ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΗΣ} ΤΑΞΗΣ

1) ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε.: y'=a(t)y+b(t), ολοκληρωτικός παράγοντας μ(t) = $e^{-\int a(t)dt}$.

2) ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΕΣ Δ.Ε.: y'=φ(t)f(y) $\Rightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = \varphi(t)dt$.

3) Δ.Ε. ΠΟΥ ΚΑΤΑΛΗΓΟΥΝ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. (ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ)

i) y' = $\dfrac{a(t)f(y)+b(t)}{f'(y)}$. Θέτουμε f(y)=u.

ii) Bernoulli: y'=a(t)y+b(t)y^n, $n \neq 0,1$. Θέτουμε y^{1-n}=u.

iii) RICCATI: y'=a(t)+b(t)y+c(t)y^2. Θέτουμε $y=y_1+\dfrac{1}{z}$ όπου $y_1(t)$ είναι μια δοσμένη μερική λύση.

4) Δ.Ε. ΠΟΥ ΚΑΤΑΛΗΓΟΥΝ ΣΕ Δ.Ε. ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ (ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ)

i) y'=f(ay+bt+c). Θέτουμε v(t)=ay+bt+c.

ii) y'=f$\left(\dfrac{a_1y+b_1t+c_1}{a_2y+b_2t+c_2}\right)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(a) $a_1b_2-b_1a_2 \neq 0$. Θέτουμε v=y-h, τ=t-k, $\dfrac{dv}{d\tau}$ = y', h,k λύσεις του συστήματος

$a_1y+b_1t+c_1=0$

$a_2y+b_2t+c_2=0$.

(b) $a_1b_2-b_1a_2 = 0$. Θέτουμε $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_1} = \lambda$.

iii) ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε.: y'=f$\left(\dfrac{y}{t}\right)$. Θέτουμε y=tu.

Μία Δ.Ε. y'=f(t,y) λέγεται ομογενής n-βαθμού, αν ισχύει $f(kt,ky)=k^n f(t,y)$, $\forall k \neq 0$.

5) **ΑΚΡΙΒΕΙΣ Δ.Ε.:** Μία Δ.Ε. της μορφής P(t,y)dt+Q(t,y)dy=0 (1) λέγεται ακριβής αν $\exists$ u(t,y): du=Pdt+Qdy=0.

(1) ΑΚΡΙΒΗΣ $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$.

du = $\dfrac{\partial u}{\partial t}dt + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

6) ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ:

Αν μ=μ(t), $\dfrac{\mu_t}{\mu} = -\dfrac{Q_t - P_y}{Q} = \varphi(t)$.

Αν μ=μ(y), $\dfrac{\mu_y}{\mu} = \dfrac{Q_t - P_y}{P} = \sigma(y)$.

Αν μ=μ(t+y), t+y=z, $\dfrac{\mu_z}{\mu} = -\dfrac{Q_t - P_y}{Q-P} = \varphi(z)$.

Αν μ=μ(t-y), t-y=z, $\dfrac{\mu_z}{\mu} = -\dfrac{Q_t - P_y}{Q+P} = k(z)$.

Αν μ=μ(ty), ty=z, $\dfrac{\mu_z}{\mu} = -\dfrac{Q_t - P_y}{yQ-tP} = h(z)$.

Β. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1) $\left(\frac{dy}{dt}\right)^n + \varphi_1(t,y)\left(\frac{dy}{dt}\right)^{n-1} + \ldots + \varphi_n(t,y) = 0.$

Αν η αλγεβρική εξίσωση ως προς y' είναι επιλυτή, δηλαδή
$y'=f_1(t,y)$, $y'=f_2(t,y),\ldots,y'=f_n(t,y)$ και $y=\sigma_1(t,y)$, $y=\sigma_2(t,y),\ldots,y=\sigma_n(t,y)$ τότε η γενική λύση είναι
$\sigma_1(t,y,c)\,\sigma_2(t,y,c)\ldots\sigma_n(t,y,c)=0$.

2) CLAIRAUT: $y=ty'+f(y')$. Θέτουμε $y'=p$.

3) D'ALEMBERT Ή LAGRANGE: $y=t\varphi(y')+f(y')$. Θέτουμε $y'=p$.

Γ. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ Δ.Ε. 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

i) $y''=f(t)$
ii) $y''=f(t,y')$. Θέτουμε $y'=v$, $y''=v'$
iii) $y''=f(y,y')$. Θέτουμε $y'=v$, $y''=y'\frac{dv}{dy}$.

Δ. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ABEL:. Έστω η Δ.Ε. $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ και y_1, y_2 λύσεις της. Τότε
$W(y_1,y_2)(t)=W(y_1,y_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$ $t_0 \in \Re$, όπου $\omega(y_1,y_2)(t)=\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix}$.

ΤΥΠΟΣ EULER: e^{it}=συνt+iημt,

$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0 y=0$ (2) ομογενής γραμμική Δ.Ε.

$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0 y=f(t)$ (3) μη ομογενής γραμμική Δ.Ε.

$a_n \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0=0$ (4) χαρακτηριστική εξίσωση της (2).

i) $\forall$ απλή ρίζα λ της (4) αντιστοιχεί λύση της (2): $y(t)=e^{\lambda t}$.
ii) $\forall$ ρίζα της (4) πολλαπλότητας k αντιστοιχούν k λύσεις της (2):
$y_1=e^{\lambda t}$, $y_2=t\,e^{\lambda t},\ldots, y_k=t^{k-1}\,e^{\lambda t}$..
iii) $\forall$ απλή μιγαδική ρίζα $\lambda=\alpha+\beta\iota$ και την συζυγή της αντιστοιχούν οι λύσεις:
$y_1=e^{\alpha t}$ συνβt, $y_2=e^{\alpha t}$ ημβt.
iv) $\forall$ μιγαδική ρίζα $\lambda=(\alpha+\beta\iota)$ και την συζυγή της πολλαπλότητας k, αντιστοιχούν οι λύσεις: $y_1=e^{\alpha t}$ συνβt, $y_2=te^{\alpha t}$ συνβt,..., $y_k=t^{k-1}\,e^{\alpha t}$ συνβt,
$y_{1\sigma}=e^{\alpha t}$ ημβt, $y_{2\sigma}=te^{\alpha t}$ ημβt,..., $y_{k\sigma}=t^{k-1}\,e^{\alpha t}$ ημβt.

Ε. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}$. (5)

(Α) ΜΕ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ, ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Η λύση $\underline{y}(t)$ του (5) είναι της μορφής $e^{\lambda t}\,\underline{v}$, όπου λ ιδιοτιμή του $\underline{A}$ (λύση της εξίσωσης $|A-\lambda I|=0$) και $\underline{v}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ και βρίσκεται από το σύστημα $[\underline{A}-\lambda\underline{I}]\,\underline{v}=\underline{0}$.

Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

i) $\lambda\in\Re$ απλή ρίζα : $y(t)=e^{\lambda t}\,\underline{v}$,

ii) $\lambda=\alpha+\beta\iota$ απλή ρίζα : αν $\underline{v}=\underline{u}+i\underline{\omega}$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε:

$$\underline{y_1}(t)=e^{\alpha t}\,[(\sigma\upsilon\nu\beta t)\underline{u}-(\eta\mu\beta t)\,\underline{\omega}]$$

$$\underline{y_2}(t)=e^{\alpha t}\,[(\eta\mu\beta t)\underline{u}+(\sigma\upsilon\nu\beta t)\,\underline{\omega}]$$

iii) $\lambda\in\Re$ πολλαπλότητας m_0, τότε:

(a) Αν $k= m_0$ (k ο αριθμός των γραμμικώς ανεξαρτήτων ιδιοδιανυσμάτων), τότε

$\underline{y}_1(t)= e^{\lambda t}\underline{v}_1$, $\underline{y}_2(t)= e^{\lambda t}\underline{v}_2, \dots, \underline{y}_k = e^{\lambda t}\underline{v}_k$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

(b) Αν $k<m_0$, τότε $\exists$ τουλάχιστον ένα διάνυσμα $\underline{\omega}$ τέτοιο ώστε $(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{\omega} \neq 0$ αλλά

$(\underline{A}-\lambda\underline{I})^2\underline{\omega}=\underline{0}$ (6)

Αν από την (6) προκύπτουν m_0-k γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2, \dots, \underline{\omega}_{m_0-k}$ τότε $\underline{y}_n = e^{\lambda t}[\underline{\omega}_n + t(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{\omega}_n]$, $n=1,2,\dots, m_0-k$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

iv) $\lambda=\alpha+\beta i$ πολλαπλότητας m_0. Ισχύει ότι στην iii) αλλά με μορφή λύσεων της περίπτωσης ii).

(B) ΜΕ ΕΚΘΕΤΙΚΟ ΠΙΝΑΚΑ: $e^{t\underline{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$.

Το σύστημα (4) έχει θεμελιώδη πίνακα $e^{t\underline{A}} = \underline{Y}(t)\underline{c}$ και $e^{t\underline{A}} = \underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(0)$. Ισχύει $e^{t\underline{A}} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Αν $P_{\underline{A}}(\lambda)=|\underline{A}-\lambda\underline{I}| = \alpha_0+\alpha_1\lambda+..+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+(-1)^n\lambda^n$ τότε ισχύει $P_{\underline{A}}(\underline{A})=0$ και

$e^{t\underline{A}} = \alpha_0(t)+\alpha_1(t)\underline{A}+\dots+\alpha_{n-1}(t)\underline{A}^{n-1}$ όπου τα $\alpha_0(t), \alpha_1(t),\dots,\alpha_{n-1}(t)$ είναι λύσεις του συστήματος του οποίου οι εξισώσεις βρίσκονται ως εξής:

i) $\forall \lambda_1 \in \Re$ απλή ιδιοτιμή του $(n\times n)$ πίνακα $\underline{A}$ αντιστοιχεί μια εξίσωση:

$\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\dots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}=e^{t\lambda_1}$.

ii) $\forall$ $\lambda=\alpha+\beta i$ (και την συζυγή της) αντιστοιχούν δύο εξισώσεις που προκύπτουν από την εξίσωση $\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\dots+\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}=e^{t\lambda}$.

iii) $\forall$ ιδιοτιμή λ του $(n\times n)$ πίνακα $\underline{A}$ πολλαπλότητας m αντιστοιχούν m εξισώσεις:

$\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda+\dots+\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1}=e^{t\lambda}$.

$\alpha_1(t)+2\alpha_2\lambda+\dots+(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-2}=te^{\lambda t}$

$2\alpha_2+\dots+(n-2)(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-3}=t^2e^{\lambda t}$

....

$(m-1)!\alpha_{m-1}(t)+m!\alpha_m(t)\lambda+\dots+(n-m+1)\dots(n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-m+1}=t^{m-1}e^{\lambda t}$.

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}$ (5) :

$\underline{y}(t)=\underline{Y}(t)\underline{c}$ όπου $\underline{Y}(t)$ ο θεμελιώδης πίνακας του (5),

ή $\underline{y}(t)=e^{t\underline{A}}\underline{c}$ όπου $e^{t\underline{A}}$ ο εκθετικός πίνακας.

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ του συστήματος $\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}$ (7)

$\underline{y}(t_0)=\underline{y}_0$:

$\underline{y}(t)=\underline{Y}(t)\underline{Y}^{-1}(t_0)\underline{y}_0$

ή $\underline{y}(t)=e^{t\underline{A}}e^{-t_0\underline{A}}\underline{y}_0$.

ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}+\underline{f}(t)$:

$\underline{y}(t)=\underline{y}_{o\mu}+\underline{y}_p=\underline{Y}(t)\underline{c}+\underline{Y}(t)\int\underline{Y}^{-1}(t)\underline{f}(t)dt$

ή $\underline{y}(t)=e^{t\underline{A}}\underline{c}+e^{t\underline{A}}\int e^{-t\underline{A}}\underline{f}(t)dt$.

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$$\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}+\underline{f}(t)$$

(8) :

$$\underline{y}'(t_0)=\underline{y}_0$$

$$\underline{y}(t)=\underline{Y}(t)\,\underline{Y}^{-1}(t_0)\,\underline{y}_0+\underline{Y}(t)\int_{t_0}^{t}Y^{-1}(s)\,\underline{f}(s)ds$$

ή $\underline{y}(t)=e^{t\underline{A}}\,e^{-t_0\underline{A}}\,\underline{y_0}+e^{t\underline{A}}\int_{t_0}^{t}e^{-s\underline{A}}f(s)ds.$

ΕΥΡΕΣΗ ΜΙΑΣ ΜΕΡΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\underline{y}'=\underline{A}\,\underline{y}+e^{\mu t}\,\underline{v}$ (9).

i) Αν το μ δεν είναι ιδιοτιμή του $\underline{A}$, τότε μια μερική λύση του (8) είναι η $\underline{y_p}=e^{\mu t}\,\underline{u}$ όπου $\underline{u}$ είναι λύση του συστήματος $(\underline{A}-\mu\underline{I})\underline{u}=-\underline{v}$.

ii) Αν το μ είναι απλή ιδιοτιμή του $\underline{A}$ τότε $\underline{y_p}=e^{\mu t}(\underline{u}+t\underline{\omega})$ όπου το $\underline{\omega}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\underline{A}$ για την ιδιοτιμή μ και $\underline{u}$ είναι λύση του συστήματος $(\underline{A}-\mu\underline{I})\underline{u}=\underline{\omega}-\underline{v}$.

iii) Αν $e^{\mu t}\,\underline{v}$ είναι μιγαδικός και $\underline{y_p}(t)=e^{\mu t}\,\underline{u}$ είναι μια μιγαδική λύση του (8) τότε οι συναρτήσεις

$$\underline{y_1}(t)=\mathrm{Re}(e^{\mu t}\,\underline{u})$$

$$\underline{y_2}(t)=\mathrm{I}_m(e^{\mu t}\,\underline{u})$$

είναι λύσεις των συστημάτων

$$\underline{y'_1}=\underline{A}\,\underline{y_1}+\mathrm{Re}(e^{\mu t}\,\underline{v})$$

$\underline{y'_2}=\underline{A}\,\underline{y_2}+\mathrm{Im}(e^{\mu t}\,\underline{v})$ αντίστοιχα.

ΣΤ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

(1) $L[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$

(2) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

(i) Γραμμική ιδιότητα: $L(kf+\lambda g)=kL(f)+\lambda L(g)$

(ii) Ιδιότητα μετατόπισης: $L[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

(iii) Αλλαγή του μέτρου της μεταβλητής: $L[f(at)]=\frac{1}{a}F\left[\frac{s}{a}\right]$

(iv) Ιδιότητα παραγώγων:

α) $L(f')=sL(f)-f(0)$

β) $L(f'')=s^2L(f)-sf(0)-f'(0)$

γ) $L(f^{(n)})=s^nL(f)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$.

(3) Συνέλιξη των συναρτήσεων f,g: $f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

(4) Βηματική συνάρτηση: $u_a(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$.

(5) $L(u_a(t))=\dfrac{e^{-as}}{s}$.

(6) $L[u_a(t)f(t-a)]=e^{-as}F(s)\Leftrightarrow L^{-1}[e^{-as}F(s)]=u_a(t)f(t-a)$ όπου $L[f(t)]=F(s)$.

(7) Έστω η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases}c_1, 0\leq t<a\\ c_2, a\leq t<b\\ c_3, \quad b\leq t\end{cases}$ τότε:

$f(t)=c_1(u_0(t)-u_\alpha(t))+c_2(u_\alpha(t)-u_b(t))+c_3u_b(t)$.

(8) Συνάρτηση δέλτα του Dirac: δ(t-a)=0, $t \neq a$ και ισχύουν

(i) $L[\delta(t-a)]=e^{-as}$, (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt=1$.

(9) ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Ο παρακάτω πίνακας συμπεριλαμβάνει τους μετασχηματισμούς Laplace ορισμένων συναρτήσεων που εμφανίζονται συχνά στη πράξη:

f(t)	Lf[f](s)
1	1/s
t^n, n=1,2,...	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	1/(s-a)
$t^n e^{at}$, n=1,2,...	$n!/(s-a)^{n+1}$
sinωt	$\omega/(s^2+\omega^2)$
cosωt	$s/(s^2+\omega^2)$
e^{at} sinωt	$\omega/[(s-a)^2+\omega^2]$
e^{ab} cosωt	$(s-a)/[(s-a)^2+\omega^2]$
tsinωt	$2\omega s/(s^2+\omega^2)^2$
tcosωt	$(s^2-\omega^2)/(s^2+\omega^2)^2$
sinhbt	$b/(s^2-b^2)$
coshbt	$s/(s^2-b^2)$
e^{at} sinhbt	$b/[(s-a)^2-b^2]$
e^{at} coshbt	$(s-a)/[s-a)^2-b^2]$
tsinhωt	$2\omega s/(s^2-\omega^2)^2$
tcoshωt	$(s^2+\omega^2)/(s^2-\omega^2)^2$

<u>ΛΥΣΗ ΤΗΣ Δ.Ε.</u> p(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0 <u>ΜΕ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ</u> (10)

1) Αν το t_0 είναι σύνηθες σημείο της (10) τότε η γενική λύση της (10) είναι

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n .$$

2) Αν το t_0 είναι ομαλό ιδιόμορφο σημείο της Δ. εξίσωσης

$$a(t)(t-t_0)^2 a(t)y''+(t-t_0)b(t)y'+c(t)y = 0 \qquad (11)$$

τότε η ενδεικτική εξίσωση είναι

$$a_0\lambda^2+(b_0-a_0)\lambda+c_0=0 \qquad (12)$$

$$a_0=a(0),\ b_0=b(0),\quad c_0=c(0).$$

i) Αν οι ενδεικτικές ρίζες λ_1,λ_2 με $Re\lambda_1>Re\lambda_2$ και $\lambda_1-\lambda_2$ δεν είναι μηδέν ή θετικός ακέραιος τότε η γενική λύση της (11) είναι

$$y(t)=c_1|t-t_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} d_n|t-t_0|^n + c_2|t-t_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} k_n|t-t_0|^n.$$

ii) Αν $\lambda_1=\lambda_2$ τότε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (11) είναι οι

$$y_1(t)=|t-t_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} d_n|t-t_0|^n$$

$$y_2(t)=(\ln|t-t_0|)y_1(t)+|t-t_0|^{\lambda_1+1}\sum_{n=0}^{\infty} k_n|t-t_0|^n.$$

iii) Αν $\lambda_1 - \lambda_2$ είναι θετικός ακέραιος τότε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (11) είναι οι

$$y_1(t)=|t-t_0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} d_n |t-t_0|^n$$

$$y_2(t)=c(\ln|t-t_0|)y_1(t)+|t-t_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} k_n |t-t_0|^n.$$

ΕΞΙΣΩΣΗ EULER

$$a(t-t_0)^2 y''+b(t-t_0)y'+cy=0 \qquad (13)$$

Η Δ.Ε. (1) έχει ενδεικτική εξίσωση

$$a\lambda^2+(b-a)\lambda+c=0. \qquad (14)$$

i) Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ πραγματικές ρίζες της (14) τότε

$$y_1(t)=|t-t_0|^{\lambda_1},\ y_2=|t-t_0|^{\lambda_2}.$$

ii) Αν $\lambda=\mu+\nu i$ μιγαδική ρίζα της (14) τότε

$$y_1(t)=|t-t_0|^{\mu}\,\sigma\upsilon\nu(\nu\ln|t-t_0|),\quad y_2(t)=|t-t_0|^{\mu}\,\eta\mu(\nu\ln|t-t_0|).$$

iii) Αν λ είναι διπλή ρίζα της (14) τότε

$$y_1(t)=|t-t_0|^{\lambda},\ y_2(t)=|t-t_0|^{\lambda}\ln|t-t_0|.$$