 0 \text{ για } x_1 \neq 0 \text{ και } x_2 \neq 0$$

Ψάχνουμε ένα πίνακα $P > 0$, ο οποίος ικανοποιεί

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q$$

$$\text{Έστω } P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \quad P = P^T \text{ συμμετρικός}$$

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & -P_1 - P_2 \\ P_4 & -P_3 - P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_3 & P_4 \\ -P_1 - P_3 & -P_2 - P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_2 + P_3 & -P_1 - P_2 + P_4 \\ P_4 - P_1 - P_3 & -P_3 - P_2 - 2P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_2 + P_3 = -1 & -P_1 - P_2 + P_4 = 0 \\ P_4 - P_1 - P_3 = 0 & -P_3 - P_2 - 2P_4 = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P_2 = -\frac{1}{2}$$

$$P_1 = 1.5$$

$$P_3 = 1$$

Συνεπώς

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Πρέπει ο $P > 0$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1.5x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 =$$

$$= 1.5x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 0.5x_2^2 + (0.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - x_1x_2) =$$

$$= x_1^2 + 0.5x_2^2 + 0.5(x_1 - x_2)^2 > 0 \text{ για } x_1 \neq 0 \text{ και } x_2 \neq 0$$

Αρα ο πίνακας P είναι θετικά ορισμένος.

Συνεπώς το σύστημα είναι ΑΕ.

Παραδείγμα

$$\dot{x} = A_{cl}x, \quad A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}, \quad P = P^T \text{ συμμετρικός}$$

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P = -Q \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_2 \\ 0 & -P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_2 & -P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_2 \\ -P_2 & -2P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 0 = -1 \\ -P_2 = 0 \\ -2P_3 = -1 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων δεν λύνεται, οπότε το σύστημα δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύστημα είναι ΑΕ