ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Σχεδίαση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου με χρήση Αλγεβρικών Τεχνικών

(Συνοπτικές σημειώσεις με παραδείγματα)

(Αναπληρωτής Καθηγητής Ι. Μπούταλης)

Ξάνθη, Μάϊος 2004

Α. Γραμμικοί νόμοι ανατροφοδότησης κατάστασης και εξόδου

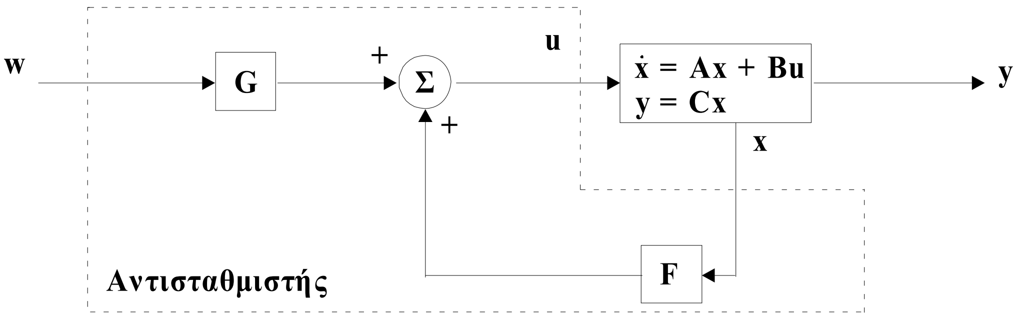
Α.1. Αντισταθμιστές με ανατροφοδότηση κατάστασης

Έστω το Γ.Χ.Α σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ και οι **A, B, C, D** είναι πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Επίσης δίνεται η συγκεκριμένη μορφή του αντισταθμιστή του παρακάτω σχήματος:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gw} \tag{2}$$



Όπου $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{m^*}$ νέο διάνυσμα εισόδου με **m*** εισόδους και **F** και **G** είναι οι άγνωστοι πίνακες του αντισταθμιστή διαστάσεων **mxn** και **mxm*** αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας την **u** στην (1) με την (2) το κλειστό σύστημα γράφεται :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{x} + \mathbf{BGw} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \tag{2.α}$$

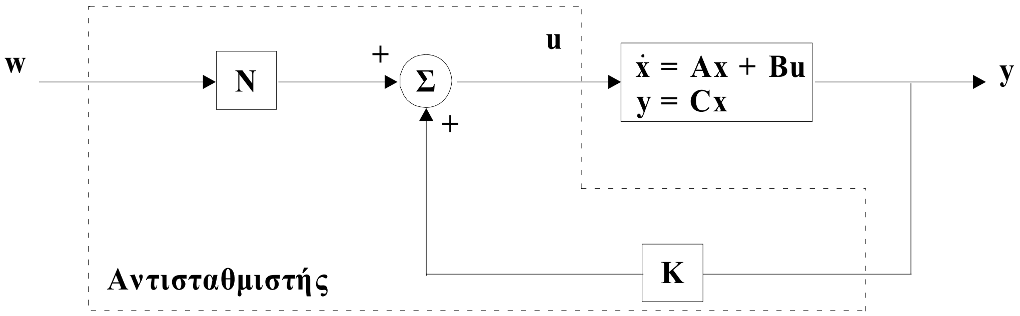
Το πρόβλημα εδώ είναι να προσδιορισθεί ο νόμος ελέγχου (2) δηλαδή να προσδιορισθούν οι πίνακες **F** και **G** έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει προδιαγεγραμμένα χαρακτηριστικά. Τα εκάστοτε προδιαγεγραμμένα χαρακτηριστικά καθορίζουν και ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, όπως π.χ. τη μετατόπιση ιδιοτιμής, την αποσύζευξη εισόδων – εξόδων κ.α.

Α.2. Αντισταθμιστές με ανατροφοδότηση εξόδου

Στην περίπτωση αυτή :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ky} + \mathbf{Nw} \tag{3}$$

όπου **K** και **N** οι άγνωστοι πίνακες του αντισταθμιστή διαστάσεων $\mathbf{m}\times\mathbf{p}$ και $\mathbf{m}\times\mathbf{m}^*$ αντίστοιχα.



Με βάση την (3) η (1) γίνεται

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{x} + \mathbf{BNw} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned} \tag{4}$$

Το πρόβλημα εδώ είναι να προσδιορισθεί ο νόμος ελέγχου, δηλ. να βρεθούν οι πίνακες **K** και **N**, έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει, όπως και στην περίπτωση της ανατροφοδότησης κατάστασης, επιθυμητά προδιαγεγραμμένα χαρακτηριστικά.

Το πρόβλημα σχεδίασης με ανατροφοδότηση κατάστασης και εξόδου παρουσιάζουν μια ομοιότητα που συνοψίζεται στις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{KC} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{N}\end{aligned} \tag{5}$$

Αν ισχύουν οι σχέσεις (5) τότε τα κλειστά συστήματα είναι τα ίδια. Αυτό δείχνει ότι αν το πρόβλημα με ανατροφοδότηση κατάστασης έχει λύση, τότε οι σχέσεις (5) είναι δυνατό να οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος με ανατροφοδότηση εξόδου. Επειδή οι σχέσεις (5) είναι γραμμικές ως προς **K** και **N** αυτό σημαίνει ότι και η διαδικασία λύσης θα είναι απλή.

Οι κύριες διαφορές των δύο μεθόδων είναι οι εξής :
Η μέθοδος ανατροφοδότησης κατάστασης υπερτερεί της μεθόδου ανατροφοδότησης εξόδου στους βαθμούς ελευθερίας. Αυτό συμβαίνει γιατί ο πίνακας **F** έχει **nm** αυθαίρετα στοιχεία ενώ ο **K** έχει $\mathbf{mp} < \mathbf{nm}$ αυθαίρετα στοιχεία

Η μέθοδος όμως της ανατροφοδότησης εξόδου υπερτερεί της μεθόδου ανατροφοδότησης κατάστασης από πρακτικής πλευράς γιατί ενώ το ανατροφοδοτούμενο διάνυσμα εξόδου **y(t)** είναι κατά κανόνα γνωστό και μετρήσιμο, το διάνυσμα κατάστασης **x**(t) είναι σχεδόν πάντοτε δύσκολο να μετρηθεί και γι΄ αυτό αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε ειδικά συστήματα εκτίμησης του διανύσματος **x(t)** που ονομάζονται **<u>παρατηρητές κατάστασης</u>**.

B. <u>Διευθέτηση πόλων (ή μετατόπιση ιδιοτιμών)</u>

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής :
Δίνεται το Γ.Χ.Α σύστημα (1) και ζητείται να προσδιορισθεί ο πίνακας ανατροφοδότησης κατάστασης **F** (ή εξόδου **K**) έτσι ώστε ο πίνακας **A + BF** (ή ο πίνακας **A+BKC**) του κλειστού συστήματος να έχει ως ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n$. Δηλαδή

$$|\text{sI-A-BF}| = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

$$|\text{sI-A-BKC}| = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$$

Το πρόβλημα της μετατόπισης των ιδιοτιμών έχει μεγάλη πρακτική σημασία γιατί οι ιδιοτιμές διαδραματίζουν βασικό ρόλο στη συμπεριφορά ενός συστήματος. Έτσι με την κατάλληλη επιλογή του πίνακα **F** (ή **K**) ένα ασταθές ανοικτό σύστημα μετατρέπεται σε ένα ευσταθές κλειστό ή ένα ταχύ ανοικτό σύστημα σε ένα λιγότερο ή περισσότερο ταχύ κλειστό σύστημα.

B.1 <u>Διευθέτηση πόλων με ανατροφοδότηση κατάστασης</u>

<u>Θεώρημα B.1</u> Οι ιδιοτιμές του συστήματος (1) μπορούν να μετατοπισθούν σε οποιεσδήποτε αυθαίρετες θέσεις $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n}$ στο μιγαδικό επίπεδο με τον πίνακα ανατροφοδότησης κατάστασης **F**, τότε και μόνο τότε αν το σύστημα είναι ελέγξιμο (το θεώρημα απέδειξε πρώτος ο Wohman το 1967).

Ο πίνακας **F** υπολογίζεται πολύ εύκολα στην περίπτωση όπου το υπό έλεγχο σύστημα <u>είναι μιας εισόδου</u> και στην <u>κανονική μορφή φάσης</u>, οπότε ο πίνακας **F** είναι το $\mathbf{n\times 1}$ διάνυσμα $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots f_n)$. Αν το σύστημα δεν είναι στην κανονική μορφή φάσης (ελέγξιμη κανονική μορφή) το μετατρέπουμε σε τέτοια μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας.
Πράγματι αν υποθέσουμε ότι το σύστημα έχει τη μορφή :

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{Ax+Bu}$$

όπου

$$\text{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τότε ο πίνακας **A + Bf** του κλειστού συστήματος παίρνει τη μορφή

$$A+Bf=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -(a_0-f_1) & -(a_1-f_2) & -(a_2-f_3) & \cdots & -(a_{n-1}-f_n) \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού συστήματος θα είναι :

$$|\, sI - A - Bf \,| = s^n + (\alpha_{n-1} - f_n)\, s^{n-1} + \ldots + (\alpha_1 - f_2)s + (\alpha_0 - f_1)$$

Αν το επιθυμητό χορικό πολυώνυμο έχει τη μορφή :

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i) = s^n + y_{n-1}s^{n-1} + \ldots + y_1 s + y_0$$

τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοίων δυνάμεων τους στη παρακάτω επιθυμητή σχέση

$$s^n + (\alpha_{n-1} - f_n)s^{n-1} + \ldots + (\alpha_1 - f_2)s + (\alpha_0 - f_1) = s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \gamma_1 s + \gamma_0$$

θα πάρουμε για τα στοιχεία τον πίνακα $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ την σχέση

$$\mathbf{f_i} = \alpha_{i-1} - \gamma_{i-1} \quad ,i = 1, 2, \ldots n \tag{6}$$

Τα βήματα για τον υπολογισμό των στοιχείων f_i περιγράφονται αμέσως παρακάτω.

Βήματα Σχεδίασης για διευθέτηση πόλων

Βήμα 1: Γίνεται έλεγχος της ελεγξιμότητας του συστήματος. Αν το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο τότε ακολουθούν τα επόμενα βήματα.

Βήμα 2: Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα **A:**

$$|\, sI - A \,| = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

καθορίζονται οι τιμές των $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$.

Βήμα 3: Αν το σύστημα δεν βρίσκεται στην κανονική μορφή φάσης (η οποία είναι μία κανονική ελέγξιμη μορφή και ως εκ τούτον είναι εκ κατασκευής πάντα ελέγξιμη) τότε εφόσον είναι ελέγξιμο υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας που το μετασχηματίζει σ΄ αυτή τη μορφή. (Λήμα 4.3, σελ.4.3-9 του βιβλίου).
Ο πίνακας **T** που εκφράζει το μετασχηματισμό ομοιότητας υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q_C W} \tag{7}$$

όπου $\mathbf{Q_c}$ είναι ο πίνακας ελεγξιμότητας (έχει υπολογιστεί ήδη από το βήμα 1).

$$\mathbf{Q_c = [\, B \;\vdots\; AB \;\vdots\; A^{n-1}B]}$$

και ο **W** είναι ο

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Αν το σύστημα βρίσκεται ήδη στη κανονική μορφή φάσης τότε **T = I** (ο μοναδιαίος πίνακας)

<u>Βήμα 4</u> : Από τις επιθυμητές ιδιοτιμές (λ_i) βρίσκουμε τις τιμές των συντελεστών του νέου χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i) = s^n + y_{n-1}s^{n-1} + \ldots. + y_1 s + y_0$$

<u>Βήμα 5</u> : Το ζητούμενο διάνυσμα ανάδρασης κατάστασης **f** βρίσκεται από τον τύπο

$$f = (f_1, f_2, \ldots f_n) = [\, \alpha_0 - \gamma_0 \;\vdots\; \alpha_1 - \gamma_1 \;\vdots \ldots \vdots\; \alpha_{n-1} - \gamma_{n-1}\,]\; T^{-1} \tag{9}$$

[*<u>επεξήγηση</u>* : πράγματι η μορφή $\widehat{f} = \left[a_0 - y_0 \vdots a_1 - y_1 \vdots \ldots. \vdots a_{n-1} - y_{n-1}\right]$ προκύπτει από την ανάλυση όταν το σύστημα βρίσκεται στην κανονική μορφή φάσης (σχέση 6). Αν το σύστημα δεν βρίσκεται στην μορφή αυτή μπορεί να μετασχηματισθεί μέσω του πίνακα ομοιότητας **T**. Σ΄ αυτή την περίπτωση θα ισχύει $\widehat{f} = fT \Rightarrow f = \widehat{f}T^{-1}$ (που είναι η σχέση 9). Οι συντελεστές $\boldsymbol{\alpha_\iota}$ είναι οι ίδιοι είτε πρόκειται για το αρχικό μας σύστημα είτε για το αλγεβρικά ισοδύναμό του σύστημα σε κανονική μορφή φάσης].

<u>Παρατήρηση :</u> Αν το σύστημα είναι μικρής τάξης ($\mathbf{n} \leq \mathbf{3}$) τότε η απ΄ ευθείας αντικατάσταση του πίνακα (ή διανύσματος στην περίπτωση της μιας εισόδου) **f** στο επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίσως είναι ευκολότερη .
π.χ. έστω $\mathbf{f = [}\, f_1\; f_2\; f_3 \,\mathbf{]}$

Αν αντικαταστήσουμε το **f** στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο | s**I** – **A** – **Bf** | και το εξισώσουμε με $\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)$ όπου λ_i οι επιθυμητές ιδιότητες έχουμε :

$$\left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{Bf} \right| = (s-\lambda_i)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3) \tag{10}$$

Επειδή αμφότερες οι πλευρές της εξίσωσης είναι πολυώνυμα του s εξισώνοντάς τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του **s** είναι δυνατό να υπολογιστούν τα f_1, f_2, f_3 . Η διαδικασία αυτή γίνεται πολύ κουραστική αν $\mathbf{n} \geq \mathbf{4}$.

Διευθέτηση πόλων – Τύπος του Ackermann

Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του πίνακα (ή διανύσματος) ανατροφοδότησης κατάστασης **f** χωρίς να υπολογίσουμε τον πίνακα ομοιότητας **T** (που μετασχηματίζει το δοθέν σύστημα στην κανονική μορφή φάσης) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο του Ackermann.

$$\mathbf{f} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{\Phi}(\mathbf{A}) \tag{11}$$

όπου **Φ(A)** είναι η μητρική μορφή του επιθυμητού χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Δηλαδή αν $\Phi(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i) = s^n + y_{n-1}s^{n-1} + \ldots + y_1 s + y_0$ το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όπου λ_i οι επιθυμητές ιδιοτιμές τότε

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \gamma_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \gamma_1\mathbf{A} + \gamma_0\mathbf{I} \tag{12}$$

Προσοχή : Βασική προϋπόθεση εφαρμογής του τύπου Ackermann είναι η ύπαρξη πλήρους ελεγξιμότητας του αρχικού μας συστήματος

Άσκηση 1 Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{όπου } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι ασταθές.

β) Χρησιμοποιώντας έλεγχο με ανάδραση κατάστασης (**u = F x**) βρείτε το κατάλληλο **F** ώστε οι πόλοι του κλειστού συστήματος (δηλαδή οι ιδιοτιμές του **A + BF**) να είναι οι **s = -1.8** $\pm$ **j 2.4.** Δοκιμάστε και τις τρεις μεθόδους που αναφέραμε έως τώρα.

Λύση άσκησης 1

α) $$|sI - A| = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{bmatrix} = s^2 - 20.6 = 0 \Rightarrow s = \pm 4.539$$

Η μία ρίζα βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

β) Επιθυμούμε οι νέοι πόλοι να είναι οι :
$s_1 = -1.8 + j\,2.4$, $s_2 = -1.8 - j\,2.4$

<u>Βήμα 1</u> : Πρώτα ελέγχουμε την ελεγξιμότητα του συστήματος μέσω του πίνακα ελεγξιμότητας.

$$Q_c = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } \rho(Q_c) = 2$$

Άρα το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο και κατά συνέπεια είναι δυνατή η αυθαίρετη διευθέτηση των πόλων του.

<u>Μέθοδος 1</u>

<u>Βήμα 2.</u> Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $|\,s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,| = s^2 - 20.6$
υπολογίζουμε τα $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -20.6$

<u>Βήμα 3.</u> Το σύστημα βρίσκεται ήδη σε κανονική μορφή φάσης. Άρα **T = I.**

<u>Βήμα 4.</u> Από τις επιθυμητές ιδιοτιμές του κλειστού συστήματος υπολογίζουμε τους συντελεστές του επιθυμητού χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = (s + 1.8 - j\,2.4) (s + 1.8 + j\,2.4) =$
$= s^2 + 3.65 + 9 = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$
Άρα $\gamma_1 = 3.6$, $\gamma_0 = 9$

<u>Βήμα 5.</u> Τα στοιχεία του πίνακα **f** υπολογίζονται από τη σχέση

$f = [\, \alpha_0 - \gamma_0 \mid \alpha_1 - \gamma_1 \,]\, T^{-1} = [\, \alpha_0 - \gamma_0 \mid \alpha_1 - \gamma_1 \,]\, I^{-1} =$
$= [\, \alpha_0 - \gamma_0 \mid \alpha_1 - \gamma_1 \,] = [\, -29.6 \mid -3.6 \,]$

<u>Μέθοδος 2</u> Στη μέθοδο 2 αντικαθιστούμε κατ΄ ευθείαν τον πίνακα **f** = [f_1 f_2] στο επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BF}| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} s & -1 \\ -20.6 \cdot f_1 & s - f_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 - f_2 s - 20.6 - f_1$$

Το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι : $s^2 + 3.65 + 9$
εξισώνοντας τους συντελεστές των δυο πολυωνύμων έχουμε :
f_2 = -3.6, f_1 = -29.6

<u>Μέθοδος 3</u> Τύπος του Ackermann

$\Phi(s) = s^2 + 3.65 + 9$

$\mathbf{\Phi(A) = A^2} + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + 3.6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + 9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f = -}$ **[** $0\ 1$ **] [B ¦ AB]** $^{-1}$ $\mathbf{\Phi(A) =}$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix}$$

Γ. <u>Αποσύζευξη εισόδων – εξόδων</u>

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής :

Δίνεται το Γ.Χ.Α σύστημα που περιγράφεται από τις (1) με ίσο αριθμό εισόδων και εξόδων, δηλαδή **p = m** και ζητείται να προσδιορισθούν οι πίνακες **F** και **G** του νόμου ανατροφοδότησης κατάστασης (ή οι πίνακες **K** και **N** του νόμου ανατροφοδότησης εξόδου) έτσι ώστε κάθε είσοδος του προκύπτοντος κλειστού συστήματος να επηρεάζει μία και μόνο έξοδό του και αντίστροφα κάθε έξοδος του κλειστού συστήματος να επηρεάζεται από μία και μόνο είσοδό του.
Δηλαδή να ισχύει η σχέση :

$$y_i = \mathbf{f}(u_i)\ ,\ i = 1, 2, m \tag{13}$$

Ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος (2.α) θα είναι

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BF}\,)^{-1}\ \mathbf{BG} \tag{14}$$

Και ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς $\hat{\mathbf{H}}(s)$ του κλειστού συστήματος (4) θα είναι

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{C}(\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BKC}\,)^{-1}\ \mathbf{BN} \tag{15}$$

Επειδή $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\ \mathbf{\Omega}(s)$ (**ή** $\mathbf{Y}(s) = \hat{\mathbf{H}}(s)\,\mathbf{\Omega}(s)$) ο ισοδύναμος ορισμός της αποσύζευξης εισόδων – εξόδων είναι ο εξής :

Να προσδιορισθούν τα **F** και **G** (ή τα **K** και **N**) έτσι ώστε ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς **H**(*s*) (ή $\hat{\mathbf{H}}(s)$) να είναι ομαλός και διαγώνιος.

Αν ο πίνακας **H**(*s*) είναι ομαλός και διαγώνιος δηλαδή είναι της μορφής

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{mm}(S) \end{bmatrix} \quad \text{με } |\mathbf{H}(s)| \neq 0$$

τότε η σχέση $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\ \mathbf{\Omega}(s)$ γράφεται ως εξής

$$y_i(s) = h_{ii}(s)\ \omega_i(s) \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{16}$$

που είναι η αντίστοιχη σχέση της (13).

Βασική επιδίωξη της αποσύζευξης ενός συστήματος είναι να καταστήσουμε κάθε έξοδο του συστήματος συνάρτηση μιας και μόνο εισόδου, δηλαδή να ανάγουμε ένα σύστημα πολλών εξόδων σε επί μέρους συστήματα μιας εισόδου - μιας εξόδου. Το γεγονός αυτό απλοποιεί σημαντικά τη μελέτη αλλά και τον περαιτέρω έλεγχο του συστήματος. Γι΄ αυτό, το πρόβλημα της αποσύζευξης έχει μεγάλη πρακτική σημασία.

Γ.1 Αποσύζευξη με ανατροφοδότηση κατάστασης

Στην περίπτωση της αποσύζευξης εισόδων – εξόδων με ανατροφοδότηση κατάστασης ισχύει το παρακάτω θεώρημα (**Falb, Wolovich 1967**)

Θεώρημα Γ.1

Το σύστημα (2α) είναι αποσυζεύξιμο με το νόμο ανατροφοδότησης κατάστασης (2) αν και μόνο αν ο πίνακας $\mathbf{B}^+$ είναι ομαλός (δηλαδή $\det(\mathbf{B}^+) \neq 0$) όπου

$$\mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m\mathbf{A}^{d_m}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{17}$$

όπου $\mathbf{C}_i$ είναι η i-οστή γραμμή του πίνακα $\mathbf{C}$ και d_1, d_2, … d_m είναι ακέραιοι αριθμοί, που υπολογίζονται ως εξής:

$$d_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \min j : \mathbf{C}_{\mathrm{i}}\mathbf{A}^{\mathbf{j}}\mathbf{B} \neq 0, \quad j = 0,1,\ldots n-1 \\ \\ n-1 \;\alpha\nu\; \mathbf{C}_{\mathrm{i}}\mathbf{A}^{\mathbf{j}}\mathbf{B} = 0 \quad \gamma\iota\alpha\; \acute{o}\lambda\alpha\; \tau\alpha\; j \end{cases} \tag{18}$$

Ένα ζεύγος πινάκων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ που ικανοποιούν το πρόβλημα της αποσύζευξης είναι το εξής:

$$\mathbf{F = - (B^+)^{-1} A^+} \tag{19α}$$

$$\mathbf{G = (B^+)^{-1}} \tag{19β}$$

Όπου

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{d_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m\mathbf{A}^{d_m+1} \end{bmatrix} \tag{20}$$

Από το θεώρημα Γ1 προκύπτει ότι θα πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε τον πίνακα $\mathbf{B}^+$ κα στη συνέχεια να υπολογίσουμε την ορίζουσά του. Αν $\det(\mathbf{B}^+) = 0$, αυτό σημαίνει ότι η αποσύζευξη δεν είναι δυνατή με ανατροφοδότηση της μορφής (2), δηλαδή δεν υπάρχουν πίνακες $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ τέτοιοι ώστε ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς $\mathbf{H}(s)$ να μπορεί να γίνει διαγώνιος και ομαλός. Αν όμως $|\mathbf{B}^+| \neq 0$ τότε οι σχέσεις (19), (20) προσδιορίζουν τους πίνακες **F** και **G** που καθιστούν τον πίνακα **H**(*s*) διαγώνιο και ομαλό.

Παράδειγμα Γ.1

Έστω το σύστημα της μορφής (1) όπου

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

είναι το σύστημα αποσυζεύξιμο;

Λύση

Προσδιορίζουμε τους ακέραιους d_1 και d_2 σύμφωνα με την (18). Έχουμε :

i = 1 :

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A}^0\mathbf{B}=\mathbf{C}_1\mathbf{I}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\end{bmatrix}\neq 0 \text{ , Άρα } j=0$$

Το $\mathbf{C_1}$ $\mathbf{A^1}$ $\mathbf{B}$ δεν χρειάζεται να υπολογιστεί επειδή έχουμε ήδη βρει το ελάχιστο **j** **(j=0)** για το οποίο ισχύει $\mathbf{C_1\ A^j\ B}\ \neq \mathbf{0}$

i = 2 :

$$\mathbf{C}_2\mathbf{A}^0\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$$\mathbf{C}_2\mathbf{A}^1\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8\end{bmatrix}\neq 0$$

Άρα $\mathbf{min\ j : (C_2\ A^j\ B \neq 0) = 1}$

Άρα $d_1 = 0$**,** $d_2 = 1$ επομένως ο πίνακας $\mathbf{B}^+$ θα είναι

$$\mathbf{B}^+=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1\mathbf{A}^{0}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

και $\mathbf{det(B^+) = 0}$ άρα το δοθέν υπό έλεγχο σύστημα δεν είναι αποσυζεύξιμο με τον γραμμικό νόμο ανατροφοδότησης κατάστασης (2).

Παράδειγμα Γ.2

Έστω το σύστημα της μορφής (1) όπου

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Να βρεθούν οι πίνακες **F** και **G** ώστε το κλειστό σύστημα να είναι αποσυζευγμένο.

<u>Λύση</u>

Υπολογίζουμε τους ακέραιους αριθμούς d_i , $i = 1, 2, \ldots m$. Δηλαδή τους d_1, d_2 αφού **m =2** (**m** οι είσοδοι).

<u>i = 1 :</u>

$$\mathbf{C}_1\mathbf{A}^0\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

άρα το ελάχιστο των **j** για τα οποία ισχύει $\mathbf{C_1\ A^j\ B} \neq \mathbf{0}$ είναι το $\mathbf{j = 0}$. Άρα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα $\mathbf{C_1\ A^1\ B}$, $\mathbf{C_1\ A^2\ B}$. Άρα $\mathbf{d_1 = 0}$

<u>i = 2 :</u>

$$\mathbf{C}_2\mathbf{A}^0\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{C}_2\mathbf{A}^1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \neq 0$$

άρα $\mathbf{d_2 = 1}$

Επομένως ο πίνακας $\mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{det(B^+)} = -4 \neq 0$ άρα το σύστημα είναι αποσυζεύξιμο με το νόμο (2) $\rightarrow$ $\mathbf{u = Fx + G\omega}$. Προκειμένου να προσδιορίσουμε τους πίνακες **F** και **G** από τις (19.α.β) θα πρέπει πρώτα να υπολογίζουμε τον πίνακα $\mathbf{A^+}$. Από την (20) έχουμε :

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{d_1+1} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^{d_2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Και οι πίνακες **G** και **F** θα είναι

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}^+)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F = -(B^+)^{-1}A^+ = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Το αποσυζευγμένο κλειστό σύστημα θα είναι :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{(A + BF)x + BG\omega},$$
$$\mathbf{y = Cx}$$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των **A, B, C, F** και **G** στο παραπάνω σύστημα θα έχουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}\cdot\mathbf{x} + \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\varpi \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού συστήματος θα είναι :

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BG} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s^2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας **H(*s*)** είναι διαγώνιος και ομαλός, όπως εξάλλου αναμενόταν.
Από την **y(*s*) = H(*s*) Ω(*s*)** προκύπτει

$$y_{1(S)=} \frac{1}{s}\varpi_1(s), y_2(s) = \frac{1}{\mathrm{s}^2}\varpi_2(s)$$

Δηλαδή $\dot{y}_1$ **(t) =** ω_1(t) **,** $\ddot{y}_2$ (t) **=** ω_2(t) στο πεδίο του χρόνου ή με άλλα λόγια η y_1 είναι συνάρτηση μόνο της ω_1 και η y_2 μόνο της ω_2**.**

Δ. Σχεδίαση παρατηρητών κατάστασης (state observers)

Στα προηγούμενα κεφάλαια, στη σχεδίαση συστημάτων για διευθέτηση πόλων και αποσύζευξη εισόδων εξόδων όπου χρησιμοποιήθηκε η ανατροφοδότηση κατάστασης, έγινε η υπόθεση ότι όλες οι μεταβλητές κατάστασης υπάρχουν και χρησιμοποιούνται στην ανάδραση. Στην πράξη όμως δεν είναι δυνατό να έχουμε μετρήσεις όλων των μεταβλητών κατάστασης. Κατά συνέπεια υπάρχει η ανάγκη εκτίμησης των μη διαθέσιμων μεταβλητών κατάστασης. Η μέθοδος της διαφόρισης κάποιων μεταβλητών κατάστασης για την απόκτηση των άλλων πρέπει να αποφεύγεται γιατί όπως γνωρίζουμε οι διαφοριστές κατά κανόνα ενισχύουν τον θόρυβο που ενδεχομένως υπάρχει σε ένα σήμα (το σήμα εδώ είναι η μέτρηση μιας μεταβλητής κατάστασης ή η μέτρηση της εξόδου). Αντί της διαφόρισης προτιμάται η μέθοδος της σχεδίασης ενός συστήματος που εκτιμά τις μεταβλητές κατάστασης με βάση τις διαθέσιμες μετρήσεις των εξόδων και των μεταβλητών ελέγχου (ή εισόδων).

Η εκτίμηση των μη μετρήσιμων μεταβλητών κατάστασης έχει επικρατήσει να καλείται παρατήρηση. Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για τον παρατηρητή κατάστασης :

Παρατηρητής κατάστασης : Μια συσκευή (ή ένα πρόγραμμα υπολογιστή) που εκτιμά (ή παρατηρεί) τις μεταβλητές κατάστασης με βάση τις μετρήσεις της εξόδου (ων) και των μεταβλητών ελέγχου λέγεται παρατηρητής κατάστασης.

Αν ο παρατηρητής κατάστασης εκτιμά όλες τις καταστάσεις του συστήματος (ανεξάρτητα από το αν αυτές είναι μετρήσιμες ή όχι) τότε λέγεται παρατηρητής κατάστασης πλήρους βαθμού (ή τάξης). Ο παρατηρητής κατάστασης που παρατηρεί μόνο το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος των μεταβλητών κατάστασης ονομάζεται παρατηρητής μειωμένης τάξης.

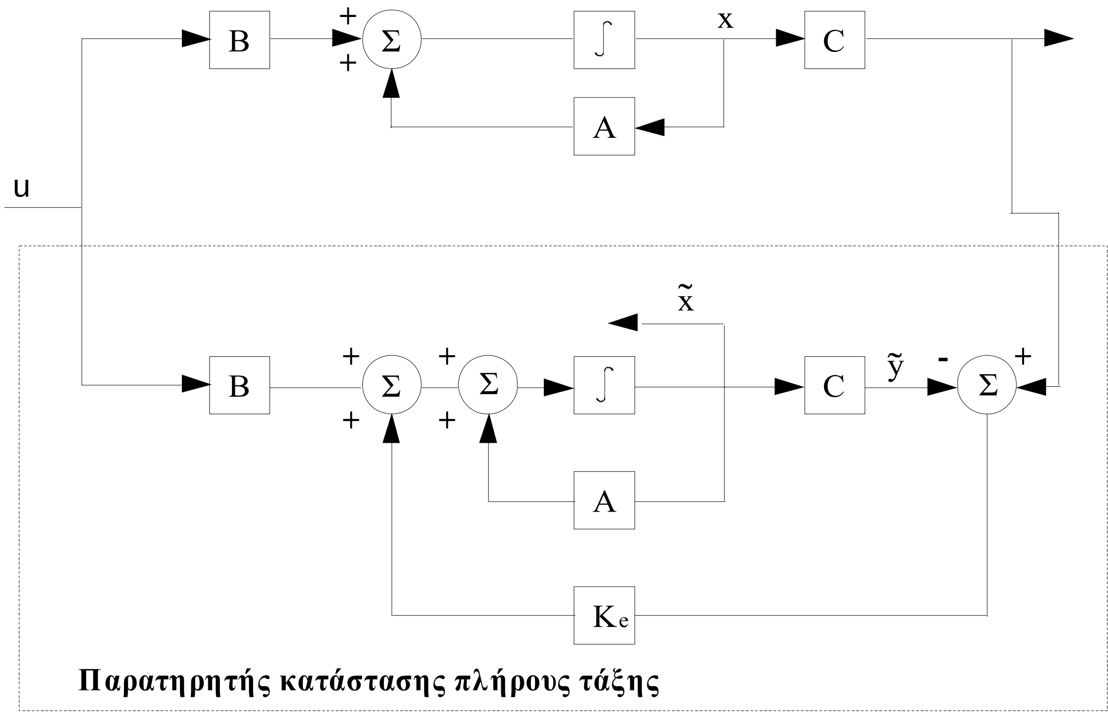
Όπως είναι φυσικό η έννοια της παρατηρησιμότητας παίζει σημαντικό ρόλο στη σχεδίαση παρατηρητών κατάστασης.
Έστω το σύστημα που ορίζεται από τις

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned} \tag{Δ.1}$$

Έστω επίσης $\tilde{\mathbf{x}}$ η εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{x}$, εκτίμηση που γίνεται σύμφωνα με το δυναμικό μοντέλο

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + Bu + K_e(y - C\tilde{\mathbf{x}}) \tag{Δ.2}$$

και σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα Δ.1.

Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ο παρατηρητής έχει σαν εισόδους του την έξοδο **y** και την είσοδο **u** του αρχικού συστήματος και δίνει σαν έξοδό του την παρατήρηση $\tilde{\mathbf{x}}$. Ο τελευταίος όρος της (Δ.2) είναι ένας όρος διόρθωσης που περιλαμβάνει τη διαφορά μεταξύ της εκτιμούμενης εξόδου $\mathbf{C}\tilde{x}=\tilde{y}$ και της πραγματικής y. Ο πίνακας **Ke** είναι ένας πίνακας βάρους.

Ο όρος διόρθωσης ¨παρακολουθεί¨ την κατάσταση $\tilde{x}$ και βοηθά στη μείωση των αποτελεσμάτων που προκαλεί η διαφορά του πραγματικού συστήματος από το δυναμικό μοντέλο.

Δ.1 <u>**Παρατηρητής κατάστασης πλήρους τάξης**</u>

Έστω ότι η τάξη του παρατηρητή κατάστασης είναι ίδια με αυτή του συστήματος. Για να πάρουμε την εξίσωση σφάλματος του παρατηρητή έχουμε :

$$e = x - \tilde{x}$$

και

$$\begin{aligned}(\Delta 1)-(\Delta 2) \Rightarrow \dot{x}-\dot{\tilde{x}} &= Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) = \\ &= (A-K_eC)(x-\tilde{x}) \Rightarrow \\ \dot{e} &= (A-K_eC)e \end{aligned} \qquad (\Delta.3)$$

Η (Δ3) μας λέει ότι η δυναμική συμπεριφορά του διανύσματος λάθους καθορίζετε από τις ιδιοτιμές του πίνακα (**A – K$_e$C**). Αν ο πίνακας **A – K$_e$C** είναι ευσταθής, το σφάλμα θα συγκλίνει στο μηδέν για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα σφάλματος **e(0)**. Έτσι, το $\tilde{\mathbf{x}}$ **(t)** θα συγκλίνει στο **x(t)** ανεξάρτητα από τις αρχικές τιμές **x(0)** και $\tilde{\mathbf{x}}$ **(0)**. Αν οι ιδιοτιμές του πίνακα **A – K$_e$C** επιλεγούν έτσι ώστε η δυναμική συμπεριφορά του **e** να είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και αρκετά γρήγορη, τότε οποιοδήποτε διάνυσμα σφάλματος θα τείνει στο μηδέν αρκετά γρήγορα.

Όπως είδαμε και στο πρόβλημα της διευθέτησης πόλων αν το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο είναι δυνατό να καθορισθεί ο πίνακας $\mathbf{K_e}$ έτσι ώστε το $\mathbf{A} - \mathbf{K_e C}$ να έχει οποιεσδήποτε επιθυμητές τιμές.

Δ.1.1 <u>**Το δυαδικό πρόβλημα**</u>

Όπως φάνηκε από την προηγούμενη ανάλυση, το πρόβλημα της σχεδίασης ενός παρατηρητή πλήρους τάξης ανάγεται στο πρόβλημα διευθέτησης πόλων.

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned}$$

Για τη σχεδίαση ενός παρατηρητή κατάστασης του συστήματος μπορούμε να λύσουμε το δυαδικό πρόβλημα, δηλαδή να λύσουμε το πρόβλημα διευθέτησης πόλων για το δυαδικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}^*\mathbf{z} + \mathbf{C}^*\mathbf{u} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{B}^*\mathbf{z} \end{aligned}$$

(όπου * υποδηλώνει τον μιγαδικό συζυγή και ανάστροφο. Αν ο A είναι πραγματικός $A^*=A^T$)

Έχει γίνει η υπόθεση ότι το σήμα ελέγχου είναι το

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Kz} \tag{Δ.4}$$

Η (Δ.4) είναι υποπερίπτωση της (2) όπου

$$\mathbf{F} = -\mathbf{K},\ \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{Δ.5}$$

Αν το δυαδικό σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο τότε μπορεί να βρεθεί πίνακας ανάδρασης κατάστασης **K** τέτοιος ώστε ο πίνακας $\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K}$ να έχει ένα επιθυμητό σύνολο ιδιοτιμών $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Δηλαδή να ισχύει

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = (s - \lambda_1)\,(s - \lambda_2)\,\ldots\,(s - \lambda_n).$$

Δεδομένου ότι οι ιδιοτομές των $(\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})$ και $(\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})$ είναι οι ίδιες, έχουμε :

$$s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})| = |s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}^*\mathbf{C})|$$

Συγκρίνοντας το χαρ/κό πολυώνυμο $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}^* - \mathbf{C}^*\mathbf{K})|$ με το χαρ/κό πολυώνυμο $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K_e}^*\mathbf{C})|$ για το σύστημα του παρατηρητή συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{K_e} = \mathbf{K}^* \tag{Δ.6}$$

Δηλαδή ο πίνακας **K** που προκύπτει από το πρόβλημα της διευθέτησης των πόλων του δυαδικό συστήματος και ο πίνακας $\mathbf{K_e}$ του παρατηρητή κατάστασης συνδέονται με τη σχέση (Δ.6).

Δ.1.2. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για παρατήρηση κατάστασης

Όπως είδαμε παραπάνω για να καθορισθεί ο $\mathbf{K_e}$ αρκεί να μπορεί να λυθεί το πρόβλημα διευθέτησης πόλων για το δυαδικό σύστημα. Για να ισχύει όμως αυτό θα πρέπει το δυαδικό σύστημα να είναι ελέγξιμο, θα πρέπει δηλαδή να ισχύει :

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \vdots \cdots \middle| (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right]\right) = n \qquad (\Delta.7)$$

Αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη και η οποία υποδηλώνει ότι το σύστημα θα πρέπει να είναι παρατηρήσιμο.

Δ.1.3. Μέθοδοι Σχεδίασης παρατηρητών κατάστασης πλήρους τάξης

Η σχεδίαση ενός παρατηρητή κατάστασης, συνίσταται, σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, στον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{K_e}$, εφόσον φυσικά το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Πρώτο βήμα λοιπόν σε κάθε μέθοδο είναι ο έλεγχος της παρατηρησιμότητας του αρχικού συστήματος (Δ.1).

Μέθοδος 1 : Απ΄ ευθείας αντικατάσταση του πίνακα $\mathbf{K_e}$ στο επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Αν το σύστημα είναι μικρής τάξης $n \leq 3$ υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{K_e} = [k_{e1}\ k_{e2}\ ...\ k_{en}]^T$ με απ΄ ευθείας αντικατάσταση του $\mathbf{K_e}$ στην εξίσωση του επιθυμητού χαρ/κού πολυωνύμου :

$$\left|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\right| = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_i)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του s σε αμφότερα τα μέλη υπολογίζουμε το στοιχείο ke_i του πίνακα $\mathbf{K_e}$. Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά κουραστική για $n \geq 4$.
Η δεύτερη και η τρίτη μέθοδος που ακολουθούν στηρίζονται στο δυαδικό πρόβλημα, δηλαδή στον υπολογισμό του $\mathbf{K_e}$ μέσω της διευθέτησης πόλων του δυαδικού συστήματος.

Μέθοδος 2 : Τύπος του Ackermann

Ο πίνακας $\mathbf{K}$ που δίνει τη λύση στο πρόβλημα της διευθέτησης πόλων του δυαδικού συστήματος δίνεται από τον τύπο του Ackermann (σχέσεις 11, 12)

$\mathbf{K} = [0\ 0\ ...\ 0\ 1]\ [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\ \mathbf{C}^* \vdots\ ...\ (\mathbf{A}^*)^{n-1}\ \mathbf{C}^*]^{-1}\ \mathbf{\Phi}\ (\mathbf{A}^*)$

(η μόνη διαφορά με τη σχέση (11) είναι η $\mathbf{F} = -\mathbf{K}$, δηλαδή διαφορά στο πρόσημο λόγω της (Δ.5)).

Όπως όμως είδαμε προηγουμένως (σχέση Δ.6)

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}^*$$

άρα

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{\Phi}(\mathbf{A})\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\Delta.8)$$

όπου $\varphi(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$ το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Μέθοδος 3 : Με μετασχηματισμό ομοιότητας

Κατ΄ αναλογία με το πρόβλημα σχεδίασης συστήματος για διευθέτηση πόλων το πρόβλημα υπολογισμού του πίνακα $\mathbf{K}_e$ απλουστεύεται αν το αρχικό σύστημα βρίσκεται σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή δηλαδή οι πίνακες **A, C**, έχουν τη μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 01 \end{bmatrix}$$

Αν το σύστημα δεν βρίσκεται σ΄ αυτή τη μορφή αλλά είναι παρατηρήσιμο μπορεί να μετατραπεί σ΄ αυτήν μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας. Ο πίνακας του μετασχηματισμού ομοιότητας **Q** δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \tag{Δ.8}$$

όπου N είναι ο πίνακας παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^* \mathbf{C}^* \vdots \dots \vdots (\mathbf{A}^*)^{n-1} \mathbf{C}^*] \tag{Δ.9}$$

και

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 & \dots & \mathrm{a}_{n-1} & 1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{a}_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \mathrm{a}_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{Δ.10}$$

όπου a_1, a_2, ... a_{n-1} οι συντελεστές του χαρ/κού πολυωνύμου του αρχικού συστήματος δηλ. $| s\mathbf{I} - \mathbf{A} | = s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots + a_1 s + \mathbf{a}_0 = 0$

Λαμβάνοντας υπόψη και την (Δ.6) ο πίνακας $\mathbf{K}_e$ δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \gamma_0 - \mathrm{a}_0 \\ \gamma_1 - \mathrm{a}_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} - \mathrm{a}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{Δ.11}$$

Παρατηρούμε ότι σε σχέση με την (9) υπάρχει η αναμενόμενη διαφορά πρόσημου λόγω της **F** = -**K**)

<u>Παράδειγμα Δ.1</u>

Έστω

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$$

με $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Να σχεδιαστεί παρατηρητής πλήρους τάξης αν η σύνθεση του συστήματος είναι αυτή που δείχνεται στο σχήμα Δ.1. Υποθέτουμε ακόμη ότι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του πίνακα παρατήρησης είναι οι $\lambda_1 = -1.8 + j2.4$, $\lambda_2 = -1.8 - j2.4$

Η σχεδίαση του παρατηρητή κατάστασης ανάγεται στον προσδιορισμό του πίνακα $\mathbf{K}_e$.
Πρώτο βήμα σε όλες τις μεθόδους είναι η εξέταση του πίνακα παρατηρησιμότητας :

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho\,(\mathbf{N}) = 2 = n$
Άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και το πρόβλημα έχει λύση.

<u>Μέθοδος 1</u> Με απ΄ ευθείας αντικατάσταση

Από την εξίσωση (Δ.3) έχουμε

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}$$

Αντικαθιστούμε το $\mathbf{K}_e = [ke_1, ke_2]$ στο χαρ/κό πολυώνυμο
$|\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\,\mathbf{C}\,|$ και το εξισώνουμε με το επιθυμητό χαρ/κό πολυώνυμο $(s-\lambda_1)\,(s-\lambda_2) = s^2 + \gamma_1\, s + \gamma_0$

Έχουμε λοιπόν :
$|\, s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\,\mathbf{C}| =$

$$= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{e_1} \\ k_{e_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -20.6+k_{e_1} \\ -1 & s+k_{e_2} \end{vmatrix} =$$

$$s^2 + k_{e_2}\, s - 20.6 + k_{e_1} = 0$$

Θέλουμε επίσης την επιθυμητή χαρ/κή εξίσωση
$(s + 1.8 - j2.4)\,(s + 1.8 + j2.4) = s^2 + 3.65 + 9 = 0$
από όπου έχουμε $\gamma_1 = 3.6$, $\gamma_0 = 9$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ομοίων όρων των δύο τελευταίων εξισώσεων παίρνουμε τελικά

$$ke_1 = 29.6,\ ke_2 = 3.6 \quad \text{και} \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

<u>Μέθοδος 2</u> Τύπος του Ackermann

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = s^2 + 3.6\, s + 9$$

οπότε

$$\Phi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 29.6 & 74.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix}$$

οπότε $\quad (\Delta.8) \Rightarrow$

$$\mathbf{K}_e = \Phi(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 & 74.16 \\ 3.6 & 29.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

<u>Μέθοδος 3</u> Με μετασχηματισμό ομοιότητας

Το αρχικό σύστημα είναι ήδη σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή οπότε $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
Το χαρ/κό πολυώνυμο του αρχικού συστήματος είναι

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -20.6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Άρα $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -20.6$
Από την επιθυμητή χαρ/κή εξίσωση έχουμε $\gamma_1 = 3.6$, $\gamma_0 = 9$
οπότε από την (Δ.11)
Έχουμε :

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \gamma_0 - a_0 \\ \gamma_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 + 20.6 \\ 3.6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29.6 \\ 3.6 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα Δ.2</u>

Έστω το σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να σχεδιασθεί παρατηρητής κατάστασης πλήρους τάξης της μορφής του σχήματος Δ.1 όπου οι επιθυμητές ιδιοτιμές του πίνακα του παρατηρητή είναι οι:

$\lambda_1 = -2 + j\, 3.4 + 464$, $\quad \lambda_2 = -2\ j\, 3.4 + 464$, $\quad \lambda_3 = -5$

<u>Λύση :</u>

Κατ΄ αρχήν υπολογίζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{C}^* \ \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \ \ (\mathbf{A}^*)^2\mathbf{C}^*\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα ρ(N) = 3 = n. Άρα το σύστημά μας είναι παρατηρήσιμο και το πρόβλημα της σχεδίασης του παρατηρητή κατάστασης έχει λύση και ανάγεται στον υπολογισμό των στοιχείων του διανύσματος $\mathbf{K}_e$.

Ας υπολογίσουμε το $\mathbf{K}_e$ με τη μέθοδο 3. (Μέθοδος μετ/μού ομοιότητας).

α) $$\left|s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = s^3 + a_2 s^2 + 9, s + a_0$$

Άρα $\alpha_2 = 6$, $\alpha_1 = 11$, $\alpha_0 = 6$

β) Η επιθυμητή χαρ/κή εξίσωση είναι η

$(s - \lambda_1)\ (s - \lambda_2)\ (s - \lambda_3) = (s+2-j3.464)\ (s+2+j3.464)\ (s+5) =$

$s^3 + 9s^2 + 36s + 80 = s^3 + \gamma_2 s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0 = 0$

Άρα $\gamma_2 = 9$, $\gamma_1 = 36$, $\gamma_0 = 80$

γ)

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \gamma_0 - a_0 \\ \gamma_1 - a_1 \\ \gamma_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

όπου

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}$$

με

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

οπότε

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80-6 \\ 36-11 \\ 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα ο παρατηρητής κατάστασης δίνεται από την (Δ.2) και είναι ο :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K_e C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{K_e y}$$

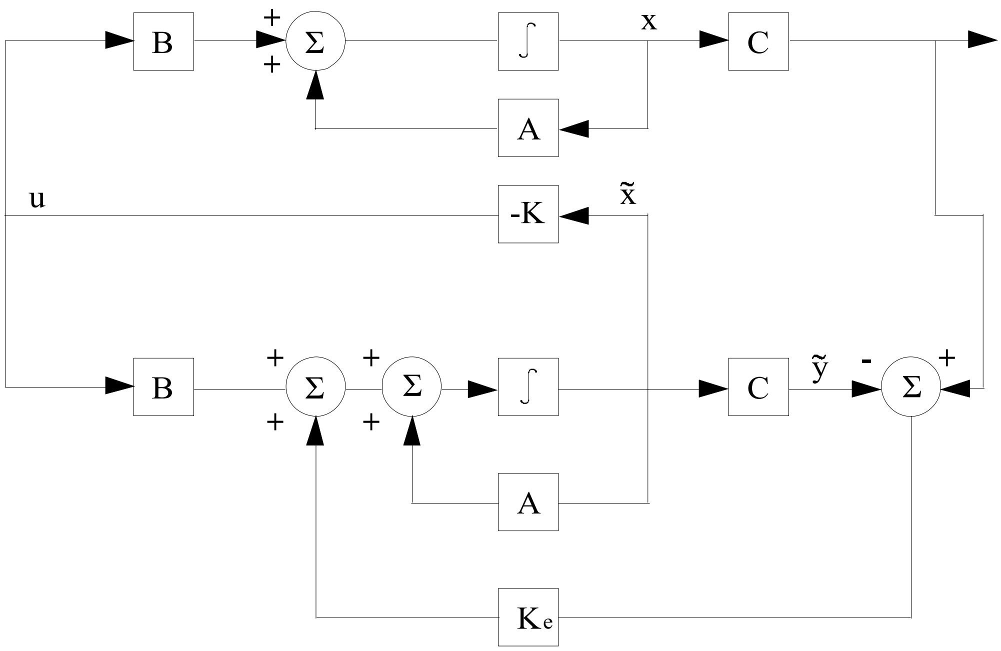
δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \\ -5 & 11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{y}$$

Δ.1.4 <u>Η επίδραση της πρόσθεσης ενός παρατηρητή σε ένα κλειστό σύστημα</u>

Στο πρόβλημα της διευθέτησης πόλων υποθέσαμε ότι η πραγματική κατάσταση $\mathbf{x}(t)$ είναι διαθέσιμη για ανάδραση. Στην πράξη όμως η πραγματική κατάσταση ενδέχεται να μην είναι μετρήσιμη οπότε απαιτείται η σχεδίαση ενός παρατηρητή και η χρήση της παρατηρούμενης (εκτιμούμενης) κατάστασης $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ σαν ανάδραση. Έτσι η διαδικασία σχεδίασης ενός συστήματος διευθέτησης πόλων γίνεται μια διαδικασία δύο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο προσδιορίζεται ο πίνακας ανάδρασης κατάστασης **K**, που αναφέρεται στη διευθέτηση πόλων, ενώ, στο δεύτερο στάδιο καθορίζεται ο πίνακας $\mathbf{K}_e$ του παρατηρητή ο οποίος αποδίδει στον παρατηρητή την επιθυμητή χαρ/κή εξίσωση, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Το συνδυασμένο σύστημα ελέγχου και παρατήρησης περιγράφεται σχηματικά αμέσως παρακάτω :



Σχήμα Δ.2

Ας δούμε τώρα ποια είναι η επίδραση της χρήσης της παρατήρησης $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ αντί της πραγματικής κατάστασης **x**(t) στην χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος ελέγχου κλειστού βρόγχου.

Έστω το πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο στις καταστάσεις σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

Έστω δε ότι για την ανάδραση της παρατηρούμενης κατάστασης ισχύει ο νόμος

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

(Στο πρόβλημα διευθέτησης πόλων είχαμε δει τον νόμο **u** = **Fx** + **G**w που είναι γενικευμένη παραλλαγή του **u** = -**Kx** με **F** = **-K** και **G** ≠ 0).
Με αυτό το σήμα ελέγχου η εξίσωση κατάστασης γίνεται:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}}) \qquad (\Delta.12)$$

Δεδομένου ότι έχουμε ορίσει το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής και της παρατηρούμενης κατάστασης να είναι

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \widetilde{\mathbf{x}}(t)$$

η (Δ.12) γίνεται

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} \qquad (\Delta.13)$$

Δεδομένου ότι η δυναμική εξίσωση σφάλματος του παρατηρητή δίνεται από την (Δ.3) ως

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}$$

τότε ο συνδυασμός της (Δ.13) με την (Δ.3) δίνει την δυναμική εξίσωση :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{K}_\mathrm{e}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \qquad (\Delta.14)$$

Η (Δ.14) περιγράφει τη δυναμική του συστήματος ελέγχου με ανάδραση παρατηρούμενης κατάστασης.

Η χαρ/κή εξίσωση του συστήματος είναι η :

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{K}_\mathrm{e}\mathbf{C} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

ή

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}|\,|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_\mathrm{e}\mathbf{C}| = \mathbf{0}$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόγχου με ανάδραση παρατηρούμενης κατάστασης αποτελούνται από τους πόλους που οφείλονται μόνο στη σχεδίαση διευθέτησης πόλων συν τους πόλους που οφείλονται μόνο στη σχεδίαση παρατηρητή κατάστασης.

Αυτό σημαίνει ότι η σχεδίαση διευθέτησης πόλων και η σχεδίαση παρατηρητή είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Μπορούν να σχεδιασθούν ξέχωρα και να συνδυαστούν ώστε να σχηματίσουν το σύνθετο σύστημα ελέγχου με παρατηρούμενη κατάσταση. Ας σημειωθεί ότι αν η τάξη του αρχικού συστήματος είναι n τότε ο παρατηρητής είναι n οστής τάξης (αν έχουμε παρατηρητή πλήρους τάξης) και η προκύπτουσα χαρακτηριστική εξίσωση για όλο το σύστημα είναι τάξης 2n.

Στη σχεδίαση ενός κλειστού συστήματος διευθέτησης πόλων με παρατήρηση στις καταστάσεις προτιμάται η χρησιμοποίηση ενός παρατηρητή που φθάνει γρήγορα στη μόνιμη κατάσταση και που είναι μάλιστα γρηγορότερος από το σύστημα διευθέτησης πόλων. Ένας πρακτικός κανόνας είναι να επιλέγεται παρατηρητής που η απόκρισή του να είναι **δύο έως πέντε φορές** ταχύτερη από αυτήν του τελικού σύνθετου συστήματος. Προφανώς σ΄ αυτή την περίπτωση οι πόλοι του παρατηρητή (ή για να ακριβολογήσουμε οι πόλοι του συστήματος (Δ.3)) βρίσκονται αριστερά των επιθυμητών πόλων του συστήματος διευθέτησης πόλων.

<u>Παράδειγμα Δ.3</u> : Έστω το σύστημα

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα σύστημα διευθέτησης πόλων του συστήματος με τους επιθυμητούς πόλους να είναι στις θέσεις $\lambda_1 = -1.8 + j\,2.4$ και $\lambda_2 = -1.8 - j\,2.4$

Από την άσκηση 1 είδαμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε τον νόμο ελέγχου με ανατροφοδότηση κατάστασης :

u = -**Kx** (συγκεκριμένα είδαμε την περίπτωση **u** = **Fx**)
τότε

$$K = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix}$$

Έστω ακόμη ότι χρησιμοποιούμε έλεγχο με ανάδραση παρατηρούμενης κατάστασης αντί της πραγματικής κατάστασης (με τον όρο κατάσταση εδώ αναφερόμαστε σε όλο το διάνυσμα κατάστασης) οπότε ο έλεγχος γίνεται

$$u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = -\begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

όπου διαλέγουμε τις ιδιοτιμές του παρατηρητή να είναι : $\mu_1 = \mu_2 = -8$

Να υπολογισθεί ο πίνακας $\mathbf{K}_e$ και να σχεδιασθεί το λειτουργικό διάγραμμα του συστήματος ελέγχου με ανάδραση παρατηρούμενης κατάστασης.

<u>Λύση :</u>

Κατ΄ αρχήν εξετάζουμε αν το αρχικό σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο ώστε τα προβλήματα σχεδίασης συστήματος διευθέτησης πόλων και παρατήρησης να έχουν λύση.

Πράγματι από την άσκηση 1 γνωρίζουμε ήδη ότι το σύστημα είναι ελέγξιμο, ενώ από τον πίνακα παρατηρησιμότητας

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{C}^* \vdots \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \vdots\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ με } \rho(\mathbf{N}) = 2 = n$$

βλέπουμε ότι το σύστημα είναι και παρατηρήσιμο.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αρχικού συστήματος είναι :

$$|\,sI - A\,| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20.6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20.6 = s^2 + a_1 s + a_0$$

οπότε

$\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -20.6$

Το επιθυμητό χαρ/κό πολυώνυμο του παρατηρητή είναι

$(s-\mu_1)\,(s-\mu_2) = (s+8)\,(s+8) = s^2 + 16s + 64 =$

$= s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0$

οπότε $\gamma_1 = 16$, $\gamma_0 = 64$

Για τον υπολογισμό του πίνακα (εδώ διάνυσμα) $\mathbf{K}_e$ χρησιμοποιούμε τη σχέση (Δ.11) δηλαδή :

$$\mathbf{K_e} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_0 & -a_0 \\ \gamma_1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

όπου

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_e = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 64+20.6 \\ 16-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84.6 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix}$$

Η δυναμική εξίσωση του παρατηρητή κατάστασης δίνεται από την σχέση (Δ.2) δηλαδή

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - K_e C)\tilde{\mathbf{x}} + Bu + K_e y$$

Δεδομένου ότι $u = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ αυτή γίνεται

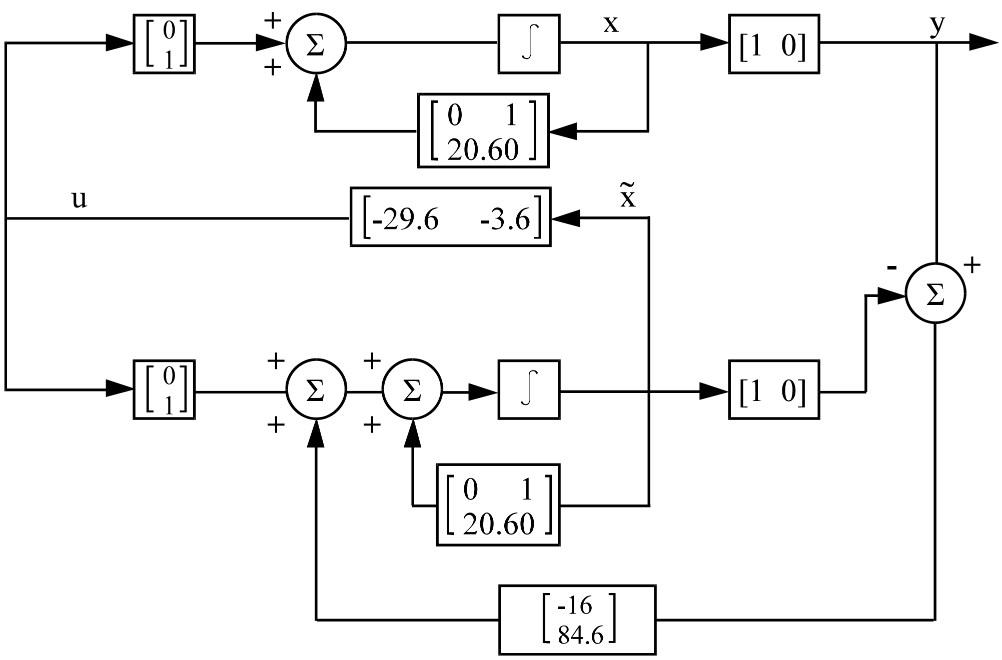
$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - K_e C - B\mathbf{K})\tilde{\mathbf{x}} + K_e y$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y =$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 1 \\ -93.6 & -3.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 84.6 \end{bmatrix} y$$

Το λειτουργικό διάγραμμα του συνολικού συστήματος είναι το ακόλουθο


x
y
u
x̃
[1 0]
[1 0]
[-29.6 -3.6]
[0 1; 20.60]
[0 1; 20.60]
[0; 1]
[0; 1]
[-16; 84.6]