

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

4.1. Εισαγωγή

Πριν εφαρμόσουμε κάποια τεχνική σχεδιασμού για την επιβολή ενός νόμου ελέγχου σ' ένα σύστημα, πρέπει να γνωρίζουμε τις διάφορες ιδιότητες του συστήματος. Δύο θεμελιώδεις ιδιότητες είναι οι έννοιες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Η ελεγχιμότητα του συστήματος αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο οι είσοδοι (ή οι ελεγχόμενες μεταβλητές εισόδου) επηρεάζουν το σύστημα, ενώ η παρατηρησιμότητα του συστήματος αναφέρεται στο βαθμό στον οποίο οι έξοδοι (ή οι μετρούμενες μεταβλητές εξόδου) πληροφορούν για την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος.

4.2. Ελεγχιμότητα κατάστασης

Θεωρούμε ένα γραμμικό, σύστημα συνεχούς χρόνου $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$, που περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης και εξόδου.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (4.1\alpha)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.1\beta)$$

όπου $\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$ και $\mathbf{y}(t) \in \mathfrak{R}^{l \times 1}$. Υποθέτουμε ότι για κάποια είσοδο $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ και για αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 , η κατάσταση στο χρόνο t_1 είναι $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Αυτό σημαίνει ότι η είσοδος $\mathbf{u}(t)$ οδηγεί την κατάσταση $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ στην $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Ορισμός 4.1

Η κατάσταση \mathbf{x}_0 του συστήματος (4.1) ονομάζεται σημειακά ελέγξιμη (*pointwise controllable*) ή απλώς ελέγξιμη στο διάστημα $[t_0, t_1]$, όπου t_1 είναι ένας πεπερασμένος χρόνος, αν υπάρχει μία είσοδος ελέγχου $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ που οδηγεί το διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x}_0 στην αρχή των αξόνων του χώρου κατάστασης $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται, τότε η κατάσταση \mathbf{x}_0 είναι μη ελέγξιμη στο διάστημα $[t_0, t_1]$ και είναι αδύνατο να οδηγήσουμε το διάνυσμα κατάστασης από την αρχική κατάσταση $\mathbf{x}(0)$ στην κατάσταση $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$.

Ο ανωτέρω ορισμός αναφέρεται στην ελεγχιμότητα της κατάστασης προς την αρχή των αξόνων (*controllability pointwise state to the origin*). οπότε $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, δηλ. απαιτεί ο νόμος ελέγχου να οδηγεί την κατάσταση στη μηδενική τιμή της. Αντίθετα, όταν η αρχική κατάσταση βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, δηλ. $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, τότε έχουμε την ελεγχιμότητα της κατάστασης από την αρχή των αξόνων (*controllability pointwise state from the origin*) η οποία ονομάζεται και εφικτότητα (*reachability*). Αποδεικνύεται ότι οι έννοιες της ελεγχιμότητας και εφικτότητας είναι ισοδύναμες στα συστήματα συνεχούς χρόνου και η ικανοποίησή τους απαιτεί την ικανοποίηση των ίδιων ακριβών συνθηκών. Αυτό συμβαίνει επειδή στα συστήματα συνεχούς χρόνου μία αρχική κατάσταση \mathbf{x}_0 μπορεί να μεταφερθεί στην κατάσταση $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ σε πεπερασμένο χρόνο t_1 από μία είσοδο ελέγχου $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, αν και μόνον αν η \mathbf{x}_0 μπορεί να μεταφερθεί σε οποιαδήποτε τυχαία κατάσταση \mathbf{x}_1 σε χρόνο t_1 από μία είσοδο ελέγχου $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Σημειώνεται επίσης ότι η είσοδος ελέγχου $\mathbf{u}(t)$ που μεταφέρει το \mathbf{x}_0 στο \mathbf{x}_1 δεν είναι μοναδική. Αυτό όμως δεν συμβαίνει και στα συστήματα διακριτού χρόνου, όπου η ελεγχιμότητα (προς την αρχή) δεν εξασφαλίζει την εφικτότητα. Συγκεκριμένα, στα συστήματα διακριτού χρόνου η εφικτότητα είναι ισοδύναμη με την ελεγχιμότητα, με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι ομαλός [1]-[3].

Ορισμός 4.2

Αν κάθε κατάσταση $\mathbf{x}(t_0)$ του συστήματος (4.1) είναι ελέγξιμη στο διάστημα $[t_0, t_1]$, τότε το σύστημα

(4.1) είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Θεώρημα 4.1: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ελεγχιμότητας

Το σύστημα (4.1) είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$ αν και μόνον αν οι γραμμές του πίνακα $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0, t_1]$, όπου $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς (μηδενικής εισόδου) συστήματος $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, ή ισοδύναμα αν και μόνον αν ο πίνακας

$$\mathbf{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{B}^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) d\tau \quad (4.2)$$

είναι ομαλός (η ισοδυναμία των δύο συνθηκών προκύπτει από την ιδιότητα του μεταβατικού πίνακα $\Phi(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau)$). Η είσοδος ελέγχου $\mathbf{u}(t)$, η οποία μεταφέρει την κατάσταση του συστήματος από την $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ στην $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, είναι

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^*(\tau) \Phi^*(t_1, t) \mathbf{M}^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (4.3)$$

Στην (4.2) με "*" συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής πίνακας. Στη συνέχεια θεωρούμε πραγματικούς πίνακες οπότε, \mathbf{B}^* είναι ο ανάστροφος πίνακας του \mathbf{B} .

Απόδειξη:

Από την (2.165) για $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ στην $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ προκύπτει ότι [3]

$$-\Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (4.4)$$

όπου $\Phi(t, \tau)$ είναι ο μεταβατικός πίνακας του συστήματος (4.1).

Αναγκαία συνθήκη: Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι το σύστημα (4.1) είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$ αλλά ο $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ είναι ανώμαλος. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\lambda \neq 0$, τέτοιο ώστε

$$\lambda^* \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [t_0, t_1] \quad (4.5)$$

Έστω ότι $\mathbf{x}_0 = \Phi^*(t_1, t_0) \lambda$. Από την υπόθεση της πλήρους ελεγχιμότητας συνεπάγεται ότι υπάρχει μία είσοδος ελέγχου $\mathbf{u}(t)$ που διέπεται από την (4.4) και μεταφέρει την κατάσταση \mathbf{x}_0 στην αρχή των αξόνων σε χρόνο $t_1 - t_0$. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (4.4) με λ^* και αντικαθιστώντας την $\mathbf{x}_0 = \Phi^*(t_1, t_0) \lambda$, παίρνουμε

$$-\lambda^* \Phi(t_1, t_0) \Phi^*(t_1, t_0) \lambda = \lambda^* \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (4.6)$$

η οποία είναι εκ ταυτότητας μηδέν λόγω της (4.5). Επομένως $\| \lambda^* \Phi(t_1, t_0) \| = 0$, ή $\lambda^* \Phi(t_1, t_0) = 0$ και $\lambda^* = 0$, επειδή ο μεταβατικός πίνακας $\Phi(t_1, t_0)$ είναι ομαλός. Το γεγονός αυτό αντιφάσκει με την αρχική υπόθεση και επομένως ο $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ πρέπει να είναι ομαλός.

Ικανή συνθήκη: Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{M}(t_0, t_1)$ είναι ομαλός. Πολλαπλασιάζουμε από δεξιά αμφοτέρωτα τα μέλη της (4.2) με $\mathbf{M}^{-1}(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}_0$ και παίρνουμε

$$-\Phi(t_1, t_0)x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{B}^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) \mathbf{M}^{-1}(t_0, t_1) x_0 d\tau \quad (4.7)$$

Συγκρίνοντας την (4.4) με την (4.7), προκύπτει η είσοδος ελέγχου $\mathbf{u}(t)$ από την (4.3) που μεταφέρει την κατάσταση \mathbf{x}_0 στην $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Επομένως το σύστημα (4.1) είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Θεώρημα 4.2: Ικανή και αναγκαία συνθήκη ελεγχιμότητας για χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ελεγχιμότητα του γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος (4.1) στο χώρο κατάστασης (όπου τώρα οι $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ είναι σταθεροί πίνακες), είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

να είναι πλήρους βαθμού, δηλ. να ισχύει

$$\text{rank } \mathbf{Q}_c = n \quad (4.9)$$

Απόδειξη:

Η επίλυση της εξίσωσης κατάστασης (4.1), μας δίνει το γενικό τύπο απόκρισης κατάστασης

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.10)$$

Αν θέσουμε στην (4.10) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, τότε για κάποιο $t \neq 0$ παίρνουμε την

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^t \exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.11)$$

η οποία επιλύεται ως προς $\mathbf{u}(\tau)$ για ένα δεδομένο $\mathbf{x}(0)$, αν και μόνον αν οι γραμμές του πίνακα $\exp(-\mathbf{A}\tau)\mathbf{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σύμφωνα όμως με το Θεώρημα Cayley-Hamilton, ο εκθετικός πίνακας $\exp(-\mathbf{A}\tau)$ μπορεί να αναπτυχθεί ως συνάρτηση των όρων $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ και επομένως μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για ελεγχιμότητα του συστήματος (4.1) στο χώρο κατάστασης, είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας \mathbf{Q}_c να είναι πλήρους βαθμού.

Αν το σύστημα έχει μόνο μια είσοδο, τότε ο πίνακας $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ γίνεται μια στήλη \mathbf{b} και ο πίνακας \mathbf{Q}_c γίνεται ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, που πρέπει να είναι ομαλός για να είναι το σύστημα ελέγξιμο. Αν ο \mathbf{Q}_c δεν είναι πλήρους βαθμού, τότε η πτώση του πίνακα \mathbf{Q}_c ισούται με τον αριθμό των ιδιοτιμών ή τον αριθμό των καταστάσεων που δεν μπορούν να επηρεασθούν από τις εισόδους του συστήματος. Δεν μπορούμε όμως να διαπιστώσουμε από το παραπάνω κριτήριο ποιες είναι οι μη ελέγξιμες καταστάσεις.

Παράδειγμα 4.1.

Έστω ένα σύστημα της μορφής (4.1) όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή $\text{rank } \mathbf{Q}_c = 2 = n$, το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο. Αν τώρα θεωρήσουμε την ελεγχιμότητα ως προς κάθε είσοδο ξεχωριστά, παίρνουμε

$$\mathbf{Q}_{c1} = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{Q}_{c2} = [\mathbf{b}_2, \mathbf{Ab}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή $\text{rank } \mathbf{Q}_{c1} = 2$ και $\text{rank } \mathbf{Q}_{c2} = 1$, προκύπτει ότι το σύστημα είναι (πλήρως) ελέγξιμο από την πρώτη είσοδο ενώ δεν είναι (πλήρως) ελέγξιμο από τη δεύτερη είσοδο. Αν όμως ένα σύστημα είναι ελέγξιμο από τις εισόδους του συνολικά, τότε έχει αποδειχθεί ότι μπορεί να καθορισθεί ένας κατάλληλος γραμμικός συνδιασμός των εισόδων που να ελέγχει πλήρως το σύστημα, έστω και αν καμιά είσοδος από μόνη της δεν μπορεί να το ελέγξει.

Ένας άλλος, ισοδύναμος ορισμός της ελεγχιμότητας κατάστασης είναι η ύπαρξη κρουστικών εισόδων που να μπορούν να αλλάξουν το διάνυσμα κατάστασης από την δεδομένη τιμή $\mathbf{x}(t^-)$ σε μια επιθυμητή τυχαία τιμή $\mathbf{x}(t^+)$ [1]. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε για συστήματα μιας-είσοδου ότι και για τον ορισμό αυτό ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η ομαλότητα του πίνακα \mathbf{Q}_c . Έστω λοιπόν ότι $\mathbf{h}(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος μιας-είσοδου

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{bu}(t) \quad (4.12)$$

δηλ. $\mathbf{h}(t)$ είναι η απόκριση στην κρουστική είσοδο $u(t) = \delta(t)$ με μηδενική αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(0^-) = 0$. Λόγω της γραμμικότητας του συστήματος προκύπτει ότι η απόκριση κατάστασης στην είσοδο [1]

$$u(t) = g_1 \delta(t) + g_2 \delta^{(1)}(t) + \dots + g_k \delta^{(k-1)}(t) \quad (4.13\alpha)$$

είναι η

$$\mathbf{x}(t) = g_1 \mathbf{h}(t) + g_2 \mathbf{h}^{(1)}(t) + \dots + g_k \mathbf{h}^{(k-1)}(t) \quad (4.13\beta)$$

+ {απόκριση μηδενικής εισόδου, λόγω μη μηδενικών αρχικών συνθηκών}

Από την (4.13β) προκύπτει ότι για $t = 0^+$ έχουμε

$$\mathbf{x}(0^+) = g_1 \mathbf{h}(0^+) + g_2 \mathbf{h}^{(1)}(0^+) + \dots + g_k \mathbf{h}^{(k-1)}(0^+) + \mathbf{x}(0^-) \quad (4.14)$$

Θεωρώντας τώρα

$$u(t) = 0, t \geq 0^+$$

προκύπτει από τον ορισμό της $\mathbf{h}(t)$ ότι $\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{Ah}(t), t \geq 0^+$ και γενικά

$$\mathbf{h}^{(i+1)}(t) = \mathbf{Ah}^{(i)}(t), \quad t \geq 0^+ \quad (4.15)$$

Επιπλέον, επειδή $\mathbf{h}(0^+) = \mathbf{b}^1$, ισχύει γενικά

¹ Αν υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση $f(t)$ είναι n φορές διαφορίσιμη, τότε

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0$$

$$\mathbf{h}^{(i)}(0^+) = \mathbf{A}^i \mathbf{h}(0^+) = \mathbf{A}^i \mathbf{b}, \quad i \geq 0 \quad (4.16)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.16) στην (4.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0^+) &= \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{g}_1 \mathbf{b} + \mathbf{g}_2 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + \mathbf{g}_k \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}(0^-) + [\mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}] [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_k]^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ο ανωτέρω τύπος είναι πολύ σημαντικός επειδή δείχνει ότι μπορούν να προσδιορισθούν κατάλληλες τιμές των συντελεστών $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k$, έτσι ώστε να επιβάλλονται επιθυμητές αρχικές συνθήκες $\mathbf{x}(0^+)$ στο διάνυσμα κατάστασης σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, αν και μόνο αν ο πίνακας ελεγχιμότητας

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A} \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \quad (4.18)$$

είναι αντιστρέψιμος. Η ανωτέρω ανάλυση έγινε για συστήματα μιας-εισόδου, οπότε ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι τετραγωνικός. Μπορεί βέβαια εύκολα να επεκταθεί και σε συστήματα πολλών εισόδων, οπότε ο πίνακας ελεγχιμότητας έχει διαστάσεις $n \times mn$.

Λόγω της κρουστικής φύσης της εισόδου, η εγκατάσταση των αρχικών συνθηκών στο μαθηματικό μοντέλο γίνεται σε μηδενικό χρόνο. Στην πραγματικότητα χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές κρουστικές αποκρίσεις σε σχέση με τις σταθερές χρόνου του συστήματος που εγκαθιστούν επιθυμητές αρχικές συνθήκες σε πρακτικά μηδενικό χρόνο. Από τα ανωτέρω προκύπτει το Θεώρημα 4.3.

Θεώρημα 4.3

Η ελεγχιμότητα κατάστασης αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη δυνατότητα εγκατάστασης επιθυμητών αρχικών συνθηκών στο σύστημα (4.1).

Θεώρημα 4.4

Μια πραγμάτωση είναι ελέγξιμη αν οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη ελεγχιμότητας.

Η κανονική ελέγξιμη μορφή και η κανονική μορφή ελεγχιμότητας είναι ελέγξιμες εκ κατασκευής. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ειδικές μορφές \mathbf{A}, \mathbf{b} της κανονικής μορφής ελεγχιμότητας που ορίζονται στις (2.43), προκύπτει ότι ο πίνακας ελεγχιμότητας

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_{c0}, \mathbf{b}_{c0}) = \mathbf{I} \quad (4.19)$$

δηλ. είναι ομαλός. Τότε, όπως προκύπτει από την (4.17) έχουμε

$$[\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_k]^T = \mathbf{x}(0^+) - \mathbf{x}(0^-)$$

Επιπλέον, ο πίνακας ελεγχιμότητας της κανονικής ελέγξιμης μορφής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τους πίνακες $\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c$ που ορίζονται στις (2.40), ότι είναι

Πράγματι για $u(t)=\delta(t)$, και $\mathbf{x}(0^-)=0$ έχουμε

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{x}(t) = \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)] \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{b}$$

οπότε $\mathbf{h}(0^+)=\mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & & & 1 & a_1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.1)$$

δηλ. είναι ομαλός, καθόσον είναι άνω τριγωνικός με μοναδιαία στοιχεία στην διαγώνιο.

Αντίθετα, δεν μπορεί να προεξοφληθεί η ελεγχιμότητα της κανονικής παρατηρήσιμης μορφής και της κανονικής μορφής παρατηρησιμότητας, οι οποίες ενδέχεται να είναι ελέγξιμες ή όχι. Η ελεγχιμότητά τους πρέπει να διαπιστωθεί από την ομαλότητα των πινάκων ελεγχιμότητας.

Η απαίτηση της ελεγχιμότητας η οποία ισοδυναμεί με τη δυνατότητα εγκατάστασης επιθυμητών αρχικών συνθηκών στις μεταβλητές κατάστασης, δεν είναι τόσο σημαντική στις πραγματώσεις που προσομοιώνονται σε αναλογικό υπολογιστή, επειδή μπορούν να επιβληθούν απευθείας σε κάθε ολοκληρωτή του συστήματος. Αντίθετα, η απαίτηση της ελεγχιμότητας είναι ιδιαίτερα επιθυμητή όταν δεν υπάρχει πρόσβαση στις μεταβλητές κατάστασης. Αυτό συμβαίνει συχνά σ' ένα πραγματικό σύστημα όπου οι μεταβλητές κατάστασης δεν είναι προσβάσιμες ή ακόμη παριστάνουν κάποιες εσωτερικές μεταβλητές που περιγράφονται μαθηματικά.

Παράδειγμα 4.2.

Έστω ένα σύστημα της μορφής (4.1), όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1, \quad 1], \quad \mathbf{d} = 0$$

Έχουμε λοιπόν

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad x_1(0) = x_{10}$$

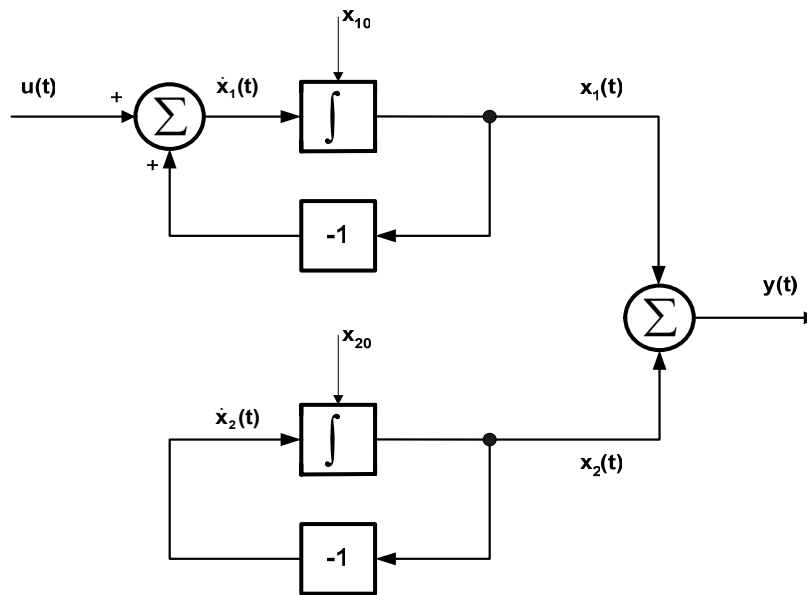
$$\dot{x}_2 = -x_2, \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$y = x_1 + x_2$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η κατάσταση x_2 δεν συνδέεται με την είσοδο u , αλλά ούτε με την άλλη κατάσταση x_1 . Είναι φυσικό λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η κατάσταση x_2 δεν είναι ελέγξιμη από την είσοδο και επομένως το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο. Το γεγονός αυτό μπορεί εύκολα να επαληθευθεί από το γεγονός ότι ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. δεν είναι ομαλός. Μια πραγμάτωση του συστήματος αυτού, που δεν είναι βέβαια ελέγξιμη, φαίνεται στο Σχ. 4.1.



Σχήμα 4.1. Μια μη ελέγξιμη πραγμάτωση του συστήματος του Παραδείγματος 4.2.

4.3. Παρατηρησιμότητα κατάστασης

Ένα σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις του χώρου κατάστασης της μορφής (4.1) είναι παρατηρήσιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$, όπου t_1 είναι ένας πεπερασμένος χρόνος, αν δεδομένων των εισόδων $\mathbf{u}(t)$ και των εξόδων $\mathbf{y}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$, μπορεί να υπολογισθεί το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Το πρόβλημα υπολογισμού των καταστάσεων εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις, όπως για διαγνωστικούς σκοπούς ή για σκοπούς ελέγχου.

Ορισμός 4.3

Η κατάσταση $\mathbf{x}_i(t) \neq 0$ του συστήματος (4.1) είναι παρατηρήσιμη στο διάστημα $[t_0, t_1]$, όπου t_1 είναι ένας πεπερασμένος χρόνος, αν δεδομένων των εισόδων $\mathbf{u}(t)$ και των εξόδων $\mathbf{y}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$, μπορεί να υπολογισθεί το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}_i(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Αλλιώς, η κατάσταση $\mathbf{x}_i(t)$ ονομάζεται μη παρατηρήσιμη.

Ορισμός 4.4

Ένα σύστημα είναι παρατηρήσιμο ή **πλήρως παρατηρήσιμο** (*completely observable*) στο διάστημα $[t_0, t_1]$, αν όλες οι καταστάσεις του είναι παρατηρήσιμες.

Δεδομένων των $\mathbf{x}_0, \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ και $\mathbf{u}(t), t \in [t_0, t_1]$, το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}(t)$ υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.21)$$

Επομένως προκύπτει ότι για τον προσδιορισμό όλης της τροχιάς $\mathbf{x}(t), t \in [t_0, t_1]$ αρκεί η γνώση της αρχικής κατάστασης $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Το πρόβλημα της παρατηρησιμότητας ανάγεται λοιπόν στον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, δεδομένων των εισόδων $\mathbf{u}(t)$ και των εξόδων $\mathbf{y}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Από την ανωτέρω συζήτηση προκύπτει το Θεώρημα 4.5.

Θεώρημα 4.5

Η παρατηρησιμότητα κατάστασης στο σύστημα (4.1) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον προσδιορισμό της αρχικής κατάστασης $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, δεδομένων των εισόδων $\mathbf{u}(t)$ και των εξόδων $\mathbf{y}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ από τις εισόδους $\mathbf{u}(t)$ και τις εξόδους $\mathbf{y}(t)$. Για το σκοπό αυτό γράφουμε την απόκριση εξόδου του συστήματος (βλ. (2.169))

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad \text{για } t \geq 0 \quad (4.22)$$

Η απόκριση κατάστασης μηδενικής κατάστασης είναι εκείνο το τμήμα του διανύσματος κατάστασης που οφείλεται μόνο στην είσοδο $\mathbf{u}(t)$ και δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{x}_{zs}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (4.23)$$

Για τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα η απόκριση $\mathbf{x}_{zs}(t)$ γίνεται

$$\mathbf{x}_{zs}(t) = \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)] \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

Επειδή το τμήμα $\mathbf{x}_{zs}(t)$ του $\mathbf{x}(t)$ υπολογίζεται απευθείας χωρίς περιορισμούς, μπορούμε στην προσπάθεια υπολογισμού της συνθήκης παρατηρησιμότητας να θεωρήσουμε $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$. Για $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ από την (4.22) απομένει η απόκριση εξόδου μηδενικής εισόδου που είναι

$$\mathbf{y}_{zi}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{\Phi}(t, t_0) \mathbf{x}_0 \quad (4.25)$$

η οποία για τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα γίνεται

$$\mathbf{y}_{zi}(t) = \mathbf{C} \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{x}(0) \quad (4.26)$$

Το πρόβλημα της παρατηρησιμότητας ανάγεται λοιπόν στην επίλυση της (4.25) ή της (4.26) ως προς $\mathbf{x}(t_0)$.

Θεώρημα 4.6: Ικανή και αναγκαία συνθήκη παρατηρησιμότητας

Το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, & t &\geq t_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

είναι πλήρως παρατηρήσιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$, αν και μόνον αν οι στήλες του πίνακα $\mathbf{C}(t) \mathbf{\Phi}(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[t_0, t_1]$, όπου $\mathbf{\Phi}(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος, ή ισοδύναμα, αν και μόνον αν ο πίνακας [3]

$$\mathbf{N}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^*(t, t_0) \mathbf{C}^*(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{\Phi}(t, t_0) dt \quad (4.28)$$

είναι ομαλός. Με "*" συμβολίζεται ο ανάστροφος συζυγής πίνακας, ο οποίος για πραγματικούς πίνακες είναι απλώς ο ανάστροφος πίνακας. Επιπλέον η αρχική κατάσταση προσδιορίζεται από την

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{N}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^*(t, t_0) \mathbf{C}^*(t) \mathbf{y}_{zi}(t) dt \quad (4.29)$$

Απόδειξη:

Καταρχήν θα δείξουμε η (4.28) συνεπάγεται την (4.29) και στη συνέχεια θα αποδείξουμε την (4.28). Αν

πολλαπλασιάσουμε την (4.28) από δεξιά με \mathbf{x} , τότε η (4.28) μπορεί να επιλυθεί ως προς \mathbf{x} , με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $\mathbf{N}(t_0, t_1)$ είναι ομαλός. Η επίλυση δίνει την (4.29), λαμβάνοντας υπόψη την (4.25).

Αναγκαία συνθήκη: Η απόδειξη θα γίνει με την εις άτοπον απαγωγή. Υποθέτουμε ότι το σύστημα (4.27) είναι πλήρως παρατηρήσιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$ αλλά ο $\mathbf{N}(t_0, t_1)$ είναι ανώμαλος. Τότε προκύπτει από την (4.25) ότι

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}_{zi}^*(t) \mathbf{y}_{zi}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}_0^* \Phi^*(t, t_0) \mathbf{C}^*(t) \mathbf{C}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 dt = \mathbf{x}_0^* \mathbf{N}(t_0, t_1) \mathbf{x}_0 \quad (4.30)$$

Επειδή ο $\mathbf{N}(t_0, t_1)$ είναι ανώμαλος, υπάρχει μία αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$, τέτοια ώστε η τετραγωνική μορφή στο δεξιό μέλος της (4.30) να είναι μηδέν, οπότε και $\mathbf{y}_{zi}(t) = 0$ για $t \in [t_0, t_1]$. Επομένως ένα τέτοιο \mathbf{x}_0 δεν μπορεί να προσδιορισθεί, πράγμα που αντίκειται στην αρχική υπόθεση της πλήρους παρατηρησιμότητας. Συνεπώς ο $\mathbf{N}(t_0, t_1)$ πρέπει να είναι ομαλός.

Ικανή συνθήκη: Πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της (4.25) με $\Phi^*(t, t_0) \mathbf{C}^*(t)$ και ολοκληρώνουμε από t_0 μέχρι t_1 και παίρνουμε

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t, t_0) \mathbf{C}^*(t) \mathbf{y}(t) dt = \mathbf{N}(t_0, t_1) \mathbf{x}_0 \quad (4.31)$$

Αν ο $\mathbf{N}(t_0, t_1)$ είναι ομαλός, τότε μπορεί να προσδιορισθεί το \mathbf{x}_0 από την (4.31) και δίνεται από την (4.28).

Θεώρημα 4.7: Ικανή και αναγκαία συνθήκη παρατηρησιμότητας για χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την παρατηρησιμότητα του συστήματος (4.27) στο χώρο κατάστασης με σταθερούς πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{C} , είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.32)$$

να είναι πλήρους βαθμού, δηλ. να ισχύει

$$\text{rank } \mathbf{Q}_0 = n \quad (4.33)$$

Απόδειξη:

Για τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα ο θεμελιώδης πίνακας είναι $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$. Προκύπτει από το

Θεώρημα 4.6 ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη της πλήρους παρατηρησιμότητας είναι η γραμμική ανεξαρτησία των στηλών του πίνακα $\mathbf{C}\Phi(t) = \mathbf{C}\exp(\mathbf{A}t)$. Αναπτύσσοντας την $\exp(\mathbf{A}t)$ σε σειρά Taylor και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cayley-Hamilton, προκύπτει ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για παρατηρησιμότητα είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ να είναι πλήρους βαθμού, δηλ. να ισχύει η (4.33).

Θεώρημα 4.8

Μια πραγμάτωση είναι παρατηρήσιμη αν οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι τέτοιοι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη παρατηρησιμότητας.

Αν το σύστημα έχει μόνο μια έξοδο, τότε ο πίνακας \mathbf{C} γίνεται μια γραμμή και ο πίνακας \mathbf{Q}_0 γίνεται ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας που πρέπει να είναι ομαλός για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο. Αν ο \mathbf{Q}_0 δεν είναι πλήρους βαθμού, τότε η πτώση του πίνακα \mathbf{Q}_0 ισούται με τον αριθμό των ιδιοτιμών ή τον αριθμό των καταστάσεων που δεν μπορούν να παρατηρηθούν. Το παραπάνω κριτήριο όμως δεν μπορεί να εντοπίσει τις μη παρατηρήσιμες καταστάσεις.

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού της συνθήκης παρατηρησιμότητας βασίζεται στην επαναληπτική χρήση των εξισώσεων κατάστασης για την παρατήρηση του αρχικού διανύσματος κατάστασης. Για ευκολία χρησιμοποιείται το μοντέλο του χώρου κατάστασης μιας-εισόδου, μιας εξόδου της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \quad (4.34)$$

από όπου με συνεχείς παραγωγίσεις προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{b}u(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{c}\mathbf{b}\dot{u}(t) \\ &= \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b}u(t) + \mathbf{c}\mathbf{b}\dot{u}(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t) &= \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}u(t) + \dots + \mathbf{c}\mathbf{b}u^{(n-2)}(t) \end{aligned}$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}\mathbf{U}(t) \quad (4.35)$$

όπου

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \\ \mathbf{cb} & \mathbf{0} & & & & \\ \mathbf{cAb} & \mathbf{cb} & \mathbf{0} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{cA}^{n-3_b} & \mathbf{cA}^{n-4} & \mathbf{cA}^{n-5_b} & \dots & \mathbf{0} & \\ \mathbf{cA}^{n-2_b} & \mathbf{cA}^{n-3_b} & \mathbf{cA}^{n-4_b} & \dots & \mathbf{cb} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

και

$$Q_0(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}^T]^T \quad (4.38)$$

Υποθέτοντας ότι $\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}$, προκύπτει ότι για $t = 0$, έχουμε

$$\mathbf{Y}(0) = Q_0 \mathbf{x}(0) \quad (4.39)$$

από όπου φαίνεται ότι το $\mathbf{x}(0)$ μπορεί να υπολογισθεί αν και μόνο αν, ο πίνακας ελεγχιμότητας Q_0 είναι ομαλός. Από την (4.39) προκύπτει ότι το πρόβλημα της παρατηρησιμότητας κατάστασης μπορεί να αναχθεί στον προσδιορισμό κατάλληλων αρχικών συνθηκών των μεταβλητών κατάστασης $\mathbf{x}_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, με δεδομένες τις αρχικές συνθήκες του διανύσματος εξόδου $\{\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(0)\}$. Η ανωτέρω ανάλυση επεκτείνεται εύκολα σε συστήματα πολλών εξόδων, οπότε προκύπτει ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον υπολογισμό του $\mathbf{x}(0)$ είναι ο $n \times n$ πίνακας Q_0 να είναι πλήρους βαθμού.

Αν ο Q_0 δεν είναι πλήρους βαθμού, τότε μπορεί να βρεθεί μια λύση για το $\mathbf{x}(0)$ μόνο για ειδικές μορφές του $\mathbf{Y}(0)$ και συγκεκριμένα για εκείνες που βρίσκονται στο χώρο των στηλών του Q_0 . Γενικά βέβαια σε μια διαφορική εξίσωση είναι πολύ σημαντικό να έχουμε πλήρη ελευθερία στην εκλογή των αρχικών συνθηκών, επειδή τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε πλήρως παρατηρήσιμες πραγματώσεις.

Εξάλλου, για τον προσδιορισμό όλης της τροχιάς $\mathbf{x}(t)$, $t \in [0, t_1]$ από την (4.35), όπως επιτάσσει και ο ορισμός της παρατηρησιμότητας, γράφουμε

$$Q_0 \mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{P}\mathbf{U}(t) \quad (4.40)$$

Στη διατύπωση αυτή του προβλήματος θεωρούμε ότι γνωρίζουμε την πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, την είσοδο $\mathbf{u}(t)$, και παίρνουμε την έξοδο $\mathbf{y}(t)$, υποθέτοντας ότι δεν υπεισέρχονται σφάλματα μετρήσεων. Για να επιλυθεί η (4.40) ως προς $\mathbf{x}(t)$, πρέπει η στήλη $\mathbf{Y}(t) - \mathbf{P}\mathbf{U}(t)$ να βρίσκεται στο χώρο των στηλών του Q_0 . Όμως, η (4.40) ισχύει εκ κατασκευής της επειδή βασίζεται στις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος και επομένως υπάρχει μια λύση ως προς $\mathbf{x}(t)$. Όταν ο Q_0 είναι πλήρους βαθμού, τότε ο χώρος των στηλών του είναι ο n -διάστατος γραμμικός χώρος R και επομένως η στήλη $\mathbf{Y}(t) - \mathbf{P}\mathbf{U}(t)$ βρίσκεται πάντα στο R . Αν ο Q_0 δεν είναι πλήρους βαθμού, τότε έχει ένα μη εκφυλισμένο μηδενικό χώρο που αποτελείται από τα μη μηδενικά διανύσματα θ , τέτοια ώστε [1]

$$Q_0(\mathbf{A}, \mathbf{c})\theta = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα θ αποτελεί επίσης μια λύση που προστίθεται στη λύση της (4.40) και οδηγεί έτσι σε μια απειρία λύσεων.

Μια ποσοτική ανάλυση των ανωτέρω για την περίπτωση που ο Q_0 δεν είναι πλήρους βαθμού, δίνεται στη συνέχεια. Πράγματι, βρίσκεται ένας $n \times n$ ομαλός πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} του διανύσματος

κατάστασης, δηλ.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.42)$$

τέτοιος ώστε

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{T} = \left[\underbrace{\mathbf{Q}_{01}}_{n_1} \mid \underbrace{\mathbf{0}}_{n_2} \right] \quad (4.43)$$

όπου $n_1 = \text{rank } \mathbf{Q}_0$ και $n_2 = \text{null } \mathbf{Q}_0$. Αν αντικαταστήσουμε την (4.42) στην (4.42) και παίρνουμε υπόψη την (4.43), προκύπτει ότι

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(t) = (\mathbf{Q}_0\mathbf{T}) \hat{\mathbf{x}}(t) = \left[\mathbf{Q}_{01} \mid \mathbf{0} \right] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1(t) \\ \hat{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\mathbf{Q}_{01} \hat{\mathbf{x}}_1(t) + \mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2(t) \right] = \mathbf{Y}(t) - \mathbf{TX}(t) \quad (4.44)$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}_1(t) \in \mathcal{R}^{n_1}$, $\hat{\mathbf{x}}_2(t) \in \mathcal{R}^{n_2}$ αντίστοιχα. Από την (4.44) φαίνεται ότι το $\hat{\mathbf{x}}_2(t)$ δεν λαμβάνεται υπόψη στην επίλυση και επομένως μπορεί να είναι το οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα στον χώρο \mathcal{R}^{n_2} . Αντίθετα, το $\mathbf{x}_1(t)$ ορίζεται μονοσήμαντα, επειδή ο \mathbf{Q}_{01} είναι πλήρους βαθμού. Φαίνεται λοιπόν ότι υπάρχει μια n_2 -απειρία λύσεων στο πρόβλημα παρατήρησης των καταστάσεων. Η μη μοναδικότητα της λύσης είναι απαράδεκτη επειδή κάθε φυσικό σύστημα έχει μια μοναδική λύση. Επιπλέον, ο προσδιορισμός της κλάσης των δυνατών λύσεων δεν είναι χρήσιμος επειδή δεν παρέχει πληροφορία για τον καθορισμό του διανύσματος κατάστασης στο υπό εξέταση χρονικό διάστημα. Εξάλλου η χρησιμοποίηση των διαφορίσεων ανωτέρων τάξεων $\mathbf{y}^{(n)}(t)$, $\mathbf{y}^{(n+1)}(t), \dots$ δεν προσφέρει επιπλέον πληροφορία επειδή τότε θα εμπλακούν και οι παράγοντες \mathbf{cA}^n , \mathbf{cA}^{n+1}, \dots , που είναι γραμμικές συναρτήσεις των \mathbf{c} , \mathbf{cA} , ..., \mathbf{cA}^{n-1} , σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley- Hamilton. Η φυσική σημασία του γεγονότος αυτού είναι η αδυναμία προσδιορισμού του $\mathbf{x}(t)$ από τη γνώση του $\mathbf{y}(t)$ στην περιοχή του t (η οποία εξασφαλίζεται από τη γνώση όλων των παραγώγων του $\mathbf{y}(t)$ στην ανάπτυξη σε σειρά Taylor).

Γενικά, η παρατηρησιμότητα κάθε πραγμάτωσης εξαρτάται από το αν οι πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{c} ικανοποιούν τη συνθήκη παρατηρησιμότητας (4.33). Η κανονική παρατηρήσιμη μορφή (Σχ.2.11) και η κανονική μορφή παρατηρησιμότητας (Σχ. 2.14) είναι βέβαια παρατηρήσιμες εκ κατασκευής. Οι ειδικές μορφές των πινάκων \mathbf{A}_{0b} , \mathbf{c}_{0b} της κανονικής μορφής παρατηρησιμότητας είναι

$$\mathbf{A}_{0b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{0b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

όπως προκύπτει από το συνδυασμό των (2.46) και (2.43).

Χρησιμοποιώντας τους πίνακες \mathbf{A}_{0b} , \mathbf{c}_{0b} , υπολογίζεται απευθείας ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας της κανονικής μορφής παρατηρησιμότητας είναι

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0 (\mathbf{A}_{0b}, \mathbf{c}_{0b}) = \mathbf{I} \quad (4.46)$$

δηλ. είναι ομαλός. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει από την (4.39) ότι $\mathbf{x}(0) = \mathbf{Y}(0)$ για $\mathbf{U}(0) = \mathbf{0}$.

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας της κανονικής παρατηρήσιμης μορφής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας

τους πίνακες $\mathbf{A}_0, \mathbf{c}_0$ από τις (2.41), ότι είναι

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_0, \mathbf{c}_0) = \mathbf{Q}^{-1} \quad (4.47\alpha)$$

όπου \mathbf{Q} είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας Toeplitz της μορφής

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ a_1 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & & & \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & \ddots & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 & \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{Q} \neq 0 \quad (4.47\beta)$$

Εξάλλου, η παρατηρησιμότητα της κανονικής ελέγξιμης μορφής και της κανονικής μορφής ελεγχιμότητας δεν μπορεί να διαπιστωθεί από τις πραγματώσεις που φαίνονται στα Σχ. 2.9 και Σχ.2.13 αντίστοιχα. Αν υπολογίσουμε τους πίνακες παρατηρησιμότητας των ανωτέρω πραγματώσεων φαίνεται ότι ενδέχεται να είναι ή και να μην είναι αντιστρέψιμοι.

Δυαδικότητα

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυαδικότητας μεταξύ των ελέγξιμων και παρατηρήσιμων μορφών, στην οποία ήδη αναφερθήκαμε, μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ είναι παρατηρήσιμη (ελέγξιμη) αν και μόνον αν, η δυαδική πραγμάτωση $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\}$ είναι ελέγξιμη (παρατηρήσιμη). Η ελεγχιμότητα συνδέει τις καταστάσεις με τις εισόδους, ενώ η παρατηρησιμότητα συνδέει τις καταστάσεις με τις εξόδους. Υπενθυμίζεται από το Κεφάλαιο 2 ότι γενικά, για κάθε δεδομένη πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{D}\}$, υπάρχει μία δυαδική πραγμάτωση $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{D}^T\}$,

Τα θεωρήματα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας συνδέονται με την έννοια της δυαδικότητας, η οποία εισήχθη από τον Kalman [4].

Θεώρημα 4.9: Θεώρημα δυαδικότητας

Το γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα $S = \{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$ είναι πλήρως ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) στο διάστημα $[t_0, t_1]$, αν και μόνον αν το δυαδικό σύστημα $\bar{S} = \{-\mathbf{A}^*(t), \mathbf{C}^*(t), \mathbf{B}^*(t), \mathbf{D}(t)^*\}$ στο διάστημα $[t_0, t_0]$.

Απόδειξη:

Αν $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος S , τότε $\bar{\Phi}(t) = [\Phi^{-1}(t)]^*$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος \bar{S} , επειδή [3]

$$\frac{d}{dt} [\Phi^{-1}(t)]^* = -\mathbf{A}^T [\Phi^{-1}(t)]^* \quad (4.48)$$

το σύστημα S είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$, αν και μόνον αν οι γραμμές του πίνακα $\Phi^{-1}(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0, t_1]$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, το σύστημα S είναι πλήρως ελέγξιμο στο διάστημα $[t_0, t_1]$ αν και μόνον αν οι γραμμές του πίνακα $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο διάστημα $[t_0, t_1]$. Επιπλέον, $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)$

$= \Phi^*(t)\mathbf{B}(t)$, δηλ. οι γραμμές του $\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)$ είναι οι στήλες του $[\Phi^{-1}(t)\mathbf{B}(t)] = \mathbf{B}^*(t)\bar{\Phi}(t)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6 προκύπτει ότι το σύστημα \bar{S} είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Το αντίθετο συνάγεται με παρόμοια επιχειρήματα.

Λήμμα 4.1

Θεωρούμε τις αλγεβρικά ισοδύναμες παραστάσεις $S = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ και $\hat{S} = \{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}\}$ ενός συστήματος (βλ. Παραγρ. 2.5.5). Το σύστημα S είναι πλήρως ελέγξιμο, αν και μόνον αν σύστημα \hat{S} είναι πλήρως ελέγξιμο και το σύστημα S είναι παρατηρήσιμο, αν και μόνον αν σύστημα \hat{S} είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη:

Επειδή τα συστήματα S και \hat{S} είναι αλγεβρικά ισοδύναμα, υπάρχει ένας ομαλός πίνακας μετασχηματισμού κατάστασης \mathbf{T} , τέτοιος ώστε

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (4.49)$$

Ο πίνακας ελεγχιμότητας του συστήματος S είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \\ &= [\mathbf{T}\hat{\mathbf{B}} \quad (\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1})\mathbf{T}\hat{\mathbf{B}} \quad (\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1})^2\mathbf{T}\hat{\mathbf{B}} \quad \dots \quad (\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1})^{n-1}\mathbf{T}\hat{\mathbf{B}}] \\ &= [\mathbf{T}\hat{\mathbf{B}} \quad \mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \mathbf{T}\hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}] = \mathbf{T}\hat{\mathbf{Q}}_c \end{aligned} \quad (4.50)$$

όπου $\hat{\mathbf{Q}}_c$ είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας του συστήματος \hat{S} . Επειδή ο \mathbf{T} είναι ομαλός, ο \mathbf{Q}_c είναι πλήρους βαθμού αν και μόνον αν ο $\hat{\mathbf{Q}}_c$ είναι πλήρους βαθμού. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 το σύστημα S είναι πλήρως ελέγξιμο, αν και μόνον αν σύστημα \hat{S} είναι πλήρως ελέγξιμο. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{T}}^{-1}$

Λήμμα 4.2

Στην περίπτωση των χρονικών αμετάβλητων συστημάτων ισχύει

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{Q}_0^T(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T) \quad (4.51\alpha)$$

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathbf{Q}_c^T(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T) \quad (4.51\beta)$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη των (4.51) προκύπτει απευθείας από τη σύγκριση των (4.8) και (4.32). Η (4.51α) λέει ότι ένα ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ είναι ελέγξιμο αν και μόνον αν το ζεύγος $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T\}$ είναι παρατηρήσιμο. Η (4.51β) λέει ότι ένα ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$ είναι παρατηρήσιμο αν και μόνον αν το ζεύγος $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T\}$ είναι ελέγξιμο. Ακόμη, ο συνδυασμός των (4.51α) και (4.51β) σημαίνει ότι το σύστημα $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο αν και μόνον αν το σύστημα $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\}$ είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Πράγματι, προκύπτει από το Θεώρημα 4.9 ότι το σύστημα $S = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ είναι δυαδικό με το σύστημα $\bar{S} = \{-\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\}$ και επομένως και με το σύστημα $\bar{S}_1 = \{\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T\}$, καθόσον η αλλαγή του προσήμου του \mathbf{A} δεν επηρεάζει τις ιδιότητες

ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας.

Παράδειγμα 4.3

Έστω ένα σύστημα της μορφής (4.1) όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{d} = 0$$

Έχουμε λοιπόν

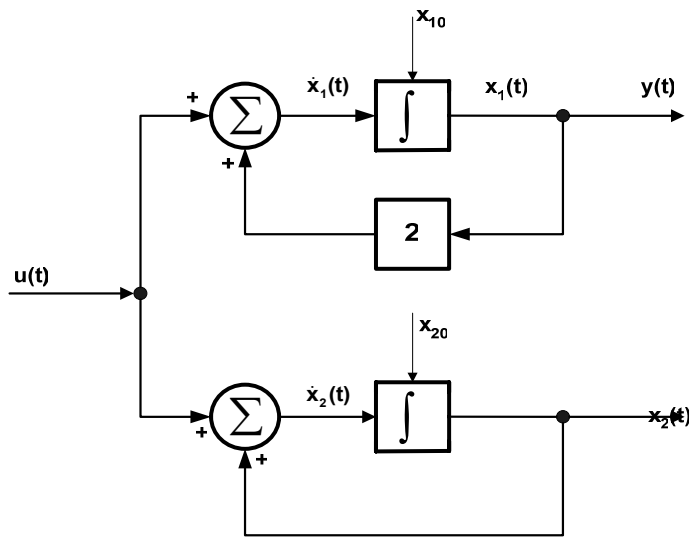
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + u(t), & x_1(0) &= x_1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t), & x_2(0) &= x_2 \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος εξαρτάται μόνο από την κατάσταση $x_1(t)$, ενώ επίσης η $x_1(t)$ είναι εντελώς ανεξάρτητη από την $x_2(t)$. Αυτό σημαίνει ότι η γνώση των $\mathbf{u}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$, στο διάστημα $t \in [0, t_1]$ είναι αρκετή για τον προσδιορισμό της αρχικής συνθήκης $x_1(0)$, όχι όμως και της $x_2(0)$. Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 4.5, η κατάσταση $x_2(t)$ δεν είναι παρατηρήσιμη και σύμφωνα με τον Ορισμό 4.4, το σύστημα δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Η μη παρατηρησιμότητα της δοθείσας πραγμάτωσης προκύπτει και απευθείας από το γεγονός ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι ομαλός. Ακολουθώντας την ανάλυση που περιγράφεται από τις (4.41)-(4.44), βλέπουμε ότι ο \mathbf{Q}_0 βρίσκεται στη μορφή $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{Q}_{01} \quad | \quad \mathbf{0}]$, οπότε $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ (δεν χρειάζεται μετασχηματισμός) και προκύπτει ότι η κατάσταση $x_2(t)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε, οπότε δεν μπορεί να παρατηρηθεί. Μια πραγμάτωση του ανωτέρω συστήματος, η οποία δεν είναι βέβαια παρατηρήσιμη, φαίνεται στο Σχ. 4.2.



Σχήμα 4.2. Μια μη παρατηρήσιμη πραγμάτωση του συστήματος του παραδείγματος 4.3.

Στη συνέχεια παρατίθεται το πρόγραμμα CONOBS που υπολογίζει την ελγξιμότητα και παρατηρησιμότητα των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων πολλών εισόδων, πολλών εξόδων συστημάτων [3].

```

8 "CONOBS"
10  PROGRAM NAME: "CONOBS" PROG
20  INPUT "Give your PRINT option: For CRT input 1; for LINE PRINTER
      input 2",
30  IF (Pr=1) OR (Pr=2) THEN 50
40  GO TO 20
50  IF Pr = 1 THEN PRINTER IS 16
60  IF Pr = 2 THEN PRINTER IS 7,1
70  PRINT "CONOBS DETERMINES WHETHER A MULTIVARIABLE LINEAR TIME-
      INVARIANT"
80  PRINT "CONTINUOUS-TIME SYSTEM dx/dt = Ax+Bu, y = Cx+Du OR DISCRETE-
      TIME SYSTEM"
90  PRINT "x(k)=Ax(k)+Bu(k), y(k)=Cx(k)+DU(k) IS COMPLETELY
      CONTROLLABLE OR"
100 PRINT "OBSERVABLE"; LIN(1)
110 PRINT "Matrix dimensional are: A:NxN, B:NxM, C:LxN, D:LxM"
120 PRINT "Matrix D does not influence system controllability or observability. LIN(2)
130 INPUT "Have SUB's <<Mat>>, <<Rank>>, <<Cont>> & <<Obs>> already been LINKED Y/N)?", CS
140 IF CS = "Y" THEN 210

```

```
150 IF C$ = "N" THEN 170 160 GOTO 130
170 LINK "Mat", 1000, 180 180 LINK "Rank", 2100, 190 190 LINK "Cont", 3500, 200 200 LINK
"Obs", 4000, 210
210 INPUT "Give matrix dimensions N, M, L (M <= N, L <= N):", N,M,L 220 PRINT "Matrix
dimensions: N=";N;" M=";M;" L=";L; LIN(2)
230 Nc = (N-M+1)*M
240 No = (N-L+1)*L
250 CALL
C(N,M,L,Nc,No) 260
PRINTER IS 16
270 END
280 SUB
C(N,M,L,Nc,No)
290 OPTION BASE 1
300 DIM A(N,N), B(N,M), C(L,N), Qc(N,Nc),Qo(No,N) 310 CALL
Mat(A(*), N,N, "A")
320 CALL Mat(B(*), N,M,"B") 330 CALL Mat(C(*)),L,N,"C")
340 ! Construct the CONTROLLABILITY matrix:
350 CALL Cont(A(*),B(*),N,M,Qc(*))
360 PRINT "CONTROLLABILITY Matrix Qc = ", LIN(1)
370 FLOAT 4
380 MAT PRINT Qc
390 ! Consstruct the OBSERVABILITY matrix:
400 CALL Obs(A(*),C(*),N,L, Qo(*))
410 PRINT LIN(2), "OBSERVABILITY Matrix Qo = ", LIN(1) 420 FLOAT
4
430 MAT PRINT Qo
440 CALL Rank (Qc(*),N,Nc,Rc)
450 CALL Rank (Qo(*); No,N,Ro)
460 IF Rc<N THEN 510
470 PRINT "The system IS completely controllable".
480 FIXED 0
490 PRINT "The controllability matrix has rank";Rc;"=N"; LIN(1) 500 GOTO 540
510 PRINT "The system IS NOT completely controllable"
520 FIXED 0
530 PRINT "The controllability matrix has rank"; Rc; LIN(1)
540 IF Ro<N THEN 610
550 FLOAT 4
560 PRINT "The system IS completely obsrvable".
570 FIXED 0
580 PRINT "The observability matrix has rank";Ro;"=N"
590 GOTO 640
600 FLOAT 4
610 PRINT "The system IS NOT completely observable"
620 FIXED 0
630 PRINT "The observability matrix has rank";Ro
640 SUBEND
```

4.4. Εφαρμογές σε πραγματικά συστήματα

Στη παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε δύο παραδείγματα που διευκρινίζουν την εφαρμογή των εννοιών της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας σε πραγματικά συστήματα.

Παράδειγμα 4.4. Καρότσι με αντεστραμμένο εκκρεμές

Έστω ένα καρότσι με μάζα M πάνω στο οποίο υπάρχουν δύο αντεστραμμένα εκκρεμή με μήκη l_1 , l_2 και μάζα m αμφότερα. Για μικρές γωνίες $|\theta_1|, |\theta_2|$ οι εξισώσεις κίνησης είναι [1]

$$M\dot{v} = -mg\theta_1 + u$$

$$m(\dot{v} + l_i\ddot{\theta}_i) = mg\theta_i, \quad i = 1, 2,$$

όπου v είναι η ταχύτητα κίνησης του καροτσιού και u η εξωτερική δύναμη που επιδρά στο καρότσι (Σχ. 4.3).

Τίθενται τα ερωτήματα:

- (i) Είναι δυνατός πάντοτε ο έλεγχος αμφοτέρων των εκκρεμών, ώστε να είναι κατακόρυφα;
- (ii) Είναι το σύστημα παρατηρήσιμο, θεωρώντας ως έξοδο την $y = \theta_1$;

Για να απαντήσουμε στα ανωτέρω ερωτήματα, γράφουμε καταρχήν τις εξισώσεις του συστήματος στο μοντέλο του χώρου κατάστασης, χρησιμοποιώντας ως μεταβλητές κατάστασης τις γωνίες και τις παραγώγους τους, δηλ.

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \theta_2, \quad \dot{x}_3 = \dot{\theta}_1, \quad \dot{x}_4 = \dot{\theta}_2$$

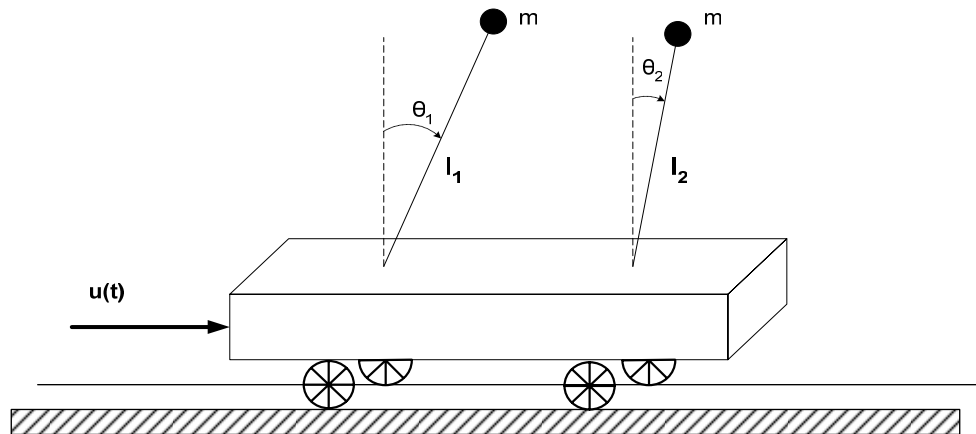
Μετά την απαλοιφή της \dot{v} , το σύστημα περιγράφεται από το μοντέλο του χώρου κατάστασης μιας-εισόδου, μιας-εξόδου (4.34), με πίνακες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_1 \\ 1/l_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$a_1 = \frac{(M+m)g}{Ml_1}, \quad a_2 = \frac{mg}{Ml_1}$$

$$a_3 = \frac{mg}{Ml_2}, \quad a_4 = \frac{(M+m)g}{Ml_2}$$



Σχήμα 4.3. Το καρότσι με τα αντεστραμμένα εκκρεμή του παραδείγματος 4.4.

Για να κρατήσουμε τα εκκρεμή στην κατακόρυφη θέση, όπου $\theta_1 = \theta_2 = 0$, πρέπει το σύστημα να είναι ελέγξιμο από την είσοδο u . Υπολογίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα ελεγχιμότητας $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ είναι

$$\det \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2pq}{l_1 l_2} - \frac{q^2}{l_1^2} - \frac{p^2}{l_2^2} \right]$$

όπου

$$p = \frac{1}{M} \left[\frac{a_1}{l_1} + \frac{a_2}{l_2} \right], \quad q = \frac{1}{M} \left[\frac{a_3}{l_1} + \frac{a_4}{l_2} \right]$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ ομαλός είναι να ισχύει

$$\det \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq 0$$

Μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει ότι η ανωτέρω συνθήκη ανάγεται στην

$$2l_1^2 l_2 p q - q^2 l_2^2 - p^2 l_1^2 \neq 0$$

ή

$$l_1 \neq l_2$$

Όταν λοιπόν $l_1 \neq l_2$, τότε υπάρχει κατάλληλη είσοδος $u(t)$ ώστε $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Για την απάντηση του δεύτερου ερωτήματος ελέγχουμε τη συνθήκη παρατηρησιμότητας ως προς $y = \theta_1$. Έχουμε

$$\det \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = -a_2^2 = -\left[\frac{mg}{Ml_1} \right]^2 \neq 0$$

οπότε το σύστημα είναι πάντοτε παρατηρήσιμο, χωρίς περιορισμούς.

Παράδειγμα 4.5. Η δυναμική ενός αερόστατου

Οι προσεγγιστικές εξισώσεις ενός αερόστατου (Σχ. 4.4) είναι

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{1}{\tau_1}\theta + u \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau_2}v + a\theta + \frac{1}{\tau_2}w \\ \dot{h} &= v\end{aligned}$$

όπου θ είναι η μεταβολή της θερμοκρασίας του αερόστατου μακριά από τη θερμοκρασία ισορροπίας, u είναι μια μεταβλητή που παριστάνει τη μεταβολή θερμότητας που προστίθεται στο αέρα του αερόστατου, v είναι η κατακόρυφη ταχύτητα, h είναι η μεταβολή ύψους από το ύψος ισορροπίας και w είναι η κατακόρυφη ταχύτητα του ανέμου που αποτελεί μια διαταραχή στο σύστημα.

Τίθενται τα παρακάτω ερωτήματα [1]:

- (i) (Μπορεί η μεταβολή της θερμοκρασίας $\theta(\cdot)$ και η σταθερή ταχύτητα ανέμου w να παρατηρηθούν από τη συνεχή μέτρηση της μεταβολής του ύψους $h(\cdot)$;
- (ii) Να υπολογισθεί η συνάρτηση μεταφοράς από το u στο h και από το w στο h . Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο από την είσοδο $u(\cdot)$ ή από την είσοδο διαταραχής w ;

Οι εξισώσεις του συστήματος βρίσκονται ήδη σε μια μορφή του μοντέλου του χώρου κατάστασης, επειδή στο αριστερό μέλος κάθε εξίσωσης έχουμε πρώτες παραγώγους, ενώ στο δεξιό μέλος δεν έχουμε καθόλου παραγώγους. Επιπλέον, πρέπει να προστεθεί ως μία τετάρτη μεταβλητή κατάστασης η ταχύτητα του ανέμου w , ώστε να μπορούμε να διαπιστώσουμε αν η σταθερή ποσότητα w μπορεί να ελεγχθεί από την έξοδο h . Η αντίστοιχη εξίσωση κατάστασης είναι η

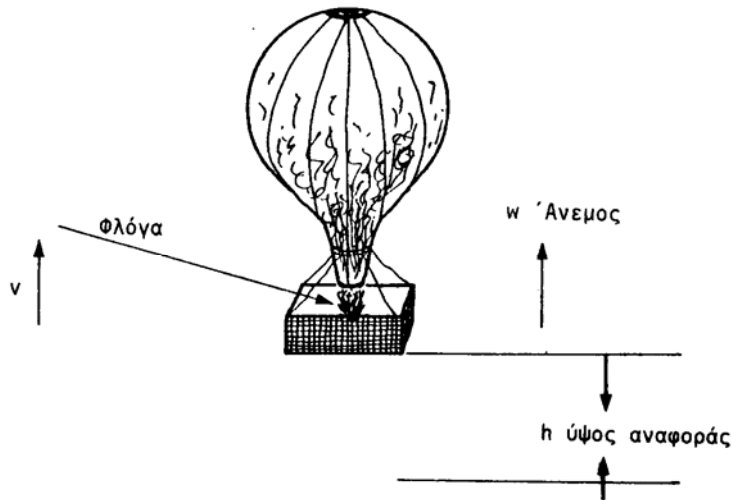
$$\dot{w} = 0$$

που δηλώνει ότι η w έχει σταθερή τιμή. Αρκεί τώρα να διαπιστωθεί αν το σύστημα (και επομένως οι καταστάσεις θ και w) είναι παρατηρήσιμο από την έξοδο $y=h$. Θεωρώντας ως διάνυσμα κατάστασης το

$$\mathbf{x} = [\theta \ v \ h \ w]^T$$

οι πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ του συστήματος είναι:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\tau_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & -\tau_2^{-1} & 0 & T_2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.4. Το αερόστατο του παραδείγματος 4.5.

Ακόμη υπολογίζοντας τον πίνακα παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = [\mathbf{c}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{c}^T \quad (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{c}^T]$$

βρίσκουμε ότι είναι ομαλός αν $\sigma \neq 0$ και επομένως επειδή το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο, και οι καταστάσεις θ και w είναι παρατηρήσιμες από την $y(t)$.

Επειδή ο πίνακας \mathbf{A} έχει πολλά μηδενικά, είναι εύκολο να διαπιστωθεί αν μπορούμε να επιλύσουμε ως προς θ και w , συναρτήσει της εξόδου h και των παραγώγων της και να διαπιστώσουμε την παρατηρησιμότητα των καταστάσεων. Πράγματι από τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση κατάστασης παίρνουμε

$$\ddot{y} = \ddot{h} = \dot{v} = -\frac{1}{\tau_2} v + \sigma \theta + \frac{1}{\tau_2} w$$

$$\dot{y} = \dot{h} = v$$

απ' όπου προκύπτει ότι η v και ποσότητα $(\sigma \theta + 1/\tau)w$ είναι παρατηρήσιμες. Επιπλέον έχουμε

$$y^{(3)} = \dot{h}^{(3)} = v^{(2)} = -\frac{1}{\tau_2} \dot{v} + a \dot{\theta}$$

απ' όπου φαίνεται ότι και η θ είναι παρατηρήσιμη καθόσον η v είναι παρατηρήσιμη. Τελικά προκύπτει από την πρώτη των παραπάνω εξισώσεων (που δίνει την \ddot{y}) ότι και η w είναι παρατηρήσιμη.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς από το w στο h , περιγράφουμε το σύστημα στο χώρο κατάστασης με δύο εισόδους, την u και την είσοδο διαταραχής w , η οποία δεν θεωρείται τώρα ως μεταβλητή κατάστασης. Οι εξισώσεις του χώρου κατάστασης του συστήματος στη μορφή αυτή είναι:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_1^{-1} & 0 & 0 \\ \sigma & \tau_2^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ v \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

$$y = h = [0 \quad 0 \quad 1] [\theta \quad v \quad h]^T$$

Ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς έχει διαστάσεις $l \times m = 1 \times 2$. Για τον υπολογισμό της εξόδου από μια είσοδο, θεωρούνται μηδενικές οι άλλες εισόδους και η βαθμωτή συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει αποτελεί το αντίστοιχο στοιχείο στον πίνακα της συνάρτησης μεταφοράς. Στο παράδειγμα αυτό ο πίνακας της συνάρτησης μεταφοράς που συνδέει τις εισόδους u και w με την έξοδο y είναι

$$\mathbf{H}(s) = [h_1(s) \quad h_2(s)] = \mathbf{c}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}$$

όπου

$$h_1(s) = \left. \frac{y(s)}{u(s)} \right|_{w=0} = \frac{h(s)}{v(s)} \frac{v(s)}{\theta(s)} \frac{\theta(s)}{u(s)}$$

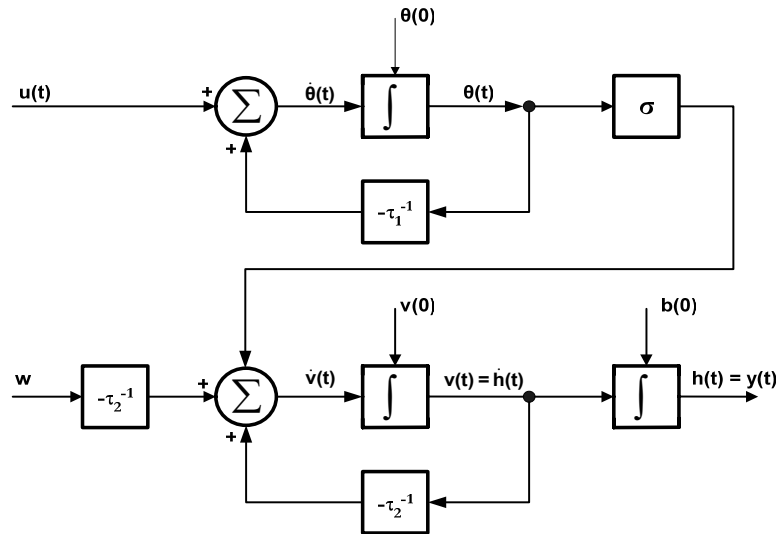
$$h_2(s) = \left. \frac{y(s)}{w(s)} \right|_{u=0} = \frac{h(s)}{v(s)} \frac{v(s)}{w(s)}$$

Αφού κάνουμε τις σχετικές πράξεις, είτε απευθείας είτε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Leverrier, βρίσκουμε

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s(s + \tau_1^{-1})(s + \tau_2^{-1})} \begin{bmatrix} \sigma & \tau_2^{-1}(s + \tau_1^{-1}) \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι στη συνάρτηση μεταφοράς $h_2(s)$ υπάρχει απαλοιφή του πόλου και μηδενικού στη θέση $s = -\tau_1^{-1}$.

Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού των συναρτήσεων μεταφοράς από τις δύο εισόδους προς την έξοδο, είναι να κατασκευάσουμε ένα λειτουργικό διάγραμμα πραγμάτωσης του συστήματος και να ακολουθήσουμε τις διαδρομές από κάθε είσοδο προς την έξοδο. Μια πραγμάτωση του συστήματος με δύο εισόδους τις u και w προκύπτει απευθείας από τις εξισώσεις του χώρου κατάστασης και φαίνεται στο Σχ. 4.5.



Σχήμα 4.5. Το λειτουργικό διάγραμμα προσομοίωσης του συστήματος του παραδείγματος 4.5.

Από το Σχ. 4.5 φαίνεται ότι

$$\begin{aligned}
 h_1(s) &= \frac{h(s)}{u(s)} \Big|_{w=0} = \frac{h(s)}{v(s)} \frac{v(s)}{\theta(s)} \frac{\theta(s)}{u(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \tau_2^{-1}} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{s + \tau_1^{-1}} \\
 &= \frac{\sigma}{s(s + \tau_2^{-1})(s + \tau_1^{-1})} \\
 h_2(s) &= \frac{h(s)}{w(s)} \Big|_{u=0} = \frac{h(s)}{v(s)} \frac{v(s)}{w(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\tau_2^{-1}}{(s + \tau_2^{-1})} \cdot \frac{1}{s(\tau_2^{s+1})}
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της ελεγχιμότητας των καταστάσεων από τις εισόδους $u(t)$ και $w(t)$ ξεχωριστά υπολογίζουμε τους αντίστοιχους πίνακες ελεγχιμότητας

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{c1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1) &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1] \\
 \mathbf{Q}_{c2}(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2) &= [\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2]
 \end{aligned}$$

Βρίσκεται ότι $\mathbf{Q}_{c1}(\mathbf{A}, \mathbf{b}_1)$ είναι ομαλός για $\sigma \neq 0$, οπότε το σύστημα είναι ελέγξιμο από την είσοδο $u(t)$. Αντίθετα, το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο από την είσοδο διαταραχής $w(t)$, επειδή ο $\mathbf{Q}_{c2}(\mathbf{A}, \mathbf{b}_2)$ δεν είναι ομαλός. Αυτό εξάλλου φαίνεται και από το Σχ. 4.5 και τις εξισώσεις κατάστασης, επειδή η μεταβλητή κατάστασης θ δεν επηρεάζεται από την w . Θα δούμε αργότερα στην Παράγραφο 4.5 ότι δεν υπάρχει καμία απαλοιφή πόλου της ονομαστικής συνάρτησης μεταφοράς από κάποια είσοδο προς κάποια έξοδο, αν και μόνον αν το σύστημα είναι ελέγξιμο από αυτήν την είσοδο και παρατηρήσιμο από αυτήν την έξοδο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο και επομένως οποιαδήποτε απαλοιφή πόλου στη συνάρτηση μεταφοράς συνεπάγεται ότι ο πόλος είναι μη ελέγξιμος από την είσοδο στην οποία εμφανίζεται η. Εδώ η απαλοιφή πόλου στην $h(s)$ σημαίνει ότι ο πόλος $\rho = -\tau_2^{-1}$ δεν ελέγχεται από την είσοδο w .

4.5. Επιπτώσεις της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας

Στο Τμήμα αυτό θα εξετάσουμε πως συνδέονται οι ιδιότητες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας μιας πραγμάτωσης στο χώρο κατάστασης με την διάσταση της πραγμάτωσης και τις απαλοιφές πόλων και μηδενικών. Θυμίζουμε ότι η διάσταση μιας πραγμάτωσης στο χώρο κατάστασης, δηλ. η διάσταση του μοντέλου του χώρου κατάστασης, ισούται με τον αριθμό των ολοκληρωτών στα συστήματα συνεχούς χρόνου (ή με τον αριθμό των δυναμικών στοιχείων καθυστέρησης στα συστήματα διακριτού χρόνου). Επιπλέον, ο χαρακτηρισμός μιας πραγμάτωσης ως ελάχιστης διάστασης συνδέεται με τη μη αναγωγιμότητα (irreducibility) της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς. Τα ανωτέρω αποτελέσματα δίνουν πολύτιμες πληροφορίες για τη δομή του συστήματος και οδηγούν σε άλλα ευκολότερα κριτήρια ελέγχου των συνθηκών ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας.

4.5.1 Ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα των διαγώνιων μορφών

Έχουμε ήδη αναφερθεί στο γεγονός ότι οι τέσσερις κανονικές μορφές που εξετάσαμε δεν εξασφαλίζουν συγχρόνως την ελεγχιμότητα και την παρατηρησιμότητα. Για την εξέταση της συνδυασμένης ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας είναι πολύ χρήσιμη η εξέταση της διαγώνιας μορφής που αντιστοιχεί στις παράλληλες πραγματώσεις που είδαμε στο τμήμα 2.4.1. Θεωρούμε λοιπόν μια πραγμάτωση με διαγώνιο πίνακα \mathbf{A} , της μορφής

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_d &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \\ \mathbf{b}_d &= [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] \\ \mathbf{c}_d &= [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]\end{aligned}\tag{4.52}$$

όπου λ_i είναι διακριτές τιμές.

Ο υπολογισμός του πίνακα ελεγχιμότητας οδηγεί σ' έναν πίνακα Vandermonde της μορφής

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d) = [\mathbf{b}_d \quad \mathbf{A}_d \mathbf{b}_d \quad \dots \quad \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{b}_d] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 \lambda_1 & \dots & \gamma_1 \lambda_1^{n-1} \\ \gamma_2 & \gamma_2 \lambda_2 & \dots & \gamma_2 \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_n \lambda_n & \dots & \gamma_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}\tag{4.53}$$

Η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ είναι

$$\begin{aligned}\det[\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)] &= \prod_{i=1}^n \gamma_i (\lambda_n - \lambda_{n-1}) (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \dots (\lambda_2 - \lambda_1) = \\ &= \prod_{i=1}^n \gamma_i \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)\end{aligned}\tag{4.54}$$

απ' όπου προκύπτει ότι η πραγμάτωση είναι ελέγξιμη αν και μόνον αν

$$\begin{aligned} \lambda_i &\neq \lambda_j \quad \text{και} \\ \gamma_i &\neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.55)$$

Με παρόμοια ανάλυση προκύπτει ότι η πραγμάτωση διαγώνιας μορφής είναι παρατηρήσιμη αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \lambda_i &\neq \lambda_j \quad \text{και} \\ \delta_i &\neq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.56)$$

Η φυσική σημασία των ανωτέρω περιορισμών μπορεί πολύ εύκολα να γίνει κατανοητή.

Θεώρημα 4.10

Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = b(s)/a(s)$ με διακριτές ιδιοτιμές μη αναγώγιμη, είναι η ελεγχιμότητα και η παρατηρησιμότητα κάθε n -οστής, $n = \text{deg}(a(s))$ πραγμάτωσης διαγώνιας μορφής της $H(s)$.

Απόδειξη:

Αναγκαία συνθήκη: Θεωρούμε την περίπτωση της συνδυασμένης ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας, όταν δηλ. ισχύουν αμφότερες οι (4.55), (4.56). Τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{c}_d ((s\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d)^{-1} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \delta_i}{s - \lambda_i} \end{aligned} \quad (4.57)$$

και εκφράζεται ως άθροισμα n και όχι λιγότερων όρων πρώτης τάξης. Συνεπώς η $H(s)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (4.58)$$

όπου $a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, και τα $b(s)$, $a(s)$ δεν έχουν καμία κοινή ρίζα. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να γίνει απαλοιφή όρων μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να μειωθεί η τάξη του συστήματος και επομένως η $H(s) = b(s)/a(s)$ με διακριτές ιδιοτιμές είναι μη αναγώγιμη.

Ικανή συνθήκη: Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος έχει τη μορφή (4.58), όπου τα πολώνυμα $a(s)$, $b(s)$ δεν έχουν κοινούς όρους, προκύπτει ότι η μη αναγώγιμη $H(s)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα μερικών κλασμάτων της μορφής (4.57) που ικανοποιεί τις συνθήκες (4.55) και (4.56).

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε το συμπέρασμα αυτό για κάθε τυχαία πραγμάτωση στο χώρο κατάστασης. Πράγματι, δεδομένης μιας τυχαίας διαγωνοποιήσιμης πραγμάτωσης $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ μπορεί να βρεθεί ένας ομαλός πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} , τέτοιος ώστε

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \mathbf{b}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_d = \mathbf{c} \mathbf{T} \quad (4.59)$$

Εξάλλου, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, οι ιδιότητες της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας διατηρούνται κάτω από την επίδραση μετασχηματισμών ομοιότητας. Επομένως το συμπέρασμα για τις συνθήκες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας πραγματώσεων των μη αναγώγιμων συναρτήσεων

μεταφοράς ισχύει για κάθε τυχαία διαγωνοποιήσιμη πραγμάτωση. Όσον αφορά τις μη διαγωνοποιήσιμες πραγματώσεις, μπορεί το συμπέρασμα αυτό να επεκταθεί χρησιμοποιώντας τη μορφή Jordan, ή αλλιώς χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των κανονικών μορφών. Μια απόδειξη που στηρίζεται στις ιδιότητες των κανονικών ελέγξιμων μορφών περιγράφεται στην επόμενη Παράγραφο.

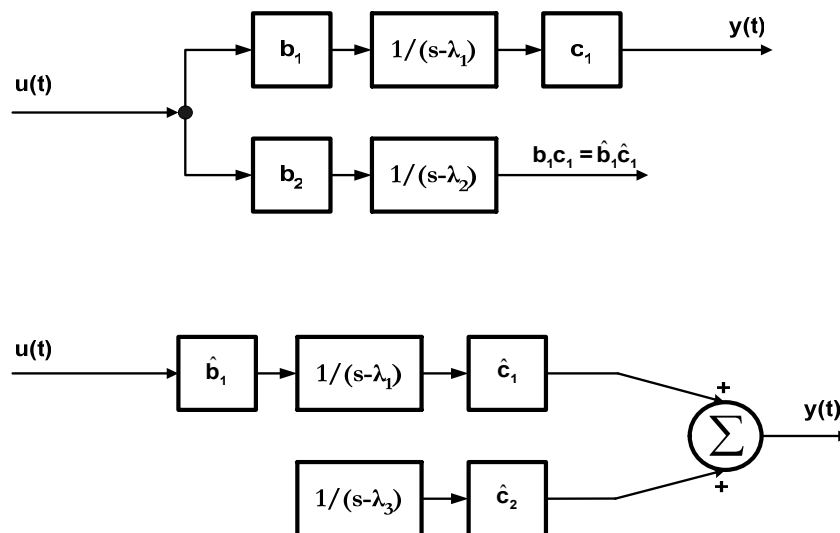
Η εξέταση των πραγματώσεων διαγώνιων μορφών, των οποίων η ανάλυση της δομής και των ιδιοτήτων είναι πολύ εύκολη, αποτελεί γενικά μια μέθοδο για την εξαγωγή συμπερασμάτων που ισχύουν για τυχαίους πίνακες **A**. Τέτοια παραδείγματα είναι το θεώρημα Cayley-Hamilton και το ανωτέρω συμπέρασμα σχετικά με τις ιδιότητες των μη αναγώγιμων συναρτήσεων μεταφοράς. Αντίθετα όμως, κάθε τυχαία πραγμάτωση δεν μπορεί να μετασχηματισθεί σε μία διαγώνια πραγμάτωση. Αυτό συμβαίνει επειδή ένας τυχαίος πίνακας **A** δεν έχει πάντοτε *n* γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, όπως απαιτείται για έναν διαγώνιο ή διαγωνοποιήσιμο πίνακα.

Στη συνέχεια, με βάση την ανωτέρω μεθοδολογία, θα εξετάσουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε δύο πραγματώσεις μιας συνάρτησης μεταφοράς να μπορούν να συνδεθούν με ένα μετασχηματισμό ομοιότητας. Προφανώς καταρχήν οι δύο πραγματώσεις πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση. Επιπλέον, δεδομένης μιας πραγμάτωσης $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, οποιαδήποτε άλλη πραγμάτωση $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ συνδέεται με την πρώτη με έναν ομαλό μετασχηματισμό ομοιότητας **T** μέσω των σχέσεων (2.50). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της δεύτερης πραγμάτωσης είναι σύμφωνα με την (2.113)

$$\hat{b}(s) = \det(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = b(s) \tag{4.60}$$

δηλαδή, είναι αναλλοίωτο κάτω από το μετασχηματισμό ομοιότητας. Επομένως και οι ιδιοτιμές μιας πραγμάτωσης είναι αναλλοίωτες κάτω από το μετασχηματισμό ομοιότητας. Προκύπτει λοιπόν ότι μια αναγκαία συνθήκη για να συνδέονται δύο πραγματώσεις μιας συνάρτησης μεταφοράς με μετασχηματισμό ομοιότητας, είναι να έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Στο Σχ. 4.6 φαίνονται δύο πραγματώσεις διαγώνιων μορφών που έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς αλλά διαφορετικό φάσμα ιδιοτιμών και επομένως δεν είναι όμοιες.



Σχήμα 4.6. Τα λειτουργικά διαγράμματα δύο πραγματώσεων με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς και διαφορετικά φάσματα ιδιοτιμών, που δεν είναι όμοιες.

Έστω $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}, \{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ αυτές οι δύο πραγματώσεις διαγώνιας μορφής με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2], \quad \hat{\mathbf{b}} = [\hat{\mathbf{b}}_1 \quad \mathbf{0}]^T, \quad \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1 \quad 0], \quad \hat{\mathbf{c}} = [\hat{\mathbf{c}}_1 \quad \hat{\mathbf{c}}_2], \quad \mathbf{c}_2 \neq 0$$

όπου $\mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1 = \hat{\mathbf{b}}_1 \hat{\mathbf{c}}_1$.

Υπολογίζεται εύκολα ότι και οι δύο πραγματώσεις έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{b_1 c_1}{s - \lambda_i}$$

Αμφότερες οι πραγματώσεις δεν είναι ελάχιστης διάστασης: στην πρώτη γίνεται απαλοιφή του πόλου $s = \lambda_2$ και στη δεύτερη του πόλου $s = \lambda_3$, με τα αντίστοιχα μηδενικά. Επίσης, προκύπτει ότι

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \lambda_1 \\ b_2 & b_2 \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_1 \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_c(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}) = [\hat{\mathbf{b}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_1 \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}} \\ \hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \\ \hat{c}_1 \lambda_1 & \hat{c}_2 \lambda_3 \end{bmatrix}$$

οπότε η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι ελέγξιμη, αλλά όχι παρατηρήσιμη, ενώ η πραγμάτωση $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ είναι παρατηρήσιμη, αλλά όχι ελέγξιμη. Οι δύο ανωτέρω πραγματώσεις, των οποίων τα λειτουργικά διαγράμματα φαίνονται στο Σχ. 4.6, δεν είναι όμοιες επειδή έχουν διαφορετικά φάσματα ιδιοτιμών (στην πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ απαλείφεται ο μη παρατηρήσιμος πόλος λ_2 , ενώ στην πραγμάτωση $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ απαλείφεται ο μη ελέγξιμος πόλος λ_3). Πράγματι, επαληθεύεται εύκολα ότι δεν υπάρχει πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{T} \text{ με } \lambda_2 \neq \lambda_3$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι $\lambda_2 = \lambda_3$, οπότε $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$, τότε ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη που απαιτεί ίδιο φάσμα ιδιοτιμών στις όμοιες πραγματώσεις και ο μετασχηματισμός ομοιότητας $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ ισχύει για κάθε ομαλό διαγώνιο πίνακα της μορφής

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον όμως πρέπει να ικανοποιούνται και οι σχέσεις

$$\hat{\mathbf{c}} = [\hat{\mathbf{c}}_1 \quad \hat{\mathbf{c}}_2] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2] \mathbf{T} = [c_1 t_1 \quad c_2 t_2]$$

απ' όπου φαίνεται ότι οι πραγματώσεις του Σχ. 4.6 ακόμη και αν έχουν $\lambda_2 = \lambda_3$, δεν είναι όμοιες. Αυτό

συμβαίνει επειδή η $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι ελέγξιμη, αλλά όχι παρατηρήσιμη, ενώ η πραγμάτωση $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ είναι παρατηρήσιμη, αλλά όχι ελέγξιμη. Αν όμως είχαμε

$$\hat{b}_2 = b_2 t_2^{-1} \neq 0, \quad b_2, t_2 \neq 0$$

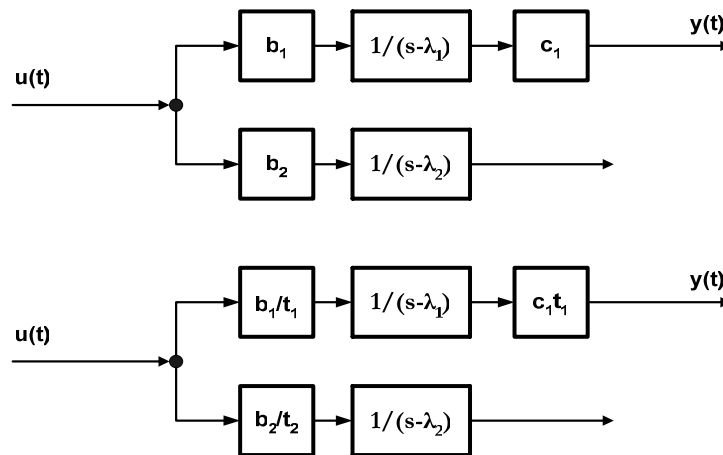
και

$$\hat{\mathbf{b}} = [\hat{b}_1 \quad \hat{b}_2]^T = \mathbf{T}[b_1 \quad b_2]^T = [b_1/t_1 \quad b_2/t_2]$$

$$\hat{c}_2 = c_2 t_2 = 0 \quad \text{επειδή } c_2 = 0$$

τότε οι δύο πραγμάτωσεις θα ήταν όμοιες (Σχ. 4.7).

Από την ανωτέρω συζήτηση προκύπτει το παρακάτω γενικό συμπέρασμα που ισχύει και για τυχαίες, μη διαγώνιες πραγμάτωσεις.



Σχήμα 4.7. Τα λειτουργικά διαγράμματα δύο πραγμάτωσης με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς που είναι όμοιες. Αμφότερες οι πραγμάτωσεις είναι ελέγξιμες, μη παρατηρήσιμες και στη συνάρτηση μεταφοράς γίνεται απαλοιφή του πόλου $s = \lambda_2$.

Λήμμα 4.3. Ομοιότητα βαθμωτών πραγμάτωσης

Οποιοσδήποτε δύο πραγμάτωσεις $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ και $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ της ίδιας διάστασης και με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς είναι όμοιες αν:

(i). Έχουν το ίδιο φάσμα ιδιοτιμών, δηλ. αν

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2) \tag{4.61}$$

(ii). Είναι αμφότερες ελέγξιμες ή αμφότερες παρατηρήσιμες, ή αμφότερες ελέγξιμες και παρατηρήσιμες.

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας \mathbf{T} δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) \tag{4.62}$$

αν αμφότερες οι πραγμάτωσεις είναι ελέγξιμες, ή από τη σχέση

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1) \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2) \quad (4.63)$$

αν αμφότερες οι πραγματώσεις είναι παρατηρήσιμες, όπου ο πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.64)$$

Απόδειξη:

Έστω δύο όμοιες πραγματώσεις $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}, \{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ των ίδιων διαστάσεων και με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Τότε οι πίνακές τους συνδέονται με τις σχέσεις

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{T}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1\mathbf{T} \quad (4.65)$$

Τότε χρησιμοποιώντας τη μορφή των πινάκων ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας γράφουμε

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = [\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}_2\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}_2^{n-1}\mathbf{b}_2] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) \quad (4.66)$$

Και

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2) = [\mathbf{c}_2^T \quad \mathbf{A}_2^T\mathbf{c}_2^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}_2^T)^{n-1}\mathbf{c}_2^T] = \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1)\mathbf{T} \quad (4.67)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις φαίνεται ότι αν η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ είναι ελέγξιμη ή παρατηρήσιμη, τότε και η όμοιά της $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ είναι ελέγξιμη ή παρατηρήσιμη αντίστοιχα, επειδή ο \mathbf{T} είναι ομαλός. Λύνοντας ως προς \mathbf{T} την (4.66) ή τη (4.67), ανάλογα αν η πραγμάτωση είναι ελέγξιμη ή παρατηρήσιμη, παίρνουμε την (4.62) ή την (4.63) αντίστοιχα.

Εξάλλου η (4.61) προφανώς πρέπει να ικανοποιείται, όπως έχει αποδειχθεί στην (4.60). Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει απαλοιφή πόλων και μηδενικών σε μια πραγμάτωση, το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και σε κάθε όμοια της πραγμάτωση.

Λήμμα 4.4

Υποθέτουμε τώρα ότι αμφότερες οι πραγματώσεις $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ και $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ είναι ελέγξιμες ή αμφότερες παρατηρήσιμες. Τότε μπορεί να υπολογισθεί ένας ομαλός πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} από την (4.62) ή (4.63) αντίστοιχα.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι αμφότερες οι πραγματώσεις $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ και $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ είναι ελέγξιμες. Θα ελέγξουμε αν ο πίνακας αυτός αποτελεί πράγματι έναν ομαλό πίνακα μετασχηματισμού.

Καταρχήν βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}_1 &= \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 = \\ \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\left[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}_1\right]^{-1}\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_2 \\ &= \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\left[\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\right] = \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ είναι το διάνυσμα γραμμής

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ i \text{ θέση}}}{1} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

Ακόμη έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{T} &= \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\left[\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)\right]\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) \\ &= \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{A}_2 \end{aligned}$$

επειδή

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) &= \left[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{b}_1\right]^{-1}\left[\mathbf{A}_1\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1^2\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_1^n\mathbf{b}_1\right] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) \end{aligned} \quad (4.68)$$

καθόσον το ανωτέρω γινόμενο των τριών παραγόντων αποδείχθηκε ότι είναι ανεξάρτητο από τη συγκεκριμένη πραγμάτωση και εξαρτάται μόνο από τους συντελεστές a_1, a_2, \dots, a_n του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$ της πραγμάτωσης $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$.

Για την απόδειξη της (4.68) χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα Cayley-Hamilton σύμφωνα με το οποίο

$$\mathbf{A}^n = -a_1\mathbf{A}^{n-1} - a_2\mathbf{A}^{n-2} - \dots - a_n\mathbf{I}$$

Τέλος για την απόδειξη της σχέσης ομοιότητας $c = c \mathbf{T}$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι παράμετροι Markov h_i της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ αποτελούν τους συντελεστές της ανάπτυξης της $H(s)$ στην περιοχή του απείρου και για το λόγο αυτό ορίζονται μονοσήμαντα. Οι παράμετροι Markov h_i ορίζονται συναρτήσει των πινάκων $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ μιας πραγμάτωσης της $H(s)$ από τη σχέση $h_i = \mathbf{c}_1\mathbf{A}_1^i\mathbf{b}$, $i=0,1,\dots$ (βλ. την αντίστοιχη σχέση (2.134) για συστήματα πολλών-εισόδων, πολλών-εξόδων). Επομένως για κάθε πραγμάτωση της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς οι h_i είναι αναλλοίωτοι και έχουμε

$$h_i = \mathbf{c}_1\mathbf{A}_1^i\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_2\mathbf{A}_2^i\mathbf{b}_2, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (4.69)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) &= \mathbf{c}_2 \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) \\ \mathbf{c}_2 &= \mathbf{c}_1 \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{c}_1 \mathbf{T} \end{aligned}$$

οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη ότι ο \mathbf{T} είναι πράγματι ένας πίνακας μετασχηματισμού ομοιότητας. Παρατηρούμε ότι δεν χρειάστηκε στην απόδειξη η παρατηρησιμότητα του ζεύγους $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1\}$. Μια ανάλογη απόδειξη μπορεί να γίνει αν υποθέσουμε ότι αμφότερες οι πραγματώσεις είναι παρατηρήσιμες, χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.63). Αν υποθέσουμε ότι αμφότερες οι πραγματώσεις είναι ελέγξιμες και παρατηρήσιμες, τότε μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να αποδείξουμε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} υπολογίζεται είτε

$$\mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1) \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2) \quad (4.70)$$

επειδή για κάθε πραγμάτωση η ποσότητα

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{c}) \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (4.71)$$

είναι αμετάβλητη, όπως θα αποδειχθεί στην (4.78)

Σημειώνουμε ότι αν μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ δεν είναι ούτε ελέγξιμη, ούτε παρατηρήσιμη, τότε κάθε όμοια προς αυτήν την πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ δεν είναι επίσης ούτε ελέγξιμη, ούτε παρατηρήσιμη, όπως φαίνεται από τις (4.66) και (4.67). Τότε ο πίνακας \mathbf{T} δεν μπορεί να υπολογισθεί από τις σχέσεις (4.62) ή (4.63). Πάντοτε όμως ο πίνακας \mathbf{T} που πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις ομοιότητας (4.65), δεν αλλάζει τη δομή των πόλων και των μηδενικών που απαλοίφονται.

Παράδειγμα 4.6

Έστω ένα σύστημα της μορφής (4.1), όπου

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = [-2 \quad 1]$$

Οι πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1) &= [\mathbf{c}_1^T \quad \mathbf{A}_1^T \mathbf{c}_1^T]^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

απ' όπου φαίνεται ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο επειδή ο $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)$ είναι ομαλός, ενώ αντίθετα δεν είναι παρατηρήσιμο επειδή ο $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1)$ δεν είναι ομαλός. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \mathbf{c}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{b}_1 = \frac{-2(s-3)}{(s-2)(s-3)} = -\frac{2}{s-2}$$

δηλ. γίνεται απαλοιφή του μη παρατηρήσιμου πόλου $s = 3$.

Έστω τώρα μια άλλη πραγμάτωση της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς με

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = [1 \quad -1]$$

Βρίσκουμε ότι οι δύο πραγμάτωσης έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = [\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2) = [\mathbf{c}_2^T \quad \mathbf{A}_2^T \mathbf{c}_2^T]^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

απ' όπου φαίνεται ότι η πραγμάτωση αυτή είναι επίσης ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη. Επομένως οι δύο πραγμάτωσης ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες του Λήμματος 4.3 και είναι όμοιες. Ο πίνακας μετασχηματισμού βρίσκεται ότι είναι

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

και επαληθεύει τις σχέσεις ομοιότητας (4.65).

Παράδειγμα 4.7

Έστω ένα σύστημα της μορφής (4.1), όπου

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = [-2 \quad 1]$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες $\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1$ του συστήματος είναι ίδιοι με αυτούς του παραδείγματος 4.6 και επομένως όπως ήδη υπολογίσαμε, το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο. Ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{b}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

και επομένως το σύστημα δεν είναι ούτε ελέγξιμο.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται ότι είναι

$$H(s) = \mathbf{c}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{b}_1 = \frac{-(s-3)}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{(s-2)}$$

όπου τώρα ο πόλος που αναλοίφεται είναι συγχρόνως μη ελέγξιμος και μη παρατηρήσιμος.

Έστω τώρα μια άλλη πραγμάτωση της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς με

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = [-4 \quad -1]$$

Βρίσκουμε ότι οι δύο πραγματώσεις έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και

$$\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) = [\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2) = [\mathbf{c}_2^T \quad \mathbf{A}_2^T \mathbf{c}_2^T]^T = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}$$

απ' όπου φαίνεται ότι η πραγμάτωση αυτή είναι μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη.

Αμφότερες οι πραγματώσεις της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς είναι μη ελέγξιμες και μη παρατηρήσιμες και επιπλέον έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Συμπεραίνουμε ότι γίνεται απαλοιφή των ίδιων πόλων και στις δύο πραγματώσεις. Επομένως συνδέονται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Ο πίνακας \mathbf{T} πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να ικανοποιεί το υπερορισμένο (overdetermined) σύστημα εξισώσεων (4.65) ως προς τα στοιχεία του \mathbf{T} . Πράγματι από τις $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1 \mathbf{T}$ και $\mathbf{b}_1 = \mathbf{T} \mathbf{b}_2$, βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

που επαληθεύει και η σχέση $\mathbf{A}_2 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{T}$.



4.5.2. Σχέσεις μεταξύ ελεγχιμότητας, παρατηρησιμότητας, αναγωγιμότητας και ελάχιστης διάστασης

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε θεμελιώδεις ιδιότητες της εσωτερικής δομής των τυχαίων πραγματώσεων ενός συστήματος μιας εισόδου, μιας εξόδου, που είναι συγχρόνως ελέγξιμες και παρατηρήσιμες. Οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν και με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τη σειρά παρουσίασης των Θεωρημάτων.

Λήμμα 4.5: Παρατηρησιμότητα των κανονικών μορφών ελεγχιμότητας

Η n -οστής τάξης ($n = \deg(a(s))$) πραγμάτωση κανονικής ελέγξιμης μορφής $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c\}$ είναι παρατηρήσιμη, αν και μόνον αν τα πολυώνυμα $b(s)$ και $a(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς $H(s) = b(s)/a(s)$, $a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δηλ. αν η $H(s)$ είναι μη αναγώγιμη).

Απόδειξη:

Χρησιμοποιείται μία άλλη ειδική μορφή του πίνακα παρατηρησιμότητας της κανονικής μορφής ελεγχιμότητας [1, σελ. 102],

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_c, \mathbf{c}_c) = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{b}(\mathbf{A}_c) = \tilde{\mathbf{I}} [b_1 \mathbf{A}_c^{n-1} + b_2 \mathbf{A}_c^{n-2} + \dots + b_n] \quad (4.72)$$

όπου b_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου $b(s)$ (βλ. την (4.58)), $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι ο αντεστραμμένος μοναδιαίος πίνακας

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

και \mathbf{A}_c είναι ο πίνακας της κανονικής ελεγχίσιμης μορφής και έχει την συντροφική μορφή (companion form) που δίνεται από την (2.40).

Η (4.72) μπορεί εύκολα να επαληθευθεί εφαρμόζοντας την παρακάτω ιδιότητα μετατόπισης των πινάκων συντροφικής μορφής \mathbf{A}_c , ως εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{A}_c = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (4.73)$$

Επιπλέον ισχύει

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{A}_c = [-a_1 \quad -a_2 \quad \dots \quad -a_n] \quad (4.74)$$

όπου $a_i, i=1,2,\dots,n$ είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a(s)$. Χρησιμοποιώντας τις (4.73) και (4.74), έχουμε:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_n b(\mathbf{A}_c) &= b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_n \mathbf{A}_c^{n-1} + \dots + b_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= b_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + b_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ &= [b_1 b_2 \quad \dots \quad b_n] = \mathbf{c}_c \end{aligned} \quad (4.75)$$

Τότε

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} b(\mathbf{A}_c) = \boldsymbol{\varepsilon}_n \mathbf{A}_c b(\mathbf{A}_c) = \boldsymbol{\varepsilon}_n b(\mathbf{A}_c) \mathbf{A}_c = \mathbf{c}_c \mathbf{A}_c$$

καθόσον οι $b(\mathbf{A}_c)$ και \mathbf{A}_c είναι αντιμεταθέσιμοι [1, σελ. 109]. Παρομοίως προκύπτουν και εκφράσεις για $\boldsymbol{\varepsilon}_i b(\mathbf{A}_c), i=n-3,\dots,2,1$, οπότε παίρνουμε τον γενικό τύπο:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i b(\mathbf{A}_c) = \boldsymbol{\varepsilon}_n \mathbf{A}_c^{n-i} b(\mathbf{A}_c) = \boldsymbol{\varepsilon}_n b(\mathbf{A}_c) \mathbf{A}_c^{n-i} = \mathbf{c}_c \mathbf{A}_c^{n-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.76)$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας \mathbf{c}_c που δίνεται στην (2.40) αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου ο αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς $b(s)$ έχει βαθμό $m < n$. Εδώ αναφερόμαστε στην περίπτωση $m = n-1$, όπου η συνάρτηση μεταφοράς (4.10) παίρνει τη μορφή που φαίνεται στην (4.58), οπότε ο \mathbf{c}_c δεν περιλαμβάνει τα $n-m-1$ μηδενικά στις πρώτες θέσεις του.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.76), ο πίνακας ελεγχιμότητας είναι

$$\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_c, \mathbf{c}_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_c \\ \mathbf{c}_c \mathbf{A}_c \\ \vdots \\ \mathbf{c}_c \mathbf{A}_c^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \end{bmatrix} b(\mathbf{A}_c) = \tilde{\mathbf{I}} b(\mathbf{A}_c) \quad (4.77)$$

Από την (4.77) προκύπτει ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_c, \mathbf{c}_c)$ είναι ομαλός αν και μόνο αν $\det[b(\mathbf{A}_c)] \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ορίζουσα ενός πίνακα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του, έχουμε

$$\det[b(\mathbf{A}_c)] = \prod_{i=1}^n b(\lambda_i) \quad (4.78)$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του \mathbf{A}_c και $b(\lambda_i)$ οι ιδιοτιμές της πολυωνυμικής μητρικής συνάρτησης $b(\mathbf{A}_c)$. Η $\det[b(\mathbf{A}_c)]$ είναι μη μηδενική αν και μόνον αν $b(\lambda_i) \neq 0, i=1,2,\dots,n$. Επειδή όμως οι ιδιοτιμές λ_i είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a(s)$, δηλ.

$$a(\lambda_i) = \det(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = 0$$

συμπεραίνουμε ότι για να είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας ομαλός, πρέπει καμία ρίζα λ_i του $a(s)$ να μην είναι επίσης ρίζα του $b(s)$, οπότε $b(\lambda_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Αυτό σημαίνει ότι η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{c}_c\}$ είναι παρατηρήσιμη, αν και μόνον αν τα $a(s)$, $b(s)$ δεν έχουν καμία κοινή ρίζα και επομένως κανέναν κοινό παράγοντα.

Λήμμα 4.6: Ελεγχιμότητα των κανονικών μορφών παρατηρησιμότητας

Η n -οστής τάξης ($n = \deg(a(s))$) πραγμάτωση κανονικής παρατηρήσιμης μορφής $\{\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0\}$ είναι ελέγξιμη, αν και μόνον αν τα πολυώνυμα $b(s)$ και $a(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς $H(s) = b(s)/a(s)$, $a(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)$ είναι πρώτα μεταξύ τους (δηλ. αν η $H(s)$ είναι μη αναγώγιμη).

Λήμμα 4.7

Αν μια συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

έχει μια ελέγξιμη και παρατηρήσιμη πραγμάτωση n -οστής τάξης, τότε όλες οι n -οστής τάξης πραγματώσεις είναι επίσης ελέγξιμες και παρατηρήσιμες.

Απόδειξη:

Ο πίνακας Hankel μιας πραγμάτωσης $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ που ορίζεται από τις εξισώσεις (2.133) και (2.134), γράφεται με τη μορφή

$$\mathbf{S}[0, n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{b} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} & \dots & \mathbf{c}\mathbf{A}^{2n-2}\mathbf{b} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}\mathbf{A}^{i+j-2}\mathbf{b}] \quad (4.79)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.18) και (4.38), που ορίζουν τους πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας για συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου αντίστοιχα, υπολογίζεται ότι ισχύει

$$\mathbf{S}[0, n-1] = \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}, \mathbf{c})\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \quad (4.80)$$

Επειδή οι παράμετροι Markov $h_i = \mathbf{c}\mathbf{A}^i\mathbf{b}$, $i \geq 0$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι, προκύπτει ότι η (4.80) ισχύει για κάθε πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ της $H(s)$. Αν λοιπόν $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$, $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ είναι δύο πραγματώσεις n -οστής τάξης της $H(s)$, ισχύει

$$\mathbf{S}[0, n-1] = \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1)\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2)\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2) \quad (4.81)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1\}$ είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη, οπότε οι πίνακες $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1)$, $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1)$ είναι ομαλοί. Τότε πρέπει επίσης να είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2\}$ επειδή πρέπει και οι πίνακες $\mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_2, \mathbf{c}_2)$, $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2)$ να είναι ομαλοί.

Θεώρημα 4.11

Μια συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = b(s)/a(s)$ ενός συστήματος μιας εισόδου-μιας εξόδου είναι μη αναγώγιμη, αν και μόνο αν όλες οι n -οστής τάξης πραγματώσεις της είναι ελέγξιμες και παρατηρήσιμες.

Απόδειξη:

Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από το συνδυασμό των Λημμάτων 4.7 και 4.5 ή 4.6 και λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι μία πραγμάτωση κανονικής ελέγξιμης (παρατηρήσιμης) μορφής είναι εκ κατασκευής ελέγξιμη (παρατηρήσιμη).

Θεώρημα 4.12

Μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ενός συστήματος είναι ελάχιστης διάστασης, αν και μόνον αν τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} a(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ b(s) &= \mathbf{c} \operatorname{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.82)$$

είναι πρώτα μεταξύ τους.

Απόδειξη:

Υπενθυμίζουμε ότι μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ είναι ελάχιστης διάστασης όταν δεν υπάρχει άλλη πραγμάτωση $\{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}\}$ της ίδιας συνάρτησης μεταφοράς, όπου ο $\hat{\mathbf{A}}$ έχει διάσταση μικρότερη από αυτήν του \mathbf{A} .

Η συνάρτηση μεταφοράς της πραγμάτωσης $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}\operatorname{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (4.83)$$

Υποθέτουμε κατ'αρχήν ότι η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι ελάχιστης διάστασης, ενώ η ρητή συνάρτηση $b(s)/a(s)$ είναι αναγώγιμη, δηλ. τα $b(s)$, $a(s)$ έχουν κοινούς όρους. Τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ γράφεται στην απλοποιημένη μορφή (2.126) και έχει μια πραγμάτωση μικρότερης διάστασης, πράγμα άτοπο. Αντίθετα τώρα, υποθέτουμε ότι η $b(s)/a(s)$ είναι μη αναγώγιμη ενώ η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ δεν είναι ελάχιστης διάστασης. Τότε κάθε πραγμάτωση ελάχιστης διάστασης της $H(s)$ θα έχει μια συνάρτηση μεταφοράς με χαρακτηριστικό πολυώνυμο μικρότερου βαθμού από αυτόν του $a(s)$, πράγμα άτοπο. Επομένως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ελάχιστης διάστασης η πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ είναι η μη αναγωγιμότητα της ρητής συνάρτησης $b(s)/a(s)$.

Θεώρημα 4.13

Μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ενός συστήματος είναι ελάχιστης διάστασης αν και μόνον αν το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ είναι ελέγξιμο και το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ είναι παρατηρήσιμο.

Απόδειξη:

Η απόδειξη προκύπτει από το συνδυασμό των Θεωρημάτων 4.11 και 4.12.

Θεώρημα 4.14

Οποιοσδήποτε δύο πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης συνδέονται με έναν μοναδικό μετασχηματισμό ομοιότητας.

Απόδειξη:

Οι πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 4.3 οι οποίες και αποδεικνύουν αμέσως το Θεώρημα.

Μία απευθείας λύση προκύπτει από το γεγονός ότι οι πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης είναι παρατηρήσιμες και ελέγξιμες Έστω ότι ορίζουμε ένα πίνακα μετασχηματισμού T από την (4.63) συναρτήσκει των πινάκων παρατηρησιμότητας, ο οποίος συνδέει δύο πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης $\{A_1, b_1, c_1\}$ και $\{A_2, b_2, c_2\}$. Χρησιμοποιώντας την (4.81), προκύπτει ότι ο T δίνεται επίσης και από την (4.62), συναρτήσκει των πινάκων ελεγχιμότητας. Επιπλέον ισχύει η σχέση

$$S[1, n-1] = Q_0(A_1, c_1)A_1Q_c(A_1, b_1) = Q_0(A_2, c_2)A_2Q_c(A_2, b_2) \quad (4.84)$$

από την οποία προκύπτει ότι πράγματι ο T συνδέει τις πραγματώσεις, ως εξής:

$$A_2 = Q_0^{-1}(A_2, c_2)Q_0(A_1, c_1)A_1Q_c(A_1, b_1)Q_c^{-1}(A_2, b_2) = T^{-1}A_1T \quad (4.85)$$

Αν υπήρχε άλλος πίνακας T , που να συνδέει τις πραγματώσεις $\{A_1, b_1, c_1\}$ και $\{A_2, b_2, c_2\}$, τότε προκύπτει από την (4.63) ότι $Q_0(A_1, c_1)T = Q_0(A_1, c_1)T = Q_0(A_2, c_2)$, και ισοδύναμα

$$Q_0(A_1, c_1)(T - \tilde{T}) = 0$$

που συνεπάγεται ότι $T = \tilde{T}$, επειδή ο $Q_0(A_1, c_1)$ είναι ομαλός.

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 4.11-4.13 προκύπτουν ορισμένες χαρακτηριστικές δομικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης. Το Θεώρημα 4.13 παρέχει έναν εύκολο τρόπο ελέγχου για το αν μια πραγμάτωση είναι ελάχιστης διάστασης, ελέγχοντας την ελεγχιμότητα και την παρατηρησιμότητα της πραγμάτωσης. Ένας άλλος τρόπος ελέγχου της ελάχιστης διάστασης μιας πραγμάτωσης είναι να ελέγξουμε αν τα πολυώνυμα $a(s)$ και $b(s)$, που δίνονται από τις σχέσεις (4.82), είναι πρώτα μεταξύ τους. Μια σχηματική παράσταση των ισοδυναμιών που υπάρχουν στις πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης φαίνεται στο Σχ. 4.8.

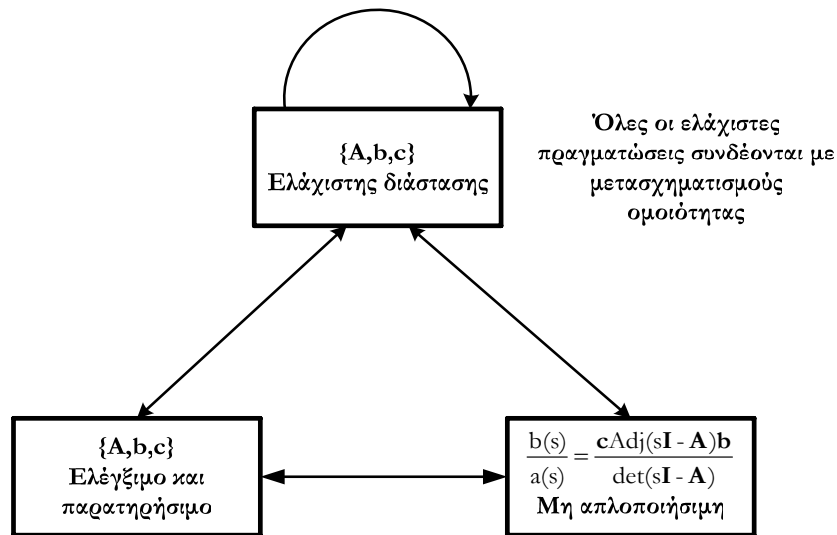
Θεωρώντας μια μη αναγώγιμη συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = b(s)/a(s)$, οι τέσσερις κανονικές μορφές πραγματώσεων της $H(s)$ που περιγράφηκαν στην Παράγραφο 2.5.2 είναι ελάχιστης διάστασης. Επομένως συνδέονται μεταξύ τους με μονοσήμαντα ορισμένους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Στη συνέχεια θα καταγράψουμε τους πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας των τεσσάρων κανονικών μορφών, όπως προκύπτουν από τις σχέσεις (4.40)-(4.46).

I. Κανονική ελέγξιμη μορφή

$$\begin{aligned} Q_c(A_c, b_c) &= (Q^{-1})^T \\ Q_0(A_c, c_c) &= \tilde{I}b(A_c) \end{aligned} \quad (4.86)$$

όπου ο Q ορίσθηκε στη (4.47β). Η (4.86α) προκύπτει από την (4.47α), χρησιμοποιώντας τη διαδικότητα

μεταξύ της κανονικής ελέγξιμης και της κανονικής παρατηρήσιμης μορφής που εκφράζεται από τις σχέσεις (4.38). Ακόμη θυμίζουμε ότι η (4.86β) είναι η (4.77) που αποδείχθηκε στο Λήμμα 4.5.



Σχήμα 4.8. Ισοδυναμίες στις πραγματώσεις ελάχιστης διάστασης.

II. Κανονική παρατηρήσιμη μορφή

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διαδικότητας μεταξύ της κανονικής ελέγξιμης μορφής και της κανονικής παρατηρήσιμης μορφής, έχουμε

$$\begin{aligned} Q_c(A_0, \mathbf{b}_0) &= b(A_0) \tilde{\mathbf{I}} \\ Q_0(A_0, \mathbf{c}_0) &= Q^{-1} \end{aligned} \tag{4.87}$$

III. Κανονική μορφή ελεγχιμότητας

$$\begin{aligned} Q_c(A_{c0}, \mathbf{b}_{c0}) &= \mathbf{I} \\ Q_0(A_{c0}, \mathbf{c}_{c0}) &= S[0, n-1] \end{aligned} \tag{4.88}$$

όπου $S[0, n-1]$ είναι ο πίνακας Hankel των παραμέτρων Markov που για την πραγμάτωση $\{A, b, c\}$ δίνεται από την (4.79).

Η (4.88α) αποδεικνύεται απευθείας χρησιμοποιώντας τη μορφή των A_{c0}, \mathbf{b}_{c0} από τις (2.43). Για $m=n-1$ (όπου m ο βαθμός του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς στην (2.10)), ο πίνακας C_{c0} είναι ο

$$C_{c0} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{n-1}]$$

Χρησιμοποιώντας την ειδική μορφή του A_{c0} από την (2.43), υπολογίζουμε τώρα

$$\mathbf{C}_{c0}\mathbf{A}_{c0} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{n-1} \ g_n]$$

όπου

$$\begin{aligned} q_n &= a_n h_o - a_{n-1} h_1 - \dots - a_1 h_{n-1} \\ &= -a_n \mathbf{c}_{co} \mathbf{b}_{co} - a_{n-1} \mathbf{c}_{co} \mathbf{A}_{co} \mathbf{b}_{co} - \dots - a_1 \mathbf{c}_{co} \mathbf{A}_{co}^{n-1} \mathbf{b}_{co} \\ &= \mathbf{c}_{co} [-a_n \mathbf{I} - a_{n-1} \mathbf{A}_{co} - \dots - a_1 \mathbf{A}_{co}^{n-1}] \mathbf{b}_{co} \\ &= \mathbf{c}_{co} \mathbf{A}_{co}^n \mathbf{b}_{co} = h_n \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τη μορφή των παραμέτρων Markov και το Θεώρημα Cayley- Hamilton. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται η (4.88β). Ένας άλλος τρόπος απόδειξης της (4.88β) βασίζεται στην (4.80), η οποία ισχύει για κάθε πραγμάτωση. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\mathbf{Q}_o(\mathbf{A}_{co}, \mathbf{c}_{co}) = \mathbf{S}[0, n-1] \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_{co}, \mathbf{b}_{co}) = \mathbf{S}[0, n-1]$$

χρησιμοποιώντας την (4.88α).

IV. Κανονική μορφή παρατηρησιμότητας

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διαδικότητας μεταξύ της κανονικής μορφής ελεγχιμότητας και της κανονικής μορφής παρατηρησιμότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{b}_{ob}) &= \mathbf{Q}_{c0}^T = \mathbf{S}[0, n-1] \\ \mathbf{Q}_{ob} &= \mathbf{Q}(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{c}_{ob}) = \mathbf{Q}_{c0}^T = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.89)$$

επειδή ο πίνακας $\mathbf{S}[0, n-1]$ είναι συμμετρικός.

Οι ομαλοί πίνακες μετασχηματισμών μεταξύ οποιονδήποτε δύο από τις τέσσερις ανωτέρω κανονικές μορφές υπολογίζονται μονοσήμαντα χρησιμοποιώντας την (4.62) ή την (4.63). Έτσι για να μεταβούμε από την κανονική μορφή ελεγχιμότητας στην κανονική ελέγξιμη μορφή, εφαρμόζουμε τον πίνακα μετασχηματισμού της μορφής Toeplitz

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_{c0}, \mathbf{b}_{c0}) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \mathbf{Q}^T \quad (4.90)$$

ενώ για να μεταβούμε από την κανονική παρατηρήσιμη μορφή στην κανονική μορφή παρατηρησιμότητας εφαρμόζουμε τον πίνακα μετασχηματισμού της μορφής Toeplitz

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0) \mathbf{Q}_{ob}(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{b}_{ob}) = \mathbf{Q} \quad (4.91)$$

Για τη μετάβαση από την κανονική μορφή παρατηρησιμότητας στην κανονική μορφή ελεγχιμότητας, ο πίνακας μετασχηματισμού έχει τη μορφή Hankel

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_{ob}, \mathbf{b}_{ob}) \mathbf{Q}_c^{-1}(\mathbf{A}_{c0}, \mathbf{b}_{c0}) = \mathbf{S}[0, n-1] \quad (4.92)$$

Για τη μετάβαση από την κανονική παρατηρήσιμη μορφή στην κανονική ελέγξιμη μορφή ο πίνακας μετασχηματισμού έχει τη μορφή Bezout

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_0^{-1}(\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0) \mathbf{Q}_0(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c) = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{I}} b(\mathbf{A}_c) = -\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.93)$$

Ο πίνακας \mathbf{B} έχει τη μορφή Bezout [1, σελ. 143]

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{I}} [\mathbf{Q}^+ \mathbf{R}^- - \mathbf{R}^+ \mathbf{Q}^-] \quad (4.94)$$

όπου \mathbf{Q}^+ , \mathbf{R}^+ είναι άνω τριγωνικοί πίνακες Toeplitz της μορφής

$$\mathbf{Q}^+ = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ & a_n & \dots & a_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

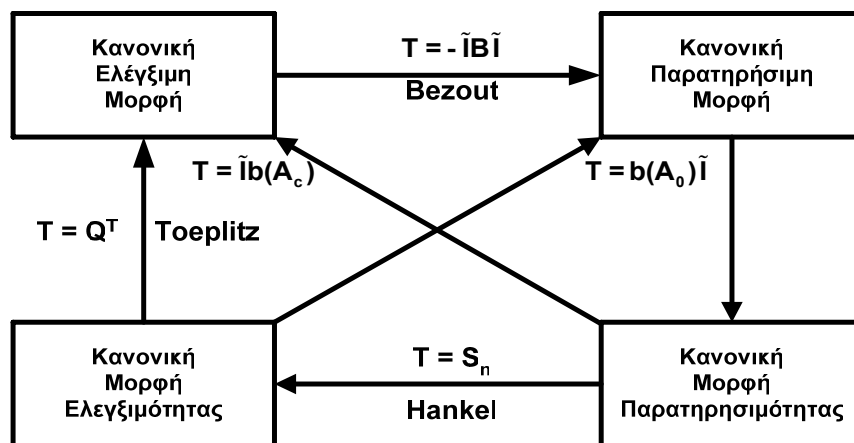
$$\mathbf{R}^+ = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \\ & b_n & \dots & b_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_n \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

\mathbf{R}^- είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας Toeplitz της μορφής

$$\mathbf{R}^- = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ b_1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

και \mathbf{Q}^- είναι ο κάτω τριγωνικός πίνακας \mathbf{Q} της μορφής Toeplitz που ορίστηκε στην (4.47β).

Αποδεικνύεται ότι ο \mathbf{B} , αντίθετα με τον $\tilde{\mathbf{B}}$, είναι συμμετρικός πίνακας. Οι μορφές των πινάκων μετασχηματισμών μεταξύ των κανονικών μορφών συνοψίζονται στο Σχ. 4.9.



Σχήμα 4.9. Οι μετασχηματισμοί ομοιότητας μεταξύ των κανονικών μορφών.

4.6. Μορφές των μη ελέγξιμων και / ή των μη παρατηρήσιμων συστημάτων

Στην Παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε σε τυποποιημένες μορφές στις οποίες μπορούν να γραφούν και να πραγματωθούν συστήματα που είναι μη ελέγξιμα και/ή μη παρατηρήσιμα. Στις μορφές αυτές διαχωρίζονται οι μη ελέγξιμες και/ή οι μη παρατηρήσιμες μεταβλητές κατάστασης.

4.6.1. Παράσταση των μη ελέγξιμων πραγματώσεων

Έστω μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ που δεν είναι ελέγξιμη, οπότε ισχύει

$$\text{rank}_{\mathbf{Q}_c}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = r < n \quad (4.98)$$

Για οποιαδήποτε τέτοια πραγμάτωση ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.15

Για κάθε μη ελέγξιμη πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ υπάρχει πάντα ένας πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} τέτοιος ώστε η πραγμάτωση

$$\{\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T}\}$$

να έχει τη μορφή

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{c}} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{array} \right] \begin{array}{l} \} r \\ \} n-r \end{array} \quad (4.99)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}} = [\bar{\mathbf{c}}_c \quad \bar{\mathbf{c}}_{\bar{c}}]$$

Η πραγμάτωση (4.99) έχει τις ιδιότητες:

- (i). Το $r \times r$ υποσύστημα $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c, \bar{\mathbf{c}}_c\}$ είναι ελέγξιμο.
- (ii). Η συνάρτηση μεταφοράς του υποσυστήματος $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c, \bar{\mathbf{c}}_c\}$ είναι ίδια με τη συνάρτηση μεταφοράς τη αρχικού συστήματος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, δηλ.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{c}}_c(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\bar{\mathbf{b}}_c = \mathbf{H}_c(s) \quad (4.100)$$

Απόδειξη:

Όπως φαίνεται από την (4.98) ο πίνακας ελεγχιμότητας έχει $r < n$ ανεξάρτητες στήλες και συγκεκριμένα τις στήλες \mathbf{b} , $\mathbf{A}\mathbf{b}$, ..., $\mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}$. Ο πίνακας μετασχηματισμού $\mathbf{T} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \hline r & n-r \end{array} \right] \quad (4.101)$$

Ο πίνακας $\mathbf{T}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{T}_1 = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] \quad (4.102)$$

δηλ. είναι πλήρους βαθμού. Ο πίνακας \mathbf{T}_2 αποτελείται από $n-r$ στήλες που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις στήλες του \mathbf{T}_1 , ώστε ο \mathbf{T} να είναι ομαλός.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.62), γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) &= [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{x} \quad \dots \quad \mathbf{x}] \\ &= [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c) & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{Q}_c(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}) \end{aligned} \quad (4.103)$$

λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή των $\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c$ από τις (4.99). Από την (4.103) προκύπτει ότι

$$\mathbf{T}_1 = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] \mathbf{Q}_c^{-1}(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c) \quad (4.104)$$

Αν επιπλέον θέσουμε το νέο ελέγξιμο υποσύστημα στην κανονική μορφή ελεγχιμότητας, τότε

$$\mathbf{Q}_c(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c) = \mathbf{I}$$

και επομένως ο \mathbf{T}_1 ορίζεται από τη σχέση

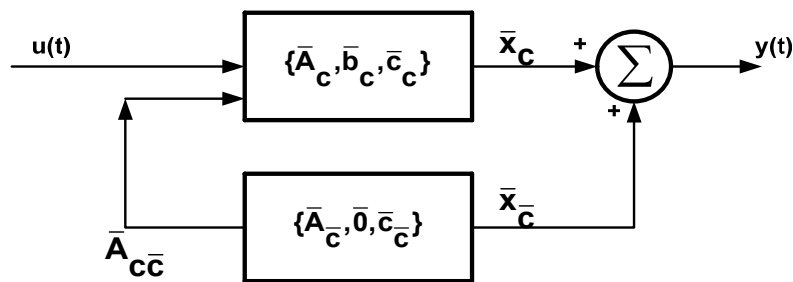
$$\mathbf{T}_1 = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}] \quad (4.105)$$

Οι υπόλοιπες $(n-r)$ στήλες του \mathbf{T} που ανήκουν στον \mathbf{T}_2 εκλέγονται στη συνέχεια έτσι ώστε να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και από τις στήλες του \mathbf{T}_1 . Μία συγκεκριμένη εκλογή είναι το σύνολο των $(n-r)$ διανυσμάτων που είναι ορθογώνια προς τις στήλες του $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b})$.

Το γεγονός ότι το υποσύστημα $\{\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c, \bar{\mathbf{c}}_c\}$ περιλαμβάνει όλες τις ελέγξιμες καταστάσεις του $\{\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}\}$ φαίνεται και από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \bar{\mathbf{c}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{c}} \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1} & -(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\mathbf{A}_{c\bar{c}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= [\bar{\mathbf{c}}_c \quad \bar{\mathbf{c}}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\bar{\mathbf{b}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{c}}_c(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_c)^{-1}\bar{\mathbf{b}}_c = \mathbf{H}_c(s) \end{aligned} \quad (4.106)$$

που δείχνει ότι υπάρχει απαλοιφή των $(n-r)$ μη ελέγξιμων πόλων. Στο Σχ. 4.10 φαίνεται η αποσύνθεση της μη ελέγξιμης μορφής, με το διαχωρισμό των ελέγξιμων και των μη ελέγξιμων καταστάσεων.



Σχήμα 4.10. Αποσύνθεση μιας μη ελέγξιμης πραγμάτωσης.

4.6.2. Παράσταση των μη παρατηρήσιμων πραγμάτων

Έστω μια πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ που δεν είναι παρατηρήσιμη, οπότε ισχύει

$$\text{rank } \mathbf{Q}_o(\mathbf{A}, \mathbf{c}) = r < n \quad (4.107)$$

Για οποιαδήποτε τέτοια πραγμάτωση ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.16

Για κάθε μη παρατηρήσιμη πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ υπάρχει πάντα ένας πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} , τέτοιος ώστε η πραγμάτωση

$$\{\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T}\}$$

να έχει τη μορφή

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & | & \mathbf{0} \\ \hline \bar{\mathbf{A}}_{o\bar{o}} & | & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \\ \} n-r \end{matrix} \quad (4.108)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \text{---} \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}^T = [\bar{c}_0 \quad \mathbf{0}]$$

Η πραγμάτωση (4.108) έχει τις ιδιότητες:

- (i). Το *rxr* υποσύστημα $\{\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{b}}_o, \bar{\mathbf{c}}_o\}$ είναι παρατηρήσιμο.
- (ii). Η συνάρτηση μεταφοράς του υποσυστήματος $\{\bar{\mathbf{A}}_o, \bar{\mathbf{b}}_o, \bar{\mathbf{c}}_o\}$ είναι ίδια με τη συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού συστήματος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, δηλ.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_o(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_o)^{-1}\mathbf{b}_o = \mathbf{H}_o(s) \quad (4.109)$$

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 4.15. Στο Σχ. 4.11 φαίνεται ο διαχωρισμός των παρατηρήσιμων από τις μη παρατηρήσιμες καταστάσεις. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο γενικό Θεώρημα αποσύνθεσης όπου ένα σύστημα δεν μπορεί να είναι ούτε ελέγξιμο, ούτε παρατηρήσιμο.

Θεώρημα 4.17

Για κάθε μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, υπάρχει πάντα ένας πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} , τέτοιος ώστε η πραγμάτωση

$$\{\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{T}\}$$

να οδηγεί το σύστημα στη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4.110)$$

όπου

$$\bar{\mathbf{x}}^T = [\bar{\mathbf{x}}_{c0}^T \quad \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}}^T \quad \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o}^T \quad \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}}^T]$$

και

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CO} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{C\bar{O}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}O} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}\bar{O}} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_{CO} \\ \bar{\mathbf{b}}_{C\bar{O}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}} = [\bar{\mathbf{c}}_{CO} \quad \mathbf{0} \quad \bar{\mathbf{c}}_{\bar{C}\bar{O}} \quad \mathbf{0}]$$

Η πραγμάτωση (4.111) έχει τις ιδιότητες:

- (1). Το υποσύστημα $\{\bar{\mathbf{A}}_{CO}, \bar{\mathbf{b}}_{CO}, \bar{\mathbf{c}}_{CO}\}$ είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο και η συνάρτηση μεταφοράς του υποσυστήματος είναι ίδια με τη συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού συστήματος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, δηλ.

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{c}}_{CO}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{CO})^{-1}\bar{\mathbf{b}}_{CO} \quad (4.112)$$

- (2). Το υποσύστημα

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CO} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{C\bar{O}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_{CO} \\ \bar{\mathbf{b}}_{C\bar{O}} \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{c}}_{CO} \quad \mathbf{0}] \right\}$$

είναι ελέγξιμο, αλλά μη παρατηρήσιμο.

- (3). Το υποσύστημα

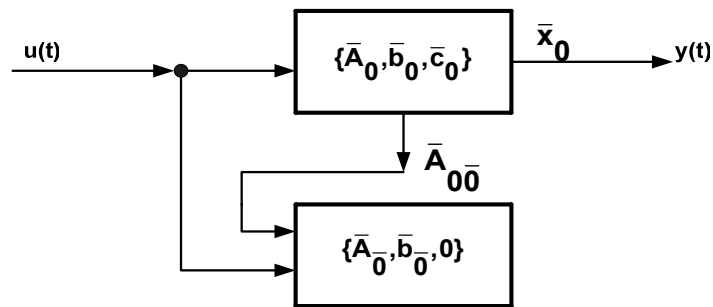
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CO} & \bar{\mathbf{A}}_{13} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}\bar{O}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_{CO} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, [\bar{\mathbf{c}}_{CO} \quad \bar{\mathbf{c}}_{\bar{C}\bar{O}}] \right\}$$

είναι παρατηρήσιμο αλλά μη ελέγξιμο.

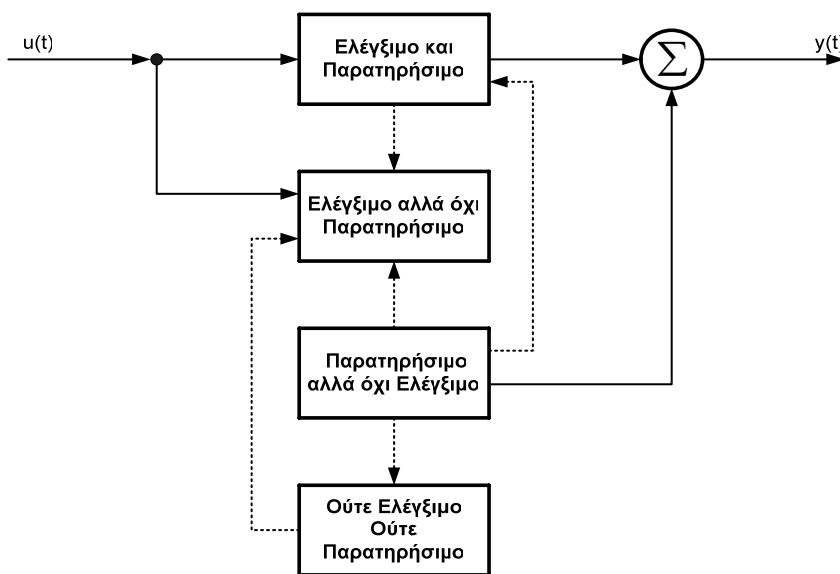
- (4). Το υποσύστημα $\{\bar{\mathbf{A}}_{\bar{C}\bar{O}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$ είναι μη ελέγξιμο και μη παρατηρήσιμο.

Σημειώνουμε ότι οι διαστάσεις των ανωτέρω τεσσάρων υποσυστημάτων είναι μοναδικές. Αντίθετα, δεν είναι μοναδικά ορισμένα στοιχεία των υποπινάκων των $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ και $\bar{\mathbf{c}}$, καθόσον εξαρτώνται από την εκλογή του πίνακα μετασχηματισμού \mathbf{T} . Στο Σχ. 4.12 φαίνεται ο διαχωρισμός των ελέγξιμων, μη ελέγξιμων, παρατηρήσιμων και μη παρατηρήσιμων καταστάσεων. Στην ειδική περίπτωση των διαγωνίων πραγματώσεων οι διακεκομμένες γραμμές που συνδέουν τα υποσυστήματα μεταξύ τους δεν υπάρχουν.

Είναι δυνατό να υποθέσουμε ότι κάθε μη ελέγξιμο και/ή μη παρατηρήσιμο σύστημα μπορεί να τεθεί στις μορφές που περιγράφηκαν στα Θεωρήματα 4.15-4.17, έτσι ώστε να μελετούμε ευκολότερα τη δομή και τις ιδιότητές τους, χωρίς να γνωρίζουμε τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς ομοιότητας.



Σχήμα 4.11. Αποσύνθεση μιας μη παρατηρήσιμης πραγμάτωσης.



Σχήμα 4.12. Κανονική αποσύνθεση των διαγώνιων πραγμάτων.

4.7. Οι έλεγχοι της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας των Ρορον Belevich Hautus (PBH)

Αναπτύχθηκαν διάφορα κριτήρια ελέγχου της ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας από διάφορους ερευνητές, που βασίζονται στις μορφές πραγμάτων οι οποίες παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη Παράγραφο. Επειδή αυτές οι τεχνικές ελέγχου στηρίζονται κατεξοχήν στις εργασίες των Ρορον [5], Belevich [6] και Hautus [7], ονομάζονται έλεγχοι PBH. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα σχετικά Θεωρήματα.

Οι έλεγχοι PBH επιτρέπουν να συμπεράνουμε αν οι ρυθμοί (modes) (δηλ. οι ιδιοτιμές) του συστήματος που σχετίζονται με μια ιδιοτιμή λ είναι μη ελέγξιμοι: ικανή και αναγκαία συνθήκη για ελεγχιμότητα είναι να μην υπάρχει κανένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που να είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα b . Όπως θα δούμε στο **Κεφάλαιο 6**, ένας μη ελέγξιμος ρυθμός αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή το A , η οποία δεν μπορεί να μετακινηθεί υπό την επίδραση ανάδρασης κατάστασης. Η ιδιοτιμή αυτή ονομάζεται μη ελέγξιμη ιδιοτιμή.

Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι ένας ρυθμός ή μια ιδιοτιμή μιας πραγμάτωσης μπορούν να χαρακτηρισθούν ως ελέγξιμες ή μη ελέγξιμες, για κάθε πραγμάτωση του συστήματος, καθόσον είναι αμετάβλητες υπό την επίδραση των μετασχηματισμών ομοιότητας. Αντίθετα, μια κατάσταση μιας πραγμάτωσης χαρακτηρίζεται ως ελέγξιμη ή ως μη ελέγξιμη μόνον όσον αφορά τη συγκεκριμένη πραγμάτωση καθόσον οι καταστάσεις μετασχηματίζονται από τους μετασχηματισμούς ομοιότητας. Οι παραπάνω παρατηρήσεις ισχύουν και για την ιδιότητα της παρατηρησιμότητας.

Θεώρημα 4.18. Έλεγχοι ιδιοτιμών PBH

Πρόταση 1

Ένα ζεύγος $\{A, b\}$ είναι **μη ελέγξιμο**, αν και μόνον αν υπάρχει ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα γραμμής $q \neq 0$, τέτοιο ώστε

$$qA = \lambda q, \quad qb = 0 \quad (4.113)$$

Η σημασία των σχέσεων (4.113) είναι ότι το ζεύγος $\{A, b\}$ είναι ελέγξιμο, αν και μόνον αν δεν υπάρχει γραμμή (ή αριστερό) ιδιοδιάνυσμα του A , που να είναι ορθογώνιο με το b .

Πρόταση 2

Ένα ζεύγος $\{A, c\}$ είναι **μη παρατηρήσιμο**, αν και μόνον αν υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα στήλης $p \neq 0$, τέτοιο ώστε

$$Ap = \lambda p, \quad cp = 0 \quad (4.114)$$

Η σημασία των σχέσεων (4.114) είναι ότι το ζεύγος $\{A, c\}$ είναι μη παρατηρήσιμο, αν και μόνον αν δεν υπάρχει μια στήλη (ή δεξιό) ιδιοδιάνυσμα του A , που να είναι ορθογώνιο με το c .

Απόδειξη:

Πρόταση 1

Ικανή συνθήκη

Αν υπάρχει $q \neq 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει η (4.113), τότε ισχύουν και οι σχέσεις

$$(qA)b = (\lambda q)b = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την $(qA)b = 0$ με λ και χρησιμοποιώντας την $\lambda q = qA$, έχουμε

$$(qA)Ab = (\lambda q)Ab = 0$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι

$$qQ_c(A, b) = q \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = 0$$

Για να ισχύει η ανωτέρω σχέση, ο πίνακας ελεγχιμότητας $Q_c(A, b)$ πρέπει να μην είναι ομαλός.

Αναγκαία συνθήκη

Για την απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν το σύστημα είναι μη ελέγξιμο, τότε υπάρχει ένα διάνυσμα q που να ικανοποιεί την (4.113). Υποθέτουμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο και ότι η πραγμάτωση έχει τεθεί στη μορφή (4.99), οπότε

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{c\bar{c}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\bar{c}} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{b} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_c \\ \mathbf{0} \end{array} \right]$$

όπου $r = \text{rank } \mathbf{Q}_c(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < n$. Φαίνεται τότε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα γραμμής \mathbf{q} που είναι ορθογώνιο προς το \mathbf{b} έχει τη μορφή $\mathbf{q} = [\mathbf{0} \ \mathbf{z}]$, όπου \mathbf{z} είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}_{\bar{c}}$, έτσι ώστε

$$\mathbf{z}\mathbf{A}_{\bar{c}} = \lambda\mathbf{z}$$

Πράγματι, τότε ισχύει

$$\mathbf{q}\mathbf{A} = [\mathbf{0} \ \mathbf{z}]\mathbf{A} = [\mathbf{0} \ \lambda\mathbf{z}] = \lambda\mathbf{q}$$

Αποδεικνύεται έτσι όταν το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ δεν είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα του \mathbf{A} που να είναι ορθογώνιο προς το \mathbf{b} .

Για την απόδειξη της Πρότασης 2 χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της διαδικότητας, σύμφωνα με την οποία το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ είναι παρατηρήσιμο, αν και μόνον αν το ζεύγος $\{\mathbf{A}^T, \mathbf{c}^T\}$ είναι ελέγξιμο. Για να συμβαίνει όμως αυτό το τελευταίο αρκεί να ισχύει

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A}^T = \lambda \mathbf{p}^T, \quad \mathbf{p}^T \mathbf{c}^T = 0$$

που αποτελούν άλλη μορφή των σχέσεων στην (4.114).

Θεώρημα 4.19. Έλεγχος βαθμού PBH

Πρόταση 1

Ένα ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ είναι ελέγξιμο, αν και μόνον αν ισχύει

$$\text{rank} [s\mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{b}] = n, \quad \forall s \tag{4.115}$$

Πρόταση 2

Ένα ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ είναι παρατηρήσιμο, αν και μόνον αν ισχύει

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \tag{4.116}$$

όπου n είναι η διάσταση του τετραγωνικού πίνακα \mathbf{A} .

Απόδειξη:

Πρόταση 1

Αν ισχύει η (4.115), τότε δεν υπάρχει ένα μηδενικό ιδιοδιάνυσμα γραμμής \mathbf{q} , τέτοιο ώστε

$$\mathbf{q}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}, \mathbf{b}] = 0, \quad \text{για οποιοδήποτε } s \text{ δηλ. τέτοιο ώστε}$$

$$\mathbf{q}\mathbf{A} = s\mathbf{q}, \quad \mathbf{q}\mathbf{b} = 0$$

Τότε όμως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.18, το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ είναι ελέγξιμο. Η αναγκαία συνθήκη προκύπτει εύκολα αντιστρέφοντας τα ανωτέρω επιχειρήματα.

Η απόδειξη της συνθήκης (4.116) προκύπτει χρησιμοποιώντας την ανωτέρω απόδειξη και την ιδιότητα της διαδικότητας.

Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις (4.115) και (4.116) ισχύουν ακόμη και για τις ιδιοτιμές του \mathbf{A} , όπου $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Στη συνέχεια θα εξειδικεύσουμε τους ελέγχους PBH για τις διαγωνοποιήσιμες πραγματώσεις.

Διαγωνοποιήσιμες πραγματώσεις

Θεωρούμε το σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

για το οποίο υπάρχει πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{T} που να το οδηγεί στη διαγώνια πραγμάτωση με διαγώνιο πίνακα

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (4.117)$$

όπου $\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$. Από την (4.117) έχουμε $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{A}_d$ και επομένως

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i \quad (4.118)$$

δηλαδή $\{\mathbf{p}_i\}$ και $\{\lambda_i\}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} , αντίστοιχα. Έστω ακόμη ότι \mathbf{q}_i είναι η i -οστή γραμμή του \mathbf{T}^{-1} . Τότε ισχύει

$$\mathbf{q}_i\mathbf{p}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad (4.119)$$

όπου δ_{ij} είναι ο δείκτης Kronecker. Από την (4.117) έχουμε $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}_d\mathbf{T}^{-1}$ και επομένως τα $\{\mathbf{p}_i\}$ είναι τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του \mathbf{A} , δηλαδή

$$\mathbf{q}_i\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{q}_i \quad (4.120)$$

Η αρχική πραγμάτωση $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ μπορεί να μετασχηματισθεί στη διαγώνια μορφή

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}_d \mathbf{u}(t)$$

όπου (βλ. και (4.52))

$$\mathbf{b}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} = [\mathbf{q}_1 \mathbf{b} \quad \mathbf{q}_2 \mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{q}_n \mathbf{b}]^T = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n]^T \quad (4.121)$$

Ο πίνακας ελεγχιμότητας του ζεύγους $\{\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d\}$ δίνεται από τον πίνακα Vandermode της μορφής (4.53). Από την παραπάνω μορφή φαίνεται ότι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι ο $\mathbf{Q}_c(\mathbf{A}_d, \mathbf{b}_d)$ ομαλός, είναι οι:

(i). Όλα τα στοιχεία γ_i του \mathbf{b}_d να είναι μη μηδενικά, δηλ.

$$\gamma_i = \mathbf{q}_i \mathbf{b} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.122)$$

Η (4.122) δείχνει ότι η ελεγχιμότητα χάνεται αν υπάρχει αριστερό ιδιοδιάνυσμα που να είναι ορθογώνιο προς το \mathbf{b} .

(ii). Οι ιδιοτιμές $\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ να είναι διακριτές, δηλ.

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \forall i, j, \quad i \neq j \quad (4.123)$$

Παρόμοια με την ανωτέρω ανάλυση ισχύει για την παρατηρησιμότητα των διαγώνιων μορφών (βλ. (4.56)).

Συμπέρασμα 4.1

Στην περίπτωση των διαγωνοποιήσιμων συναρτήσεων η ύπαρξη ορθογώνιου ιδιοδιανύσματος προς το \mathbf{b} σημαίνει ότι:

- (i) Δεν υπάρχει είσοδος στο υποσύστημα που αντιστοιχεί στο ρυθμό αυτό, οπότε δεν υπάρχει και ελεγχιμότητα.
- (ii) Δεν υπάρχει έξοδος στο υποσύστημα που αντιστοιχεί στο ρυθμό αυτό, οπότε δεν υπάρχει και παρατηρησιμότητα.

Θεώρημα 4.20

Όταν μια διαγωνοποιήσιμη πραγμάτωση έχει μια πολλαπλή ιδιοτιμή, τότε η πραγμάτωση αυτή είναι μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη.

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση διαγωνοποιήσιμης πραγμάτωσης που έχει μια πολλαπλή ιδιοτιμή, έστω $\lambda_1 = \lambda_2$, με δύο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ ότε και ο γραμμικός τους συνδιασμός

$$\mathbf{q} = \gamma_2 \mathbf{q}_1 - \gamma_1 \mathbf{q}_2$$

είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του \mathbf{A} . Για το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{q} όμως ισχύει

$$\mathbf{q}\mathbf{b} = (\gamma_2\mathbf{q}_1 - \gamma_1\mathbf{q}_2)\mathbf{b} = (\mathbf{q}_2\mathbf{b})(\mathbf{q}_1\mathbf{b}) - (\mathbf{q}_1\mathbf{b})(\mathbf{q}_2\mathbf{b}) = 0$$

οπότε σύμφωνα με τον έλεγχο PBH (βλ. (4.113)), το σύστημα δεν είναι ελέγξιμο. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι όταν μια διαγωνοποιήσιμη πραγμάτωση έχει μια πολλαπλή ιδιοτιμή, τότε η πραγμάτωση αυτή είναι μη παρατηρήσιμη.

Συμπέρασμα 4.2

Όταν ο πίνακας \mathbf{A} μιας διαγωνοποιήσιμης πραγμάτωσης στο χώρο κατάστασης έχει μια πολλαπλή ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχούν περισσότερα από ένα ανεξάρτητα ιδιοανύσματα, τότε η πραγμάτωση αυτή είναι μη ελέγξιμη και μη παρατηρήσιμη.

Παράδειγμα 4.8

Ζητείται να διαπιστωθεί αν το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$, είναι παρατηρήσιμο, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.19, θα ελέγξουμε το βαθμό του πίνακα

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4 & -6 & 0 \\ 0 & s-3 & -9 \\ 0 & 0 & s-8 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη περίπτωση στην οποία χάνει βαθμό ο παραπάνω πίνακας είναι όταν $s = 4$ και $c_1 = 0$. Επομένως το ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{c}\}$ είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $c_1 \neq 0$.

Παράδειγμα 4.9

Να αποδειχθεί ότι κάθε ζεύγος $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$, είναι μη ελέγξιμο, όταν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Το σύστημα έχει μια τριπλή ιδιοτιμή $s = \lambda$ επειδή

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - \lambda)^3$$

Κάθε αριστερό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]$ του \mathbf{A} ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{q}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{q}$ απ' όπου προκύπτει

$$[q_1 \ q_2 \ q_3] \mathbf{A} = \lambda [q_1 \ q_2 \ q_3]$$

ή

$$q_1 \lambda = \lambda q_1$$

$$q_1 + \lambda q_2 = \lambda q_2$$

$$\lambda q_3 = \lambda q_3$$

Η πρώτη και η τρίτη από τις παραπάνω σχέσεις είναι ταυτότητες, οπότε δεν συνεισφέρουν πληροφορία για τη δομή των ιδιοδιανυσμάτων. Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι $q_1 = 0$. Επομένως, η γενική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων είναι

$$\mathbf{q} = [0 \ q_2 \ q_3]$$

από την οποία διαπιστώνουμε τώρα ότι στην ιδιοτιμή $s=\lambda$ αντιστοιχούν μόνο δύο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Επειδή μπορεί πάντοτε να βρεθεί ένα ιδιοδιάνθημα \mathbf{q} ορθογώνιο προς το \mathbf{b} , για κάθε \mathbf{b} , συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν είναι ελέγχσιμο, ανεξάρτητα από τη μορφή του \mathbf{b} .

