Ορισμοί και πράξεις πινάκων

B.1. Εισαγωγή

Κατά την εύρεση των μαθηματικών μοντέλων των σύγχρονων δυναμικών συστημάτων, διαπιστώνεται ότι οι διαφορικές εξισώσεις που εμπλέκονται μπορούν να γίνουν πολύ περίπλοκες λόγω της ύπαρξης πολλών εισόδων και πολλών εξόδων. Για να απλοποιηθούν οι μαθηματικές εκφράσεις των εξισώσεων των συστημάτων αυτών, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται διανυσματικές παραστάσεις, όπως αυτές που χρησιμοποιούνται για την παράσταση των δυναμικών συστημάτων στο χώρο κατάστασης. Θεωρητικά, με τη χρήση των διανυσματικών παραστάσεων, επιτυγχάνεται η απλοποίηση των συμβολισμών, κάτι που είναι πολύ σημαντικό στην ανάλυση και το σχεδιασμό των σύγχρονων δυναμικών συστημάτων. Με τη χρήση των διανυσματικών παραστάσεων, μπορεί κάποιος να χειριστεί με ιδιαίτερη ευκολία τα μεγάλα και σύνθετα προβλήματα ακολουθώντας τη συστηματική μορφή της πινακοδιανυσματικής απεικόνισης των εξισώσεων του συστήματος και του υπολογισμού τους με τη βοήθεια υπολογιστή. Ο κύριος στόχος αυτού του παραρτήματος είναι να δώσει τους βασικούς ορισμούς και τις έννοιες των πινάκων, να αναφέρει τους διάφορους τύπους πινάκων και να παραθέσει εκείνα τα βασικά στοιχεία της άλγεβρας πινάκων που είναι απαραίτητα για την ανάλυση των δυναμικών συστημάτων.

B.2. Ορισμός και είδη πινάκων

Πίνακας. Ο Πίνακας (ή μητρώο ή μήτρα) ορίζεται ως η ορθογώνια διάταξη στοιχείων, τα οποία μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί, μιγαδικοί αριθμοί, συναρτήσεις ή τελεστές. Ο αριθμός των στηλών, γενικά, δεν είναι απαραιτήτως ο ίδιος με τον αριθμό των σειρών. Στον ακόλουθο πίνακα:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

όπου το a_{ij} δείχνει το (i, j)-στό στοιχείο του πίνακα $\mathbf{A}$, ο πίνακας έχει n σειρές και m στήλες και ονομάζεται $n \times m$ πίνακας. Ο πρώτος δείκτης αντιπροσωπεύει τον αριθμό σειρών και ο δεύτερος δείκτης τον αριθμό των στηλών. Ο πίνακας **A** γράφεται μερικές φορές και (a_{ij}).

Ισότητα δύο πινάκων. Δύο πίνακες θεωρούνται ίσοι εάν και μόνο εάν τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα. Σημειώστε ότι οι ίσοι πίνακες πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό σειρών και τον ίδιο αριθμό στηλών.

Διάνυσμα. Ένας πίνακας που έχει μόνο μια στήλη όπως ο

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

καλείται διάνυσμα στήλης. Ένα διάνυσμα στήλης με n στοιχεία ονομάζεται n-διάνυσμα ή n-διάστατο διάνυσμα.

Ένας πίνακας που έχει μόνο μια σειρά όπως ο

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \cdots & \mathrm{x}_n \end{bmatrix}$$

καλείται διάνυσμα γραμμής.

Σημειώνεται ότι η ανάγκη ορισμού του πίνακα και των διανυσμάτων στήλης και γραμμής προέκυψε από την επιθυμία παράστασης των γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = y_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = y_2 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = y_n \end{aligned}$$

σε πιο συμπαγή πινακοδιανυσματική μορφή

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Τετραγωνικός Πίνακας. Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ένας πίνακας στον οποίο ο αριθμός των γραμμών του είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών του. Ένας τέτοιος τετραγωνικός πίνακας καλείται μερικές φορές πίνακας τάξης n, όπου n είναι ο αριθμός των γραμμών (ή των στηλών).

Διαγώνιος Πίνακας. Εάν όλα τα στοιχεία ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}$, εκτός των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου, είναι μηδέν, τότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ καλείται *διαγώνιος* πίνακας και γράφεται

$$\mathbf{A} = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & 0 \\ & a_{22} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij}\delta_{ij})$$

όπου τα δ_{ij}, είναι το δέλτα Kronecker που υπολογίζεται ως εξής

$$\delta_{\mathrm{ij}} = 1 \quad \text{αν} \quad i = j$$

$$\delta_{\mathrm{ij}} = 0 \quad \text{αν} \quad i \neq j$$

Σημειώστε ότι όλα τα στοιχεία που δεν γράφονται ρητά στον προηγούμενο πίνακα έχουν μηδενική τιμή.

Ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας. Ο ταυτοτικός ή μοναδιαίος πίνακας $\mathbf{I}$ είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι ίσα με την μονάδα και του οποίου τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν δηλαδή

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = diag(1, 1, \ldots, 1)$$

Μηδενικός πίνακας. Ο μηδενικός πίνακας είναι ο πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν.

Ορίζουσα ενός πίνακα. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα, **A**, υπάρχει μία ορίζουσα. Συμβολίζεται με |**A**| και είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που προκύπτει από το άθροισμα των στοιχείων μιας γραμμής (ή μιας στήλης) πολλαπλασιασμένων με το αλγεβρικό τους συμπλήρωμα. Δηλαδή,

$$\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{i\,j}\text{, j=1 ή 2 ή3 ή … n (ανάπτυξη κατά στήλη)}$$

ή

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{i=1 ή 2 ή3 ή … n (ανάπτυξη κατά γραμμή)}$$

όπου A_{ij} είναι το ***αλγεβρικό συμπλήρωμα*** *(cofactor)* του στοιχείου a_{ij} που ορίζεται ως εξής

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{M}_{ij}\right|$$

όπου $\mathbf{M}_{ij}$ είναι ο (*n-1* x *n-1*) τετραγωνικός πίνακας που απομένει, όταν από τον (*n* x *n*) πίνακα **A** αφαιρεθεί η i-στη γραμμή και η j-στη στήλη. Η ορίζουσα $|M_{ij}|$ ονομάζεται ***ελάσσων ορίζουσα***. Από τον τρόπο υπολογισμού της ορίζουσας οποιουδήποτε τετραγωνικού πίνακα προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Εάν οποιαδήποτε γραμμή ή οποιαδήποτε στήλη αποτελείται μόνο από μηδενικά στοιχεία, η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν.

2. Εάν οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές γραμμές ή στήλες εναλλάσσονται, τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.

3. Εάν τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής (ή οποιασδήποτε στήλης) είναι ακριβώς *k* φορές τα στοιχεία κάποιας άλλης γραμμής (ή στήλης), τότε η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν.

4. Εάν σε οποιαδήποτε γραμμή (ή οποιαδήποτε στήλη) προστίθενται *k* φορές τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης), η ορίζουσα παραμένει αμετάβλητη.

5. Εάν μία ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με μία σταθερά, τότε μόνο μια σειρά (ή μια στήλη) πολλαπλασιάζεται με εκείνη την σταθερά. Σημειώστε όμως ότι η ορίζουσα του *k* φορές έναν $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$ είναι k^n φορές την ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{A}$, δηλαδή

$$|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$$

6. Η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων **A** και $\mathbf{B}$ είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών τους, δηλαδή

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Ιδιάζων πίνακας. Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται *ιδιάζων*(singular) εάν η ορίζουσά του είναι ίση με μηδέν. Σε έναν ιδιάζοντα πίνακα δεν είναι όλες οι γραμμές (ή όλες οι στήλες) ανεξάρτητες η μια από την άλλη.

Μη ιδιάζων πίνακας. Ένας τετραγωνικός πίνακας καλείται *μη ιδιάζων* εάν η ορίζουσά του είναι μη μηδενική.

Ανάστροφος. Εάν οι γραμμές και οι στήλες ενός $n \times m$ πίνακα **A** εναλλάσσονται, ο $m \times n$ πίνακας που προκύπτει καλείται *ανάστροφος* του πίνακα $\mathbf{A}$. Ο ανάστροφος ενός πίνακα $\mathbf{A}$ γράφεται ως $\mathbf{A}^T$. Δηλαδή εάν ο πίνακας $\mathbf{A}$ δίνεται ως

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

τότε ο πίνακας $\mathbf{A}^T$ είναι

$$\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$.

Συμμετρικός πίνακας. Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ίσος με τον ανάστροφό του ή

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

τότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ καλείται *συμμετρικός* πίνακας.

Αντισυμμετρικός πίνακας. Εάν ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ίσος με τον αρνητικό ανάστροφό του ή

$$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

τότε ο πίνακας $\mathbf{A}$ καλείται *αντισυμμετρικός* πίνακας.

Συζυγής πίνακας. Ένας πίνακας που τα στοιχεία του είναι μιγαδικοί αριθμοί ονομάζεται ***μιγαδικός πίνακας***. Εάν τα στοιχεία ενός μιγαδικού πίνακα $\mathbf{A}$ αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους συζυγείς τους, τότε ο προκύπτον πίνακας καλείται *συζυγής* του $\mathbf{A}$. Ο συζυγής του $\mathbf{A}$ παριστάνεται ως $\overline{\mathbf{A}}=(\overline{a}_{ij})$ όπου $\overline{a}_{ij}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του a_{ij}. Παραδείγματος χάριν, εάν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2+j & -1-j & -2-j3 \\ -1+j4 & -1 & -2+j3 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2-j & -1+j & -2+j3 \\ -1-j4 & -1 & -2-j3 \end{bmatrix}$$

Συζυγής ανάστροφος. Ο συζυγής ανάστροφος είναι ο συζυγής του ανάστροφου του πίνακα. Δεδομένου ενός πίνακα $\mathbf{A}$, ο συζυγής ανάστροφος παρίσταται ως $\overline{\mathbf{A}}^T$ ή $\mathbf{A}^*$ δηλαδή

$$\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^* = (\overline{a}_{ji})$$

Παραδείγματος χάριν, εάν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3+j & 1+j5 \\ j2 & j & 5-j \\ 5 & 1 & 1+j4 \end{bmatrix}$$

τότε

$$\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & -j2 & 5 \\ 3-j & -j & 1 \\ 1-j5 & 5+j & 1-j4 \end{bmatrix}$$

Σημειώνεται ότι

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$$

Εάν ο $\mathbf{A}$ είναι ένας πραγματικός πίνακας (ένας πίνακας που τα στοιχεία του είναι πραγματικοί αριθμοί), ο συζυγής ανάστροφος $\mathbf{A}^*$ είναι ο ίδιος με τον ανάστροφο $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Ερμιτιανός πίνακας. Εάν ένας μιγαδικός πίνακας $\mathbf{A}$ ικανοποιεί την σχέση

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \qquad \text{ή} \qquad a_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

όπου $\overline{a}_{ji}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του a_{ij}, τότε ο $\mathbf{A}$ καλείται ως *ερμιτιανός* πίνακας. Για παράδειγμα ο παρακάτω πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ερμιτιανός

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6+j7 \\ 6-j7 & 3 \end{bmatrix}$$

Εάν ένας ερμιτιανός πίνακας $\mathbf{A}$ γραφεί ως $\mathbf{A} = \mathbf{B} + j\mathbf{C}$, όπου $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι πραγματικοί πίνακες, τότε

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{C} = -\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

και για το παραπάνω παράδειγμα, ο πίνακας $\mathbf{A}$ γράφεται,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + j\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Αντιερμητιανός πίνακας. Εάν ένας πίνακας $\mathbf{A}$ ικανοποιεί την σχέση

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{*}$$

τότε ο $\mathbf{A}$ καλείται *αντιερμιτιανός* πίνακας.
Για παράδειγμα εάν, ο παρακάτω πίνακας $\mathbf{A}$ είναι αντιερμιτιανός

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} j3 & -3 + j5 \\ 3 + j5 & j2 \end{bmatrix}$$

Εάν ένας αντιερμιτιανός πίνακας $\mathbf{A}$ γράφεται ως $\mathbf{A} = \mathbf{B} + j\mathbf{C}$, όπου $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι πραγματικοί πίνακες, τότε ισχύει

$$\mathbf{B} = -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \qquad \textbf{και} \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο πίνακας $\mathbf{A}$ θα είναι

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + j\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

B.3. Πράξεις πινάκων

Αυτό το τμήμα παρουσιάζει την άλγεβρα πινάκων, μαζί με κάποιους πρόσθετους ορισμούς. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι μερικές πράξεις πινάκων υπακούουν στους ίδιους κανόνες με εκείνους της άλγεβρας των βαθμωτών πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, άλλες πράξεις όμως όχι.

Πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων. Δύο πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ μπορούν να προστεθούν εάν έχουν τον ίδιο αριθμό σειρών και τον ίδιο αριθμό στηλών.
Εάν

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ και } \mathbf{B} = (b_{ij})$$

τότε

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Κατά συνέπεια κάθε στοιχείο του $\mathbf{A}$ προστίθεται στο αντίστοιχο στοιχείο του $\mathbf{B}$. Ομοίως, η αφαίρεση πινάκων είναι

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij} - b_{ij})$$

δηλαδή, κάθε στοιχείο του πίνακα Β αφαιρείται από το αντίστοιχο στοιχείο του Α.

Πολλαπλασιασμός πίνακα με μία σταθερά. Το γινόμενο ενός πίνακα και μίας σταθεράς είναι ένας πίνακας στον οποίο κάθε στοιχείο του είναι το αντίστοιχο στοιχείο του αρχικού πίνακα πολλαπλασιασμένο με τη σταθερά, δηλαδή για έναν πίνακα $\mathbf{A}$ και μια σταθερά k.

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα. Ο πολλαπλασιασμός πίνακα με πίνακα είναι δυνατός όταν ο αριθμός στηλών του πρώτου πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου. Διαφορετικά, ο πολλαπλασιασμός των δύο πινάκων δεν ορίζεται.

Έστω ότι ο $\mathbf{A}$ είναι ένας $n \times m$ πίνακας και ο $\mathbf{B}$ είναι ένας $m \times p$ πίνακας. Τότε το γινόμενο $\mathbf{AB}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right) \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \, j = 1, 2, \ldots, p$$

Ο παραγόμενος πίνακας $\mathbf{C}$ έχει το ίδιο πλήθος γραμμών με τον $\mathbf{A}$ και το ίδιο πλήθος στηλών με τον $\mathbf{B}$. Κατά συνέπεια ο πίνακας $\mathbf{C}$ είναι ένας $n \times p$ πίνακας. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι αν ορίζεται ο πίνακας $\mathbf{AB}$ δεν σημαίνει ότι ορίζεται και ο $\mathbf{BA}$.

Κατά τον πολλαπλασιασμό πινάκων ισχύουν η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα δηλαδή,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA}+\mathbf{CB}$$

Εάν $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ τότε οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ λέγεται ότι είναι αντιμεταθετοί (commute). Γενικά όμως ισχύει ότι $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα. Έστω ότι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε τα γινόμενα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ θα είναι

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 16 & 9 & 17 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 20 & 26 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

όπου φαίνεται ότι $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Επειδή γενικά ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη, πρέπει να διατηρείται η σειρά των πινάκων όταν πολλαπλασιάζεται ένας πίνακας με έναν άλλον.

Για την περίπτωση που $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ έχουμε το παράδειγμα:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

και τότε τα $\mathbf{AB}$ και $\mathbf{BA}$ θα είναι

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντιμετατίθενται.

Είναι επίσης σκόπιμο να αναφερθούν οι παρακάτω ταυτότητες πινάκων. Έστω ότι $\mathbf{A,B,C,D}$ είναι $n\times m$, $m\times r$, $l\times n$, και $r\times p$ σταθεροί πίνακες αντίστοιχα. Έστω $\mathbf{a}_i$ είναι η i-στή στήλη του $\mathbf{A}$, και $\mathbf{b}_j$ είναι η j-στή γραμμή του $\mathbf{B}$. Τότε έχουμε:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m$$

$$\mathbf{CA}=\mathbf{C}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Ca}_1 & \mathbf{Ca}_2 & \cdots & \mathbf{Ca}_m\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BD}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ \mathbf{b}_2\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\end{bmatrix}\cdot\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\mathbf{D}\\ \mathbf{b}_2\mathbf{D}\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\mathbf{D}\end{bmatrix}$$

Αυτές οι ταυτότητες μπορούν εύκολα να επαληθευτούν. Παρατηρούμε ότι ο $\mathbf{a_i b_i}$ που είναι ένας $n\times r$ πίνακας, είναι το γινόμενο ενός $n\times 1$ πίνακα $\mathbf{a_i}$, και ενός $1\times r$ πίνακας $\mathbf{b_i}$.

Δυνάμεις πίνακα. Η k-ιοστή δύναμη ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}$ ορίζεται ως:

$$\mathbf{A}^k=\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k}$$

Για ένα διαγώνιο πίνακα $\mathbf{A}=diag(a_{11}^k,a_{22}^k,\ldots,a_{nn}^k)$ θα ισχύει:

$$\mathbf{A}^k=\begin{bmatrix}a_{11}^k & & & & 0\\ & a_{22}^k & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & a_{nn}^k\end{bmatrix}=diag(a_{11}^k,a_{22}^k,\ldots,a_{nn}^k)$$

Η μηδενική δύναμη ενός πίνακα $\mathbf{A}$ ορίζεται να είναι ο μοναδιαίος πίνακας, δηλαδή $\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$.

Άλλες ιδιότητες πινάκων. Οι ανάστροφοι των $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ και $\mathbf{AB}$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$
$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

Για να αποδειχθεί η τελευταία σχέση, λαμβάνουμε υπόψη ότι το (i,j)-ιοστό στοιχείο του $\mathbf{AB}$ είναι

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$$

Το (i,j)-ιοστό στοιχείο του $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ είναι

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} = c_{ij}$$

το οποίο είναι ίσο με το (j,i)-ιοστό στοιχείο του $\mathbf{AB}$, ή το (i,j)-ιοστό στοιχείο του $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}$. Ως εκ τούτου $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε τους συζυγής ανάστροφους των $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ και $\mathbf{AB}$ που δίνονται από τις

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{*} = \mathbf{A}^{*} + \mathbf{B}^{*}$$
$$(\mathbf{AB})^{*} = \mathbf{B}^{*}\mathbf{A}^{*}$$

Τάξη (ή βαθμός) πίνακα. Ένας πίνακας $\mathbf{A}$ είναι τάξης (order) m αν υπάρχει ένας $m \times m$ υποπίνακας $\mathbf{M}$ του $\mathbf{A}$ τέτοιος ώστε η ορίζουσα του $\mathbf{M}$ να είναι μη μηδενική και η ορίζουσα κάθε $r \times r$ υποπίνακα (όπου $r \geq m+1$) του $\mathbf{A}$ να είναι μηδέν.

;Έστω ,για παράδειγμα, ο πίνακας **A**, όπου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$. Ένας από τους μεγαλύτερους υποπίνακες του οποίου η ορίζουσα δεν είναι ίση με μηδέν είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας **A** είναι τάξης 3. Σημειώνεται ότι, η τάξη ενός πίνακα ισούται με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του πίνακα.

B.4. Αντιστροφή πινάκων

Στο τμήμα B.1 είδαμε τον ορισμό της ορίζουσας, των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων πίνακα και της ελάσσονος ορίζουσας. Σ' αυτό το τμήμα εξετάζουμε την αντιστροφή πινάκων και τις σχετικές με αυτήν ιδιότητες.

Συναφής πίνακας. Ο πίνακας **B** όπου το στοιχείο της *i*-ιοστής γραμμής και της *j*-ιοστής στήλης του ισούται με $\mathbf{A}_{ji}$ (το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ji} του πίνακα **A**), ονομάζεται συναφής (adjoint) του **A** και γράφεται ως $adj\ \mathbf{A}$ ή

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) = (A_{ji}) = adj\ \mathbf{A}$$

Έτσι ο συναφής του **A** είναι ο ανάστροφος του πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι τα αλγεβρικά συμπληρώματα του **A**, ή

$$adj\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Πίνακας. Εάν για ένα τετραγωνικό πίνακα **A** υπάρχει ένας πίνακας **B** τέτοιος ώστε $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$, τότε ο **B** συμβολίζεται με $\mathbf{A}^{-1}$ και ονομάζεται *αντίστροφος του* **A**. Ο αντίστροφος ενός πίνακα **A** υπάρχει μόνο εάν η ορίζουσα του είναι μη μηδενική, δηλαδή αν ο **A** είναι μη ιδιάζων.

Αποδεικνύεται ότι ο υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα μπορεί να γίνει με βάση τον τύπο,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\ \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

Δηλαδή, ο αντίστροφος πίνακας είναι ο ανάστροφος του πίνακα που έχει ως στοιχεία του τα αλγεβρικά συμπληρώματα του **A,** διαιρεμένα με την ορίζουσά του **A**. Αν ο πίνακας **A** είναι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

τότε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\ \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{21}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|\mathbf{A}|} \\ \frac{A_{12}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{22}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|\mathbf{A}|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|\mathbf{A}|} & \frac{A_{2n}}{|\mathbf{A}|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|\mathbf{A}|} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{A}_{ij}$ είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij} του πίνακα $\mathbf{A}$. Οι όροι της *i*-οστής στήλης του $\mathbf{A}^{-1}$ είναι $1/|\mathbf{A}|$ φορές τα αλγεβρικά συμπληρώματα της*i*-ιοστής σειράς του αρχικού πίνακα $\mathbf{A}$. Για παράδειγμα, αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι 2×2 με γενική μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

ο ανάστροφος δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Για 3×3 πίνακα $\mathbf{A}$, όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad |\mathbf{A}| \neq 0$$

ο ανάστροφος θα δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Εξ ορισμού, ο αντίστροφος πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ έχει την ιδιότητα

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

όπου $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Αν ο $\mathbf{A}$ είναι μη ιδιάζων πίνακας και ισχύει ότι $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, τότε $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$. Αυτό φαίνεται και από την εξίσωση

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{IB} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

Εάν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι μη ιδιάζοντες πίνακες, τότε το γινόμενο $\mathbf{AB}$ είναι μη ιδιάζων πίνακας. Εξάλλου,

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{IB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

Όμοια,

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$$

Ισχύουν ακόμη οι σχέσεις

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^{*} = (\mathbf{A}^{*})^{-1}$$

Παρατηρήσεις σχετικά με την απαλοιφή πινάκων. Η απαλοιφή πινάκων δεν ισχύει στην άλγεβρα πινάκων. Για παράδειγμα θεωρούμε δύο ιδιάζοντες πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Τότε

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Εδώ φαίνεται καθαρά ότι το γινόμενο $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ δεν υποδηλώνει ούτε ότι το $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ ούτε το $\mathbf{B}=\mathbf{0}$. Για την ακρίβεια, το γινόμενο $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ δηλώνει ένα από τα ακόλουθα τρία:

1. $\mathbf{A}=\mathbf{0}$
2. $\mathbf{B}=\mathbf{0}$
3. Αμφότεροι οι πίνακες $\mathbf{A}$ και ο $\mathbf{B}$ είναι ιδιάζοντες.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι εάν και οι δύο πίνακες είναι μη μηδενικοί πίνακες και ισχύει $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, τότε και ο $\mathbf{A}$ και ο $\mathbf{B}$ είναι ιδιάζοντες πίνακες. Σαν απόδειξη, υποθέστε ο $\mathbf{A}$ και ο $\mathbf{B}$ είναι μη ιδιάζοντες πίνακες, τότε ο πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ υπάρχει με την ιδιότητα

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}=\mathbf{B}=\mathbf{0}$$

η οποία αντικρούει την υπόθεση ότι ο $\mathbf{B}$ είναι μη μηδενικός πίνακας. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο $\mathbf{A}$ και ο $\mathbf{B}$ είναι ιδιάζοντες πίνακες εάν $\mathbf{A}\neq 0$ και $\mathbf{B}\neq 0$.

Με παρόμοιο τρόπο, εάν ο $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζων, τότε οι σχέσεις $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ και $\mathbf{BA}=\mathbf{CA}$ δεν υποδηλώνουν ότι θα ισχύει $\mathbf{B}=\mathbf{C}$. Εάν όμως ο $\mathbf{A}$ είναι μη ιδιάζων πίνακας, τότε οι σχέσεις $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$ και $\mathbf{BA}=\mathbf{CA}$ υποδηλώνουν ότι ισχύει $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

B.5. Παραγώγιση και ολοκλήρωση πινάκων

Η παράγωγος ενός $n\times m$ πίνακα $\mathbf{A}(t)$ ορίζεται να είναι ο $n\times m$ πίνακας, του οποίου κάθε στοιχείο είναι η παράγωγος του αντίστοιχου στοιχείου του αρχικού πίνακα, με την προϋπόθεση ότι όλα τα στοιχεία $a_{ij}(t)$ έχουν παραγώγους ως προς t. Έτσι

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)=\left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1m}(t)\\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2m}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dt}a_{n1}(t) & \frac{d}{dt}a_{n2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nm}(t)\end{bmatrix}$$

Όμοια, το ολοκλήρωμα ενός $n\times m$ πίνακα $\mathbf{A}(t)$ ορίζεται να είναι

$$\int \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int a_{ij}(t)\,dt\right) = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,dt & \int a_{12}(t)\,dt & \cdots & \int a_{1m}(t)\,dt \\ \int a_{21}(t)\,dt & \int a_{22}(t)\,dt & \cdots & \int a_{2m}(t)\,dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int a_{n1}(t)\,dt & \int a_{n2}(t)\,dt & \cdots & \int a_{nm}(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Παραγώγιση του γινομένου δύο πινάκων. Εάν οι πίνακες $\mathbf{A}(t)$ και $\mathbf{B}(t)$ είναι παραγωγίσιμοι ως προς *t*, τότε

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)\right] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$$

Εδώ και πάλι ο πολλαπλασιασμός των $\mathbf{A}(t)$ και $d\mathbf{B}(t)/dt$ [ή $d\mathbf{A}(t)/dt$ και $\mathbf{B}(t)$] δεν είναι, σε γενικές γραμμές, αντιμεταθετική πράξη.

Παραγώγιση του $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{t})$. Εάν ο πίνακας $\mathbf{A}(t)$ και ο αντίστροφός του $\mathbf{A}^{-1}(t)$ είναι παραγωγίσιμοι ως προς *t*, τότε η παράγωγος του $\mathbf{A}^{-1}(t)$ δίνεται από την

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$

Αυτό προκύπτει αν παραγωγίσουμε το $\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)$ ως προς *t*. Από τη σχέση

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t)\right] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt}$$

και

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)\mathbf{A}^{-1}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

προκύπτει ότι

$$\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$

ή

$$\frac{d\mathbf{A}^{-1}(t)}{dt} = -\mathbf{A}^{-1}(t)\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{A}^{-1}(t)$$

Συναρτήσεις τετραγωνικού πίνακα.

Στη συνέχεια δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και χρήσιμες ιδιότητες των συναρτήσεων πίνακα. Οι ιδιότητες αυτές δίνονται εδώ χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική θεμελίωση, είναι όμως ιδιαίτερα χρήσιμες στην αναλυτική επίλυση των εξισώσεων κατάστασης των γραμμαικών συστημάτων. Χαρακτηριστικότερη είναι η περίπτωση της εκθετικής συνάρτησης πίνακα, $e^{\mathbf{A}t}$, που είναι βασικό συστατικό της λύσης των εξισώσεων κατάστασης των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων.

Δυναμοσειρά τετραγωνικού πίνακα. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$f(\phi)=\phi^n+a_1\phi^{n-1}+\ldots+a_n$$

ορίζουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική συνάρτηση πίνακα $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ ως εξής

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^n+a_1\mathbf{A}^{n-1}+\ldots+a_n\mathbf{I}$$

όπου $$\mathbf{A}^k=\overbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}^{k}$$

Συνάρτηση πίνακα. Έστω τώρα μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, που μπορεί να εκφραστεί σε μορφή δυναμοσειράς απείρων όρων

$$g(\phi)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\phi^i\ ,\quad |\phi|<\rho$$

η οποία συγκλίνει εφόσον η μεταβλητή $|\phi|<\rho$. Ορίζουμε την αντίστοιχη **συνάρτηση** $g:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ του **πίνακα A** ως εξής

$$g(\mathbf{A})=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\mathbf{A}^i$$

Ο ορισμός έχει έννοια εφόσον η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι, αν όλες οι ιδιοτιμές του **A** είναι απόλυτα μικρότερες του ρ, η δυναμοσειρά συγκλίνει. Η δυναμοσειρά μπορεί επίσης να συγκλίνει αν για κάποιο k το $\mathbf{A}^k=0$. Σ' αυτή την περίπτωση

$$g(\mathbf{A})=\sum_{i=0}^{k-1}a_i\mathbf{A}^i$$

Εκθετική συνάρτηση πίνακα. Μια χαρακτηριστική εφαρμογή του παραπάνω ορισμού, είναι η εκθετική συνάρτηση πίνακα. Γνωρίζουμε ότι, για οποιαδήποτε πεπερασμένα λ και t

$$e^{\lambda t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\lambda^k$$

Κατά παρόμοιο τρόπο, σε κάθε *n* x *n* πίνακα **A** αντιστοιχεί ένας νέος *n* x *n* πίνακας που ορίζεται από την άπειρη δυναμοσειρά

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k$$

και καλείται *εκθετικός πίνακας* ή *εκθετική συνάρτηση πίνακα*. Με άμεσες αντικαταστάσεις στον παραπάνω τύπο, προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εκθετικού πίνακα

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$$

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$$

$$e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}s}$$

$$e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow (e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} \text{ αν } \mathbf{AB}=\mathbf{BA}$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} \text{ αν } \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton. Έστω ο πίνακας **A**, του οποίου η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τη γενική μορφή $s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Αποδεικνύεται ότι, ο πίνακας **A** ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή

$$\mathbf{A}^n + a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Η εξίσωση αυτή υποδηλώνει ότι, οποιαδήποτε δύναμη του **A**, $\mathbf{A}^k$ με $k \geq n$ μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει δυνάμεων του **A** το πολύ έως *n-1*. Πράγματι, από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να πάρουμε

$$\mathbf{A}^n = -(a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n \mathbf{I}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{n+!} = -\mathbf{A}(a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n \mathbf{I}) = -a_1(a_1 \mathbf{A}^{n-1} + \ldots + a_n \mathbf{I}) - a_2 \mathbf{A}^{n-2} - \ldots - a_n \mathbf{A}$$

$$\vdots$$

κ.ο.κ

Η παρατήρηση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να ξαναγράψουμε τον τρόπο υπολογισμού του εκθετικού πίνακα με όρους δυνάμεων του **A** το πολύ έως *n-1*. Δηλαδή,

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t) \mathbf{A}^k$$

όπου οι χρονικές συναρτήσεις $c_k(t)$, προκύπτουν ύστερα από αντικατάσταση, στο άπειρο άθροισμα, των δυνάμεων του **A** με $k \geq n$ με δυνάμεις του A έως και *n*-1 και παραγοντοποίηση των ίδιων δυνάμεων του **A.**

Η ίδια παρατήρηση μας επιτρέπει να εξάγουμε ένα εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου του πίνακα **A**, ως εξής

$$-a_n\mathbf{I} = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \ldots a_{n-1}\mathbf{A} \quad \Rightarrow$$
$$-a_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{n-1} + a_1\mathbf{A}^{n-2} + \ldots a_{n-1}\mathbf{I} \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left(\mathbf{A}^{n-1} + a_1\mathbf{A}^{n-2} + \ldots a_{n-1}\mathbf{I}\right)$$

Συνάρτηση υποπίνακα Jordan (Jordan block). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένας πίνακας Jordan είναι ένας μπλοκ διαγώνιος πίνακας $\mathbf{J} = diag(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \ldots \mathbf{J}_m)$**,** όπου οι υπο-πίνακες $\mathbf{J}_\mathrm{i}$ είναι τετραγωνικοί πίνακες της μορφής

$$\mathbf{J}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} \lambda_\mathrm{i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_\mathrm{i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

με το λ_i να παριστάνει μία πολλαπλή ιδιοτιμή του πίνακα **J**. Η συνάρτηση $f(\mathbf{J}_i)$ του πίνακα $\mathbf{J}_\mathrm{i}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης

$$\mathrm{f}(\mathbf{J}_\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{i}) & \dfrac{\mathrm{f}'(\lambda_\mathrm{i})}{1!} & \cdots & & \dfrac{\mathrm{f}^{\mathrm{n}-1}(\lambda_\mathrm{i})}{(\mathrm{n}-1)!} \\ 0 & \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{i}) & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\mathrm{f}'(\lambda_\mathrm{i})}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{i}) \end{bmatrix}$$

όπου η παραγώγιση γίνεται ως προς την ιδιοτιμή λ_i. Σαν άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού μπορούν να προκύψουν οι υπολογισμοί της εκθετικής συνάρτησης και της συνάρτησης ύψωσης σε δύναμη του υποπίνακα $\mathbf{J}_\mathrm{i}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{e}^{\mathbf{J}_\mathrm{i}\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} & \mathrm{t}\mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} & \cdots & \dfrac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}-1}}{(\mathrm{n}-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} & \cdots & \dfrac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}-2}}{(\mathrm{n}-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} \\ & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_\mathrm{i}\mathrm{t}} \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{J}^{\kappa}=\begin{bmatrix} \lambda^{\kappa} & \frac{\kappa\lambda^{\kappa\text{-}1}}{1!} & \frac{\kappa(\kappa\text{-}1)\lambda^{\kappa\text{-}2}}{2!} & \cdots \\ 0 & \lambda^{\kappa} & & \\ & & \ddots & \frac{\kappa\lambda^{\kappa\text{-}1}}{1!} \\ & & & \lambda^{\kappa} \end{bmatrix}$$

Συνάρτηση διαγώνιου (ή μπλοκ διαγώνιου) πίνακα. Έστω ότι, ο πίνακας **A** είναι μπλοκ διαγώνιος πίνακας, δηλαδή

$$\mathbf{A}=diag(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots\mathbf{A}_m)=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & 0 \\ & \mathbf{A}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$$

όπου οι υπο-πίνακες $\mathbf{A}_i$ είναι τετραγωνικοί πίνακες. Τα στοιχεία των κυρίων διαγωνίων των πινάκων αυτών αποτελούν τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του **A** και το άθροισμα των διαστάσεών τους ισούται με τη διάσταση του πίνακα **A**. Η συνάρτηση $f(\mathbf{A})$ του παραπάνω πίνακα **A**, δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbf{A})=diag(f(\mathbf{A}_1),f(\mathbf{A}_2),\ldots f(\mathbf{A}_m))=\begin{bmatrix} f(\mathbf{A}_1) & & & & 0 \\ & f(\mathbf{A}_2) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & f(\mathbf{A}_m) \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας **A** είναι τύπου Jordan, δηλαδή $\mathbf{J}=diag(\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2,\ldots\mathbf{J}_m)$ **τότε** $f(\mathbf{J})=diag(f(\mathbf{J}_1),f(\mathbf{J}_2),\ldots f(\mathbf{J}_m))$**.** Οι υπολογισμοί της εκθετικής συνάρτησης και της συνάρτησης ύψωσης σε δύναμη του **J** προκύπτουν εύκολα από τον παραπάνω ορισμό. Για παράδειγμα, αν

$$J=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \vdots & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & \lambda_1 & \vdots & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & \vdots & \lambda_4 & 1 & \vdots & \\
 & & & \vdots & 0 & \lambda_4 & \vdots & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & \underline{0} & & & & & \vdots & \lambda_6 & \\
 & & & & & & \vdots & & \lambda_7
\end{bmatrix}$$

τότε

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}
e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & & \\
0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \vdots & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & \vdots & e^{\lambda_4 t} & te^{\lambda_4 t} & \vdots & & \\
 & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_4 t} & \vdots & & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & \underline{0} & & & & & \vdots & e^{\lambda_6 t} & 0 \\
 & & & & & & \vdots & 0 & e^{\lambda_7 t}
\end{bmatrix}$$

και

$$
\mathbf{J}^{k} = \begin{bmatrix}
\lambda_1^{k} & k\lambda_1^{k-1} & k(k-1)\lambda_1^{k-2} & \vdots & & & & \\
0 & \lambda_1^{k} & k\lambda_1^{k-1} & \vdots & & & \underline{0} & \\
0 & 0 & \lambda_1^{k} & \vdots & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & & \vdots & \lambda_4^{k} & k\lambda_4^{k-1} & \vdots & \\
 & & & \vdots & 0 & \lambda_4^{k} & \vdots & \\
 & & & & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
 & \underline{0} & & & & & \vdots & \lambda_6^{k} & 0 \\
 & & & & & & \vdots & 0 & \lambda_7^{k}
\end{bmatrix}
$$