ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

1.1. Εισαγωγή

Οι διαφορικές εξισώσεις αποτέλεσαν τα βασικότερα μοντέλα ερμηνείας των φυσικών φαινομένων από την εποχή του Νεύτωνα. Αλλά και σήμερα προβλήματα, στα οποία οι διάφορες μεταβλητές ποσότητες που τα προσδιορίζουν συνδέονται με τις ποσοστιαίες μεταβολές τους, περιγράφονται με Δ.Ε.

Σ' αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα δώσουμε μόνο τις γενικές μεθόδους λύσεων συγκεκριμένων μορφών Δ.Ε, με έμφαση στις εφαρμογές σε γνωστά κλασικά προβλήματα, και δε θα ασχοληθούμε με θέματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων, που είναι πιο απαραίτητα σε όσους ασχολούνται περισσότερο με τη μαθηματική θεμελίωση.

1.2. Ορισμοί

Διαφορική εξίσωση (Δ.Ε) είναι μια εξίσωση που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή, μία άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της διαφόρων τάξεων. Αν η συνάρτηση εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, η Δ.Ε λέγεται **συνήθης**, αλλιώς **Δ.Ε με μερικές παραγώγους**. Π.χ. οι

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad (\omega = \text{σταθ.}), \qquad y'' + 3y' + 2y = 0$$

είναι συνήθεις Δ.Ε, ενώ οι:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

είναι Δ.Ε με μερικές παραγώγους.

Οι Δ.Ε μπορούν να οριστούν με τη βοήθεια των διανυσματικών πεδίων. Έστω το επίπεδο διανυσματικό πεδίο

$$\underline{F}(x, y) = f(x, y)\,\underline{i} + g(x, y)\,\underline{j} \qquad (\alpha)$$

Τότε, σε κάθε σημείο (x, y) του επιπέδου, αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $(f(x, y), g(x, y))$ με συντελεστή διεύθυνσης $g(x, y)/f(x, y)$. Συνεπώς, αν $g(x, y)/f(x, y) = \varphi(x, y)$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης y' κάθε διανύσματος του διανυσματικού πεδίου δίνεται από τη Δ.Ε

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad \text{ή} \quad g(x, y)\,dx - f(x, y)\,dy = 0 \qquad (\beta)$$

Αλλά και αντιστρόφως. Έστω η Δ.Ε (β). Γράφουμε τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$ στη μορφή $g(x, y)/f(x, y)$, οπότε το διανυσματικό πεδίο (α) είναι αυτό που αντιστοιχεί σ' αυτή.

Λύση μιας Δ.Ε της μορφής (β) λέγεται η εύρεση μιας οικογένειας των καμπύλων $\Phi(x, y, c) = 0$, c αυθαίρετη σταθερή, έτσι ώστε, αν λύσουμε αυτή ως προς y και την αντικαταστήσουμε στη (β), να την επαληθεύει. Διαφορετικά λύση της Δ.Ε (β) λέγεται η εύρεση των γραμμών ροής της Δ.Ε, δηλαδή η εύρεση μιας κατάλληλης οικογένειας καμπύλων τέτοιας, ώστε η κάθε καμπύλη της να εφάπτεται στο σημείο (x, y) των διανυσμάτων $\underline{F}(x, y)$.

Αν δε $\underline{F}$ είναι διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο επίπεδο $0xy$, τότε τα υλικά σημεία θα κινηθούν κατά μήκος των καμπύλων της οικογένειας λύσεων των γραμμών ροής υπό την επίδραση του διανυσματικού πεδίου. Όταν δε το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y)$ είναι συντηρητικό, τότε υπάρχει δυναμικό $U(x, y)$ τέτοιο, ώστε $\underline{F} = \underline{\nabla} U$ και, ως γνωστό, το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ είναι κάθετο στις ισοσταθμικές γραμμές.

Παράδειγμα 1.2.1: Ποιά είναι η Δ.Ε που αντιστοιχεί στο επίπεδο κεντρικό διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y) = -k\dfrac{m}{|\underline{r}|^3}\underline{r}$;

Λύση: Το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y)$ γράφεται

$$\underline{F}(x, y) = -km\frac{x}{|\underline{r}|^3}\underline{i} - km\frac{y}{|\underline{r}|^3}\underline{j}$$

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$f(x, y) = -km \frac{x}{|\underline{r}|^3}, \quad g(x, \quad y) = -km \frac{y}{|\underline{r}|^3}$$

και άρα η αντίστοιχη Δ.Ε είναι η

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} = \frac{y}{x},$$

που είναι η ζητούμενη. Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση αυτή έχει λύση $y = cx$, δηλαδή μία κεντρική δέσμη ευθειών που είναι η οικογένεια των γραμμών ροής του πεδίου. Επειδή δε το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x, y)$ είναι συντηρητικό με δυναμικό $U = k \dfrac{m}{|\underline{r}|}$, οι ισοδυναμικές γραμμές $U(x, y) = c_1$ είναι οι ομόκεντροι κύκλοι $|\underline{r}| = k\dfrac{m_1}{c_1}$, που είναι κάθετοι στις γραμμές ροής $y = cx$.

Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με συνήθεις Δ.Ε.

Τάξη της Δ.Ε είναι η μεγαλύτερη τάξη της παραγώγου που εμφανίζεται στη Δ.Ε. Οι δύο πρώτες Δ.Ε στην αρχή της παραγράφου είναι δεύτερης τάξης. **Βαθμός** μιας Δ.Ε είναι ο βαθμός της μεγαλύτερης τάξης παραγώγου που περιέχεται σ' αυτή, π.χ. η συνήθης Δ.Ε $(y''')^2 - 3y'y'' + (y'')^2 = 0$ είναι τρίτης τάξης και δευτέρου βαθμού. Οι πιο απλές, αλλά και οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες Δ.Ε είναι οι γραμμικές. Μία Δ.Ε λέγεται **γραμμική**, όταν είναι γραμμική ως προς τις παραγώγους και τη συνάρτηση με συντελεστές συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής. Π.χ. οι Δ.Ε

$$\alpha_1(x)\, y' + \alpha_0(x)\, y = f(x), \qquad \alpha_2(x)\, y'' + \alpha_1(x)\, y' + \alpha_0(x)\, y = g(x),$$

είναι γραμμικές πρώτης και δεύτερης τάξης, αντίστοιχα.

Λύση μιας Δ.Ε είναι κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ που την επαληθεύει. Π.χ. η συνάρτηση $y = ημ\,2x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 4y = 0$. Μία Δ.Ε δεν έχει ποτέ μία λύση. Το σύνολο των λύσεων μιας Δ.Ε λέγεται **γενική λύση**, π.χ θα αποδείξουμε παρακάτω ότι η προηγούμενη Δ.Ε έχει γενική λύση $y = c_1\, ημ2x + c_2\, συν2x$. Θέτοντας ορισμένες συνθήκες είναι δυνατό να προσδιορίσουμε από τη γενική λύση μια συγκεκριμένη λύση που λέγεται **μερική λύση**, π.χ η Δ.Ε $y' = y$ έχει γενική λύση την $y = ce^x$. Ποιά είναι η λύση $y(x)$ αυτής που πληροί τη συνθήκη $y(0) = 1$; Έχουμε $y(0) = ce^0 = c = 1$. Συνεπώς η $y = e^x$ είναι μερική λύση. Αν μία Δ.Ε θεωρηθεί στο διάστημα (x_0, x_1), τότε μπορούμε να έχουμε γενικά δύο τύπους συνθηκών. Αν οι τιμές της λύσης και των παραγώγων της προσδιορίζονται για $x = x_0$ μόνο, τότε οι συνθήκες λέγονται **αρχικές συνθήκες**, ή λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα **αρχικών τιμών**. Αν οι τιμές της λύσης προσδιορίζονται και για $x = x_1$, τότε οι συνθήκες λέγονται **συνοριακές συνθήκες**, ή λέμε ότι έχουμε **πρόβλημα συνοριακών τιμών**.

Παράδειγμα 1.2.2: Η γενική λύση της Δ.Ε $y''+4y = 0$ είναι η $y = c_1\,ημ2x+c_2\,συν2x$. Ποιά είναι η λύση που περνά από το σημείο (0, 1) με συντελεστή διεύθυνσης 2;

Λύση: Δηλαδή ζητάμε τη λύση $y(x)$ που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=1$ και $y'(0)=2$. Συνεπώς επειδή, $y=c_1\,ημ2x+c_2\,συν2x$ και $y'(x) = 2c_1\,συν2x-2c_2\,ημ2x$, έχουμε $0\cdot c_1+c_2 = 1$ και $2c_1-2c_2\cdot 0 = 2$. Δηλαδή, $c_2 = 1$ και $c_1 = 1$. Συνεπώς, η λύση που ζητάμε είναι η $y(x) = ημ2x+συν2x$.

1.3. Διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Η γενική μορφή μιας Δ.Ε πρώτης τάξης είναι η $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ ή $dy = f(x, y)\,dx$, και αν

τότε
$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{1.3.1}$$

π.χ. οι Δ.Ε: $y'=\dfrac{x}{y}$, $dy = \dfrac{x}{y}\,dx$, $xdx-y\,dy = 0$ παριστάνουν την αυτή Δ.Ε.

Οι Δ.Ε της μορφής (1.3.1) μπορούν εύκολα να λυθούν στην περίπτωση που $f(x, y) = \dfrac{\varphi(x)}{g(y)}$, οπότε

$$y'=\frac{\varphi(x)}{g(y)} \quad ή \quad g(y)\,dy = \varphi(x)\,dx \tag{1.3.2}$$

Οι Δ.Ε της μορφής (1.3.2) λέγονται **χωριζόμενων μεταβλητών** και όπως θα δούμε η γενική τους λύση προκύπτει αμέσως με ολοκλήρωση **αμφότερων των μελών τους**. Δηλαδή

$$\boxed{\int g(y)\, dy = \int \varphi(x)\, dx + c.} \tag{1.3.3}$$

Παράδειγμα 1.3.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \dfrac{x(y+1)}{y}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{y}{y+1}\, dy = x\, dx \quad \text{ή} \quad \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = x\, dx.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε

$$\int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int x\, dx \quad \text{ή} \quad y - \ln(y+1) = \frac{1}{2} x^2 + c.$$

Αυτή είναι μια μορφή της γενικής λύσης.

Παράδειγμα 1.3.2: Να λυθούν οι Δ.Ε.: (α) $x dy - y\, dx = 0$

(β) $x^{1/2} dy + dx = 0$.

Λύση: (α) Η Δ.Ε (α) γράφεται $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ $\Rightarrow$

$\ln|y| = \ln|x| + c$ (c = αυθαίρετη σταθερά) $\Rightarrow$ $\ln|y| - \ln|x| = c$ $\Rightarrow$

$\ln|y/x| = c \Rightarrow |y/x| = e^c \Rightarrow y = \pm e^c x \Rightarrow y = m\,x\ (m = \pm e^c)$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η αρχική Δ.Ε γίνεται

$$(0)\, dy - y\, d(0) = 0 - 0 = 0$$

$$x\, d(0) - 0 \cdot dx = 0 - 0 = 0.$$

Δηλαδή οι τιμές αυτές αποτελούν τις ιδιάζουσες λύσεις της Δ.Ε.

Επίσης, η Δ.Ε (β) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^{1/2}} \Rightarrow dy = -\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \Rightarrow y = -2x^{1/2} + c \Rightarrow y + 2x^{1/2} = c.$$

Παράδειγμα 1.3.3: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$2x(y+1)\, dx - y\, dy = 0,$$

όπου $x = 0$ και $y = -2$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{y+1}{y} \Rightarrow \frac{y}{y+1}\, dy = 2x\, dx \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = 2x\, dx \Rightarrow$$

$$y-\ln|y+1| = x^2+c_1 \quad \text{ή} \quad x^2 = y-\ln|y+1|+c.$$

Για $y(0) = -2$, έχουμε

$$0 = -2\ln|-|+c \Rightarrow c = 2.$$

Συνεπώς, η λύση αρχικών τιμών είναι $x^2 = y-\ln|y+1|+2$.

Παράδειγμα 1.3.4. Να λυθούν οι Δ.Ε

(α) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 y$

(β) $(xy^2-x)+(x^2y+y)\,dy = 0$

(γ) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$

(δ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln x \quad (x \geq 0).$

Λύση. (α) $\Rightarrow x^2\,dx - \dfrac{1}{y}\,dy = 0 \Rightarrow \displaystyle\int x^2\,dx - \int \frac{1}{y}\,dy = c \Rightarrow$

$\dfrac{x^3}{3} - \ln|y| = c \Rightarrow \dfrac{x^3}{3} + \ln|y^{-1}| = c \Rightarrow \left|\dfrac{1}{y}\right| = e^{c-(x^3/3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = e^{(x^3/3)-c} \Rightarrow |y| = e^{-c}\cdot e^{x^3/3} \Rightarrow y = \pm e^{-c}\cdot e^{x^3/3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = m\,e^{x^3/3} \quad (m = \pm e^{-c}).$

(β) $\Rightarrow x(y^2-1)\,dx + y(x^2+1)\,dy = 0 \Rightarrow \dfrac{x\,dx}{x^2+1} + \dfrac{y\,dy}{y^2-1} = 0 \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{y\,dy}{y^2+1} = k \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}(y^2+1) = k \Rightarrow$

$\ln[(x^2+1)(y^2+1)] = \ln c \quad \left(k = \dfrac{1}{2}\ln c\right)$ ή

$(x^2+1)(y^2-1) = c.$

(γ) $\Rightarrow \dfrac{dy}{y^3} = x^2\,dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2\,dx + c$ ή $-\dfrac{1}{2y^2} = \dfrac{x^3}{3} + c$ ή

$2y^2x^2 + cy^2 + 3 = 0.$

(δ) $\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x\ln x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln x} + c_1 \Rightarrow \ln y = \ln(\ln x) + c_1$ ή

$\ln y = \ln(\ln x) + \ln c \quad (c_1 = \ln c)$ ή $\ln y - \ln c = \ln(\ln x)$ ή

$\ln(y/c) = \ln(\ln x)$ ή $y/c = \ln x$ ή $y = c\ln x$

Παράδειγμα 1.3.5: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

(α) $x \cos x \, dx + (1-6y^5)\, dy = 0, \; y(\pi) = 0$

(β) $y' \sin x = y\,(y-1), \; y(\pi/2) = 2$

Λύση: (α) Η εξίσωση (α) γράφεται

$$(1-6y^5)\, dy = -\, x \cos x \, dx,$$

οπότε δι' ολοκληρώσεως έχουμε

$$\int (1-6y^5)\, dy = -\int x \cos x \, dx + c \;\; ή \;\; y - y^6 = -x \sin x - \cos x + c$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(\pi) = 0$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $0 - 0 = \pi \cdot 0 - (-1) + c \Rightarrow c = -1$. Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι η

$$y - y^6 + x \sin x + \cos x = -1$$

(β) Η εξίσωση (β) γράφεται

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\sin x} \quad για \; y \neq 0, \; y \neq 1, \; x \neq 0, \; x \neq \pi,$$

οπότε με ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\sin x} + c_1, \; c_1 \in R \; ή$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y}\right) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \ln c, \; c > 0 \; ή$$

$$\frac{y-1}{y} = c \tan\frac{x}{2}, \quad c > 0$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(\pi/2) = 2$, λύνουμε ως προς c την ισότητα

$$\frac{2-1}{2} = c \tan\frac{\pi}{4}, \quad οπότε \; c = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι η

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Η συνάρτηση $y = 1$ και $y = 0$ είναι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, αφού $y\,(y-1) = 0$, $y = 1$ μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση

$$\frac{y-1}{y} = c \tan\frac{x}{2}, \quad c \geq 0.$$

Παράδειγμα 1.3.6: Είναι γνωστο ότι, σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα χωρίς πυκνωτή, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i (t), που διαρρέει το κύκλωμα πηνίου - ωμικής αντίστασης (R) με σταθερή ηλεκτρεγετρική δύναμη $E > 0$, ικανοποιεί τη Δ.Ε, $E = L\dfrac{di}{dt} + iR$ (α). Ζητείται να βρεθεί η ένταση i (t).

Λύση: Η Δ.Ε (α) γράφεται

$$\frac{di}{dt} = \frac{E-iR}{E} \quad \text{ή} \quad \frac{di}{E-iR} = \frac{1}{L}\,dt \quad (\beta) \quad \text{με } E-iR \neq 0$$

δηλαδή η Δ.Ε (α) είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Από τις τελευταίες συνθήκες προκύπτει

$$I_t = [0, +\infty) \quad \text{και} \quad I_i = \left(-\infty, \frac{E}{R}\right) \quad \text{ή} \quad I_i = \left(\frac{E}{R}, +\infty\right).$$

Από την Δ.Ε (β) έχουμε:

$$\int \frac{di}{E-Ri} = \frac{1}{L}\int dt + c_1 \quad (c_1 \in R)$$

ή

$$-\frac{1}{R}\ln(E-iR) = \frac{1}{L}t + c_1 \quad (c_1 \in R)$$

ή

$$\ln|E-iR| = \ln e^{-(R/L)t} + \ln c_2 \quad (c_2 > 0)$$

ή

$$|E-iR| = c_2 e^{-(R/L)t}, \quad (c_2 > 0)$$

ή

$$i = \frac{E}{R} + \frac{c}{R}e^{-(R/L)t} \quad c \in R - \{0\}$$

Η ιδιάζουσα λύση της εξίσωσης $i = \dfrac{E}{R}$, για την οποία είναι $E - iR = 0$, μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση

$$i = \frac{E}{R} + \frac{C}{R}e^{-(R/L)t}, \quad c \in R$$

Για $i(0) = 0$, προκύπτει $c = -E$, οπότε η μερική λύση της Δ.Ε είναι η

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Δηλαδή, με το κλείσιμο του διακόπτη, λόγω της αυτεπαγωγής του πηνίου, η ένταση του ρεύματος δεν είναι ίση μ' αυτή που καθορίζεται από το νόμο του Ohm ($i = E/R$). Αυτό, θεωρητικά μπορεί να συμβεί μετά παρέλευση απείρου χρόνου.

Παράδειγμα 1.3.7. Να λυθεί η Δ.Ε. $xy(1+x^2)\,dy = (1+y^2)\,dx$.

Λύση: Η Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών, καθόσον γράφεται

$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

Δι' ολοκληρώσεως της τελευταίας σχέσεως έχουμε:

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{2}\ln(1+y)^2 = \int \frac{A_1\,dx}{x} + \int \frac{A_2x+A_3}{x^2+1}\,dx$$

ή

$$\ln(1+y^2) = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

[$A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$ που είναι αποτέλεσμα της ανάλυσης του κλάσματος $1/x\,(1+x^2)$ σ' άλλα απλά κλάσματα] ή

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln c_1 \quad \acute{\eta}$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = 2\ln c_1 x \quad \acute{\eta} \quad (1+x^2)(1+y^2) = x^2 c \quad (c = c_1^2).$$

Παράδειγμα 1.3.8: Να λυθεί η Δ.Ε : $\theta(1+\rho^2)\,d\theta/d\rho = -\rho(1+\theta^2)$.

Λύση: Η Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών καθόσον γράφεται

$$\frac{\rho\,d\rho}{1+\rho^2} = -\frac{\theta\,d\theta}{1+\theta^2}$$

Η γενική λύση αυτής προκύπτει δι ολοκληρώσεως της τελευταίας μορφής, οπότε θα έχουμε

$$\int \frac{\rho\,d\rho}{1+\rho^2} = -\int \frac{\theta\,d\theta}{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln c \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+\theta^2) + \frac{1}{2}\ln c \quad \acute{\eta}$$

$$\ln(1+\rho^2) = \ln\frac{c}{\theta^2+1} \quad \acute{\eta} \quad \rho^2+1 = \frac{c}{\theta^2+1} \quad \acute{\eta} \quad (\rho^2+1)(\theta^2+1) = c$$

Παράδειγμα 1.3.9: Να λυθεί η Δ.Ε $(1+e^x)\,y\,dy = e^x\,dx$, $y(1) = 1$.

Λύση: Η ΔΕ γράφεται $y\,dy = \dfrac{e^x}{e^x+1}dx$ ή

$$\frac{y^2}{2} = \ln(e^x+1) + \ln c \quad ή \quad y^2 = 2\ln(e^x+1) + \ln c \quad ή \quad y^2 = \ln c\,(e^x+1)^2$$

Προς προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1)=1$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $1=\ln c(1+e)^2$, οπότε $c=\dfrac{1}{(1+e)^2}$.

Συνεπώς, η ζητούμενη λύση είναι η $y^2 = \ln\left[\dfrac{e^x+1}{1+e}\right]^2$.

Παράδειγμα 1.3.10: Να λυθεί η Δ.Ε $\sin x\,dy = y\ln y\,dx$, $y(\pi/2)=1$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται: $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{\sin x}$ με $I_x=(0,\pi)$ και $I_y=(0,+\infty)$,

οπότε η γενική λύση προκύπτει δι' ολοκληρώσεως της τελευταίας σχέσης,

δηλαδή $\displaystyle\int\frac{dy}{y\ln y} = \int\frac{dx}{\sin x}$ ή $\displaystyle\int\frac{1}{\ln y}\,d\ln y = \int\frac{2\,d\omega}{1+\omega^2}\,\frac{1+\omega^2}{2\omega}$ ή

$$\ln\cdot\ln(y) = \ln\omega + \ln c \qquad \left(\tan\frac{x}{2}=\omega\right) \quad ή$$

$$\ln(\ln y) = \ln c\tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad ή \quad y = e^{c\tan(x/2)}$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης της Δ.Ε που πληροί την αρχική συνθήκη $y(\pi/2)=1$, λύνουμε ως προς την ισότητα $1=e^{c\tan(\pi/4)}$ ή $1=e^c$ ή $c=0$. Συνεπώς, η ζητούμενη λύση είναι η $y=1$.

1.4. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Πολλές φορές το δεύτερο μέλος της Δ.Ε $y'=f(x,y)$ μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του λόγου y/x. Δηλαδή

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε ως νέα μεταβλητή την $\upsilon=\dfrac{y}{x}$ ή $\boxed{y=\upsilon x,}$ οπότε $\boxed{y'=\upsilon' x+\upsilon.}$

Με αντικατάσταση η Δ.Ε γίνεται

$$\upsilon' x + \upsilon = \varphi(\upsilon) \quad ή \quad \upsilon' = \frac{\varphi(\upsilon) - \upsilon}{x}$$

που είναι μια Δ.Ε χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.1: Να λυθεί η Δ.Ε $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $y' = \dfrac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}}$.

Θέτουμε $\dfrac{y}{x} = \upsilon$ και $y' = \upsilon' x + \upsilon$, οπότε

$$\upsilon' x + \upsilon = \frac{1+\upsilon^2}{\upsilon} \quad ή \quad \upsilon' x = \frac{1}{\upsilon} \quad ή \quad \upsilon\, d\upsilon = \frac{dx}{x} \quad ή$$

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 = \ln x + c_1 = \ln cx \quad ή \quad y^2 = 2x^2 \ln cx .$$

Το επόμενο παράδειγμα είναι ένα τυπικό παράδειγμα Δ.Ε που για τη λύση χρειαζόμαστε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς.

Παράδειγμα 1.4.2: Να λυθεί η Δ.Ε $(x^2 - xy + y^2)\, dx - x\, y\, dy = 0$.

Λύση: Η ΔΕ γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \dfrac{1-(y/x)+(y/x)^2}{y/x}$

Θέτουμε $y = \upsilon x$ και $y' = \upsilon' x + \upsilon$,
οπότε η Δ.Ε γίνεται

$$\upsilon' x + \upsilon = \frac{1 - \upsilon x + \upsilon^2}{\upsilon} \quad ή \quad \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1-\upsilon}{\upsilon}\right).$$

Η τελευταία Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών και γράφεται

$$\frac{\upsilon\, d\upsilon}{1-\upsilon} = \frac{dx}{x} \quad ή \quad \frac{dx}{x} + \left(1 + \frac{1}{1-\upsilon}\right) d\upsilon = 0 \quad ή$$

$\ln|x| + \upsilon + \ln|\upsilon - 1| = \ln c \quad ή \quad x(\upsilon - 1)e^{\upsilon} = c.$

Τέλος, αντικαθιστώντας όπου $\upsilon = y/x$ έχουμε

$$x\left(\frac{y}{x} - 1\right) e^{y/x} = c \quad \text{ή} \quad (y-x)\, e^{y/x} = c$$

Παράδειγμα 1.4.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$(x^2-2y^2)\,dx + (xy)\,dy = 0 \qquad (\alpha)$$

Λύση: Η Δ.Ε (α) είναι ομογενής, καθόσον οι παραστάσεις x^2-2y^2 και xy είναι ομογενείς ως προς x και y βαθμού ομογενείας 2. Θέτουμε $y = x\,\upsilon(x)$, οπότε $dy = \upsilon\,dx + x\,d\upsilon$. Τότε, η Δ.Ε (α) γράφεται:

$$(x^2-2\upsilon^2x^2)\,dx + x(\upsilon x)\,(\upsilon dx + x d\upsilon) = 0 \quad \text{ή} \quad (x^2-\upsilon^2x^2)\,dx + x^3\,\upsilon\,d\upsilon = 0$$

ή

$$x^2\,[1-\upsilon^2)\,dx + (\chi\upsilon)\,d\upsilon] = 0 \qquad (\beta)$$

οπότε είτε

$$x = 0 \qquad (\gamma)$$

ή

$$(1-\upsilon^2)\,dx + (x\upsilon)\,dy = 0 \qquad (\delta)$$

Η Δ.Ε (δ), με $1-\upsilon^2 \neq 0$, γράφεται

$$0 = \frac{dx}{x} + \frac{\upsilon d\upsilon}{1-\upsilon^2} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\upsilon} - \frac{1}{1-\upsilon}\right) d\upsilon = 0,$$

οπότε με ολοκλήρωση έχουμε

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+\upsilon| + \frac{1}{2}\ln|1-\upsilon| = c_1$$

ή

$$\ln\left(\frac{|x|}{|1-\upsilon^2|^{1/2}}\right) = c_1.$$

Με την αντικατάσταση του υ με y/x, η τετλευταία σχέση γίνεται

$$\frac{|x|}{|1-(y^2/x^2)|^{1/2}} = e^{c_1} > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{|x|^2}{|x^2-y^2|^{1/2}} = e^{c_1} \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{|x^2-y^2|^{1/2}} = e^{c_1} \quad \text{ή}$$

$$\frac{x^2}{|x^2-y^2|^{1/2}} = c \quad (\varepsilon)\text{, θέτοντας όπου } c = e^{c_1}$$

Η λύση (ε) ισχύει με την παραδοχή ότι $1-\upsilon^2 \neq 0$ ή $\upsilon \neq 1$ ή $y \neq \pm x$. Η σχέση $\upsilon \neq \pm 1$ συνεπάγεται ότι $x^2-y^2 = (x-y)\,(x+y) \neq 0$, δηλαδή η πρώτη οικογένεια των λύσεων της (α) δίνεται από τη σχέση (β) με τις παραδοχές ότι $x^2-y^2 \neq 0$ και $x \neq 0$.

Για $1-\upsilon^2=0$ ή $y=\pm x$, συνεπάγεται και πάλι ότι η Δ.Ε (α) επαληθεύεται. Επίσης, η περίπτωση $x=0$ επαληθεύει τη Δ.Ε(α). Η τελευταία λύση έχει προφανώς παραληφθεί από τη γενική λύση που δίνεται από τη σχέση (β).

Παράδειγμα 1.4.4: Να λυθεί η ΔΕ

$$(y+\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dx - x\,dy = 0.$$

Λύση: Η Δ.Ε, που γράφεται $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, με την αντικατάσταση $y=\upsilon x$ $(y'=\upsilon'x+\upsilon)$ γίνεται

$$\upsilon'x+\upsilon=\frac{x\upsilon+\sqrt{x^2+x^2\upsilon^2}}{x} \quad ή \quad \upsilon+x\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{x\upsilon+x\sqrt{1+\upsilon^2}}{x}$$

ή

$$\upsilon+x\frac{d\upsilon}{dt}=\upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2} \quad ή \quad x\frac{d\upsilon}{dx}=\sqrt{1+\upsilon^2} \quad ή \quad \frac{d\upsilon}{\sqrt{1+\upsilon^2}}=\frac{dx}{x}$$

μετά από ολοκλήρωση, έχουμε

$$\int\frac{d\upsilon}{\sqrt{1+\upsilon^2}}=\ln x+\ln c \quad ή \quad \ln(\upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2}\,)=\ln cx \quad ή \quad \upsilon+\sqrt{1+\upsilon^2}=cx.$$

Θέτοντας $\upsilon=\dfrac{y}{x}$, έχουμε τη γενική λύση της δοσμένης Δ.Ε που είναι

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2.$$

Παράδειγμα 1.4.5: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y'=\frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}.$$

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}{2xy\,e^{(x/y)^2}}. \qquad (α)$$

Θέτουμε $\upsilon=\dfrac{x}{y}$ ή $x=\upsilon y\ \left(\dfrac{dx}{dy}=\upsilon+y\dfrac{d\upsilon}{dy}\right)$,

οπότε η Δ.Ε (α) γίνεται

$$\upsilon + y\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{y^2 + y^2 e^{\upsilon^2} + 2(\upsilon y)^2 e^{\upsilon^2}}{2(\upsilon y)\, y\, e^{\upsilon^2}} \quad ή$$

$$y\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{1+e^{\upsilon^2}}{2\upsilon e^{\upsilon^2}} \quad ή \quad \frac{dy}{y} = \frac{2\upsilon\, e^{\upsilon^2}}{1+e^{\upsilon^2}}\, d\upsilon \quad ή \quad (\text{δι' ολοκληρώσεως})$$

$$\ln|y| = \ln|1+e^{\upsilon^2}| + c_1 \quad ή \quad y = |1+e^{\upsilon^2}|\, e^{c_1} \quad ή \quad y = (1+e^{(x/y)^2})\, e^{c_1} \quad ή$$

$$y = c\,[1+e^{(x/y)^2}] \quad \text{όπου } c = e^{c_1}.$$

Παράδειγμα 1.4.6: Να λυθεί η Δ.Ε $(y^2-3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ και να βρεθεί η μερική λύση που πληροί τη σχέση $y(2) = 2$.

Λύση: Η ΔΕ, η οποία γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2}{2xy} \qquad (\alpha)$$

είναι ομογενής. Θέτουμε $y = \upsilon x$ $(y' = \upsilon' x + \upsilon)$, οπότε η Δ.Ε (α) γράφεται

$$\upsilon + x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3x^2 - x^2\upsilon^2}{2x^2\upsilon} \quad ή \quad \upsilon + x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3-\upsilon^2}{2\upsilon} \quad ή$$

$$x\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3-3\upsilon^2}{2\upsilon} \quad ή \quad \frac{2\upsilon\, d\upsilon}{\upsilon^2-1} = -3\,\frac{dx}{x}.$$

Μετά από ολοκλήρωση, έχουμε

$$\ln|\upsilon^2-1| = -3\ln|x| + \ln c \quad (c>0 \quad ή \quad \ln|\upsilon^2-1| = \ln\frac{c}{|x^3|} \quad ή \quad |\upsilon^2-1| = \frac{c}{|x^3|}$$

Θέτουμε, όπου $\upsilon = \dfrac{y}{x}$, και βρίσκουμε τη γενική λύση της δοσμένης ΔΕ. Η λύση αυτή είναι

$$\frac{|y^2-x^2|}{|x|^2} = \frac{c}{|x|^2} \quad ή \quad |x(y^2-x^2| = c.$$

Για την εύρεση της μερικής λύσης, θέτουμε στη γενική λύση τις τιμές των x και $y(x=2,\ y=2)$ και βρίσκονται την τιμή της c. Είναι δε $c = 0$. Επομένως, η μερική λύση είναι

$$x\,(y^2-x^2) = 0 \quad ή \quad y^2 = x^2 \quad ή \quad y = \pm x.$$

Τα επόμενα παραδείγματα είναι τυπικά παραδείγματα Δ.Ε που για τη λύση χρειαζόμαστε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς.

Παράδειγμα 1.4.7: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}\right) \qquad (\alpha)$$

όπου α, β, γ, α_1, β_1 και γ_1 είναι σταθεροί αριθμοί.

Λύση: Οι Δ.Ε αυτής της μορφής μετασχηματίζονται σε ομογενείς, χρησιμοποιώντας συνήθως δύο μετασχηματισμούς. Μπορεί να χαρακτηρισθούν ως ψευδο-ομογενείς. Σ' αυτές τις Δ.Ε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν είναι $\gamma = \gamma_1 = 0$ τότε η Δ.Ε (α) παίρνει τη μορφή

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha_1 x+\beta_1 y}\right),$$

η οποία είναι προφανώς ομογενής πρώτης τάξης.

2. Αν είναι $\gamma^2+\gamma_1{}^2 \neq 0$ και $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, τότε το σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (\beta)$$

έχει μια μοναδική λύση, έστω (x_0, y_0). Στην περίπτωση αυτή με το μετασχηματισμό

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0$$

η εξίσωση (α) γράφεται

$$\frac{d\Psi}{dX} = \frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{\alpha(X+x_0)+\beta(Y+y_0)+\gamma}{\alpha_1(X+x_0)+\beta(Y_1+y_0)+\gamma_1}\right),$$

που μας οδηγεί στην ομογενή Δ.Ε

$$\frac{d\Psi}{dX} = \varphi\left(\frac{\alpha X+\beta Y}{a_1 X+\beta_1 Y}\right) \qquad (\gamma),$$

καθόσον είναι $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$

$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0$

δεδομένου ότι (x_0, y_0) είναι λύση του συστήματος (β).

3. Αν είναι $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, τότε η Δ.Ε (α) έχει τη μορφή

$$y' = \varphi\,(Ax+By+\Gamma) \qquad (\delta)$$

που με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $u(x) = Ax+By+\Gamma$ η Δ.Ε (δ) παίρνει τη μορφή $u' = A+B\,\varphi(u)$. Η τελευταία Δ.Ε είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

4. Αν είναι $\gamma^2+\gamma_1^2 \neq 0$ και $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$, τότε υπάρχει αριθμός λ τέτοιος, ώστε $\alpha_1=\lambda\alpha$ και $\beta_1=\lambda\beta$, οπότε η Δ.Ε (α) παίρνει τη μορφή

$$y' = \varphi\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\lambda(\alpha x+\beta y)+\gamma_1}\right). \qquad (\delta)$$

Η Δ.Ε (ε) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $u(x)=\alpha x+\beta y$ παίρνει τη μορφή

$$u' = \alpha + \beta\,\varphi\left(\frac{u+\gamma}{\lambda u+\gamma_1}\right)$$

που είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.4.8: Να λυθεί η Δ.Ε $y'=\dfrac{2x+3y-4}{4x+y-3}$.

Λύση: Λύνουμε το σύστημα $2x+3y-4=0$, $4x+y-3=0$ και βρίσκουμε $x=1/2$, $y=1$. Θέτουμε

$$X = x-\frac{1}{2}, \quad \Psi = y-1 .$$

οπότε

$$2x+3y-4 = 2X+3\Psi \quad \text{και} \quad 4x+y-3 = 4X+\Psi .$$

Άρα

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dX}{d\Psi} = \frac{2X+3\Psi}{4X+\Psi} = \frac{2+3\dfrac{\Psi}{X}}{4+\dfrac{\Psi}{X}}.$$

Θέτουμε στη συνέχεια $u=\dfrac{\Psi}{X}$, $\Psi'=u'X+u$, οπότε

$$u'X+u = \frac{2+3u}{4+u} \quad \text{ή} \quad u'X = \frac{2-u-u^2}{4+u} \quad \text{ή} \quad \frac{4+u}{(u+2)(u-1)}\,du = -\frac{dX}{X} \quad \text{ή}$$

$$-\frac{2}{3}\frac{du}{u+2}+\frac{5}{3}\frac{du}{u-1} = -\frac{dX}{X} \quad \text{ή} \quad \ln X = A+\frac{2}{3}\ln(2+u)-\frac{5}{3}\ln(u-1) \quad \text{ή}$$

$$\ln\left(x-\frac{1}{2}\right) = A+\frac{2}{3}\ln\frac{(2x+y-2)}{x-\frac{1}{2}}-\frac{5}{3}\ln\frac{y-x-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}.$$

Παράδειγμα 1.4.9: Να λυθεί η Δ.Ε

$$(2x+3y+1)\,dx + (3x+4y+1)dy = 0.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+3y+1}{3x+4y+1}$ (α).

Επειδή όμως είναι $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{4}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$ που έχει ως λύση $(x, y) = (1, -1)$.

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $X = x-1$ και $\Psi = y+1$ στη Δ.Ε (α), οπότε θα έχουμε

$$\frac{d\Psi}{dX} = -\frac{2X+3\Psi}{3X+4\Psi}. \tag{β}$$

Η Δ.Ε (β) είναι ομογενής, οπότε θέτουμε $u = \dfrac{\Psi}{X}$ $(\Psi' = u + u'X)$ και συνεπώς η Δ.Ε (β) παίρνει τη μορφή $u + u'X = -\dfrac{2+3u}{3+4u}$ ή

$$X\frac{du}{dX} = -\frac{2+3u}{3+4u} - u \quad ή \quad X\frac{du}{dX} = -2\frac{1+3u+2u^2}{3+4u} \quad ή$$

$$2\frac{du}{u} = -\frac{(4u+3)\,du}{2u^2+3u+1}.$$

Από την τελευταία Δ.Ε, μετά από ολοκλήρωση, παίρνουμε τη σχέση

$$-2\ln X + \ln c = \ln(2u^2+3u+1) \quad ή \quad 2u^2+3u+1 = \frac{c}{X^2}.$$

Στη συνέχεια, θέτοντας όπου $u = \dfrac{\Psi}{X}$ παίρνουμε τη σχέση

$2\Psi^2 + 3X\Psi + X^2 = c$ και τελικά $x^2+2y^2+3xy + y = C$,

αφού είναι $X = x-1$ και $\Psi = y+1$.

Παράδειγμα 1.4.10: Να λυθεί η Δ.Ε $(2x-6y+3)\,dx - (x-3y+1)\,dy = 0$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-6y+3}{x-3y+1} \quad \text{και επειδή είναι} \quad \frac{2}{1} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{3}{1}$$

θέτουμε $x-3y=u$, οπότε

$$\frac{1}{3}(1-u')=\frac{2u+3}{u+1} \quad \text{ή} \quad u'=-\frac{5u+8}{u+1} \quad \text{ή} \quad \frac{u+1}{5u+8}\,du=-dx \quad \text{ή}$$

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\frac{1}{5u+8}\right)du=-dx \quad \text{ή (δι' ολοκληρώσεως)}$$

$$\frac{u}{5}-\frac{3}{25}\ln|5u+8|=-x+c \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{5}(x-3y)-\frac{3}{25}\ln|5x-15y+8|+x=c \quad \text{ή}$$

$$\frac{6}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{3}{25}\ln|5x-15y+8|=c \quad \text{ή}$$

$$10x-5y-\ln|5x-15y+8|=\frac{25c}{3} \quad \text{ή} \quad 5(2x-y)-\ln|5x-15y+8|=c_1$$

$$\left(c_1=\frac{25c}{3}\right)$$

1.5. Διαφορικές εξισώσεις τέλειων διαφορικών

Αν το πρώτο μέλος της Δ.Ε

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{1.5.1}$$

είναι τέλειο διαφορικό της συνάρτησης u, δηλαδή αν

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=du\,,$$

τότε η γενική λύση της (1.5.1) είναι η οικογένεια των καμπύλων

$$u(x,y)=c$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή. Επειδή δε

$$du=u_x dx+u_y dy \tag{1.5.2}$$

από τις (1.5.1) και (1.5.2) έπεται ότι

$$u_x=P, \qquad u_y=Q\,.$$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις αυτές ως προς y και x αντίστοιχα, έχουμε

$$u_{xy} = P_y, \qquad u_{yx} = Q_x$$

και συνεπώς

$$\boxed{P_y = Q_x}$$

που είναι η αναγκαία συνθήκη, για να είναι η Δ.Ε τέλειο διαφορικό. Το αντίστροφο ισχύει επίσης. Δηλαδή, αν $P_y = Q_x$, τότε η παράσταση $P\,dx + Q\,dy$ είναι τέλειο διαφορικό, οπότε υπάρχει συνάρτηση u τέτοια, ώστε $u_x = P$ και $u_y = Q$.

Συνεπώς «ικανή και αναγκαία συνθήκη, για να είναι τέλειο διαφορικό το πρώτο μέλος της (1.5.1), είναι $P_y = Q_x$. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ τέτοια, ώστε $u_x = P$ και $u_y = Q$».

Παράδειγμα 1.5.1: Να λυθεί η Δ.Ε. $(2xy+3x^2)\,dx + x^2 dy = 0$.

Λύση: Ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy+3x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Ζητούμε συνάρτηση u τέτοια ώστε:

$$u_x = 2xy + 3x^2 \qquad (\alpha)$$

$$u_y = x^2 \quad , \qquad (\beta)$$

οπότε, από την

$$(\alpha) \Rightarrow u = \int (2xy+3x^2)\,\partial x = x^2y + x^3 + \varphi(y)\,. \qquad (\gamma)$$

Από τις

$$(\alpha), (\beta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+x^3+\varphi(y)\right) \equiv x^2 + \varphi'(y) \equiv x^2 \quad ή$$

$$\varphi'(y) = 0 \quad ή \quad \varphi(y) = c \quad ή \quad u(x, y) = x^2y + x^3 + c\,,$$

που είναι η ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 1.5.2. Να λυθεί η Δ.Ε: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^y}{x e^y + 2y}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $e^y\,dx + (x e^y + 2y)\,dy = 0$.

Στην περίπτωσή μας είναι $P(x, y) = e^y$

$Q(x, y) = x e^y + 2y$

Ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial e^y}{\partial y} = e^y = \dfrac{\partial}{\partial x}(x e^y + 2y) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, δηλαδή $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

και συνεπώς η δοθείσα Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Ζητούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = e^y \qquad (\alpha)$$
$$U_y = x e^y + 2y \qquad (\beta)$$

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow$

$$U = \int e^y \,\partial x = x e^y + \varphi(y) \qquad (\gamma)$$

Από τις (γ) και (β) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}[x e^y + \varphi(y)] \equiv x e^y + \varphi'(y) \equiv x e^y + 2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = 2y \quad \text{ή} \quad \varphi(y) = y^2 + c_1 \quad \text{ή}$$

$$U(x, y) = xe^y + y^2 + c_1 = c_2 \Rightarrow x e^y + y^2 = c$$

είναι η ζητούμενη λύση.

Παράδειγμα 1.5.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$3x(xy-2)\,dx + (x^3+2y)\,dy = 0.$$

Λύση: Στη Δ.Ε είναι $P(x, y) = 3x(xy-2)$

$Q(x, y) = x^3 + 2y$.

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^3+2y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$ δηλαδή η δοθείσα Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Ζητούμε να βρούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = 3x(xy-2) \qquad (\alpha)$$
$$U_y = x^3 + 2y \qquad (\beta)$$

οπότε η λύση της Δ.Ε είναι η $U(x, y) = c$.

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow$

$$U(x, y) = \int 3x(xy-2)\,\partial x = x^3y - 3x^2 + \varphi(y). \qquad (\gamma)$$

Από τις σχέσεις (γ), (β) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[x^3y-3x^2+\varphi(y)] \equiv x^3+\varphi'(y) \equiv x^3+2y \Rightarrow$$

$$\varphi'(y)=2y \quad \text{ή} \quad \varphi(y)=y^2+c_1,$$

οπότε

$$U(x,y) = x^3y-3x^2+y^2+c_1=c_2 \quad \text{ή} \quad x^3y-3x^2+y^2=c \quad (c=c_2-c_1)$$

είναι η ζητούμενη λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.5.4. Να λυθεί η Δ.Ε

$$\left[x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right]dx+\left[1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right]dy=0\,.$$

Λύση: Στη δοσμένη Δ.Ε έχουμε

$$P(x,y)=x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \qquad Q(x,y)=1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,.$$

Ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{y}{(y^2-x^2)^{3/2}}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, οπότε η Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Αναζητούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x=x+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} \qquad (\alpha)$$

$$U_y=1-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,. \qquad (\beta)$$

Από τη σχέση (α) $\Rightarrow U(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\sin^{-1}\dfrac{x}{y}+\varphi(y) \qquad (\gamma)$,

οπότε από τις (γ) και (β) $\Rightarrow -\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\varphi'(y)=1-\dfrac{x}{y\,(y^2-x^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$$\varphi'(y)=1 \quad \text{ή} \quad \varphi(y)=y+c.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+\sin^{-1}\frac{y}{x}+y=c.$$

Παράδειγμα 1.5.5: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών

$$y'=-\frac{(2x\cos y+3x^2y)}{x^3-x^2\sin y-y}, \qquad y(0)=2\,.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$(2x\cos y + 3x^2y)\,dx + (x^3 - x^2\sin y - y)\,dy = 0.$$

Θέτοντας $P(x, \varphi) = 2x\cos y + 3x^2y$

$Q(x, y) = x^3 - x^2\sin y - y$

Έχουμε $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x\cos y + 3x^2y) = -2x\sin y + 3x^2 =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - x^2\sin y - y) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

δηλαδή η Δ.Ε είναι τέλειο διαφορικό.

Αναζητούμε συνάρτηση $U(x, y)$ τέτοια ώστε

$$U_x = 2x\cos y + 3x^2y \quad (\alpha)$$

$$U_y = x^3 - x^2\sin y - y. \quad (\beta)$$

Εκ της $(\alpha) \Rightarrow U(x, y) = \int (2x\cos y + 3x^2y)\,\partial x = x^2\cos y + x^3y + \varphi(y) \quad (\gamma),$

ενώ εκ των (γ), $(\beta) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}[x^2\cos y + x^3y + \varphi(y)] \equiv$

$$-x^2\sin y + x^3 + \varphi'(y) \equiv x^3 - x^2\sin y - y \quad \text{ή}$$

$$\varphi'(y) = -y \quad \text{ή} \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c$$

Άρα η γενική λύση της δοσμένης Δ.Ε είναι

$$x^2\cos y + x^3y - \frac{y^2}{2} = c.$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $0 - 0 - \dfrac{4}{2} = c \Rightarrow c = -2.$

Επομένως, η ζητούμενη λύση είναι $x^2\cos y + x^3y - \dfrac{y^2}{2} = -2.$

1.6. Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η συνθήκη $P_x = Q_y$ για τη Δ.Ε $P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy = 0$. Τότε, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, μήπως υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση $R(x, y)$ τέτοια, ώστε η Δ.Ε

$$R(x, y) P(x, y) dx + R(x,y) Q(x, y) dy = 0 \qquad (1.6.1)$$

να είναι τέλειο διαφορικό; Αποδεικνύεται ότι σε μερικές περιπτώσεις υπάρχει πράγματι μια τέτοια συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή, τότε, καλείται **ολοκληρωτικός παράγοντας** της Δ.Ε.

Έστω, λοιπόν, ότι η Δ.Ε (1.6.1) είναι διαφορική εξίσωση τέλειου διαφορικού. Τότε,

$$\frac{\partial}{\partial y}(RP) = \frac{\partial}{\partial x}(P \cdot Q) \quad \text{ή} \quad P_y R + P R_y = Q_x R + Q R_x$$

ή

$$\boxed{P R_y - Q R_x = R(Q_x - P_y).} \qquad (1.6.2)$$

Άρα, η συνάρτηση που ζητάμε πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη (1.6.2) που είναι μια Δ.Ε με μερικές παραγώγους. Η γενική λύση της (1.6.2) συνήθως, βρίσκεται δύσκολα. Ωστόσο, εδώ δε ζητούμε τη γενική λύση της, αλλά μια οποιαδήποτε μερική λύση που μερικές φορές, όπως στις παρακάτω περιπτώσεις, βρίσκεται εύκολα.

Α. Ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $R = R(x)$ ή $R = R(y)$

Στην περίπτωση που ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y, θα είναι $R_y=0$ ή $R_x=0$, αντίστοιχα, οπότε, από την (1.6.2), θα έχουμε

$$\boxed{-\frac{R_x}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q} = \varphi(x)}, \qquad \text{συνάρτηση μόνο του } x$$

ή

$$\boxed{\frac{R_y}{R} = \frac{Q_x - P_y}{P} = \sigma(y)}, \qquad \text{συνάρτηση μόνο του } y$$

Συνεπώς, ο ζητούμενος ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι

$$R(x) = \exp\left(-\int \varphi(x)\,dx\right) \quad \text{ή} \quad R(y) = \exp\left(\int \sigma(y)\,dy\right),$$

αντίστοιχα.

Β. Ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής, $R = R(x+y)$ ή $R = R(x-y)$

Αν $R = R(x+y) = R(z)$, οπότε $R_z = R_x = R_y$, από την (1.6.2) έχουμε ότι

$$\boxed{-\frac{R_x}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q - P} = \varphi(z)} \quad \text{ή} \quad R(z) = \exp\left(-\int \varphi(z)\,dz\right).$$

Αν $R = R(x-y) = R(z)$, οπότε $R_z = R_x = -R_y$, από τη (1.6.2), έχουμε ότι

$$\boxed{-\frac{R_y}{R} = \frac{Q_x - P_y}{Q+P} = \sigma(z)} \quad ή \quad R(z) = \exp\left(-\int \sigma(z)\,dz\right)$$

Εκτός από τις περιπτώσεις ολοκληρωτικού παράγοντα συνάρτηση μόνο του x ή μόνο του y ή μόνο του $x+y$ ή $x-y$, μπορούν να εξετασθούν ολοκληρωτικοί παράγοντες του γινομένου xy ή και άλλων παραστάσεων. Επίσης, πολλές φορές, όταν κανείς είναι εξοικειωμένος με τα ολικά διαφορικά, βρίσκει ολοκληρωτικούς παράγοντες με απλή παρατήρηση. Π.χ , φαίνεται αμέσως ότι

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}\,d(x^2+y^2)$$

$$y\,dx + x\,dy = d(xy)$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = -\,d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{κ.λπ.}$$

Με κατάλληλη αναδιάταξη των όρων και κατάλληλες πράξεις η Δ.Ε γίνεται ολικό διαφορικό συνάρτησης, οπότε ευρίσκεται αμέσως η γενική λύση, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.6.1. Να λυθεί η Δ.Ε $y\,dx+(3+3x-y)\,dy = 0$.

Λύση: Έχουμε $P(x, y)=y$, $Q(x, y)=3+3x-y$, οπότε $P_y=1 \neq Q_x=3$. Συνεπώς, δεν είναι Δ.Ε τέλειου διαφορικού. Παρατηρούμε ότι $\dfrac{Q_x-P_y}{Q} = \dfrac{3-1}{3+3x-y}$ δεν είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ $\dfrac{Q_x-P_y}{P} = \dfrac{3-1}{y} = \dfrac{2}{y}$ είναι συνάρτηση μόνο του y και ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι ο $R(y) = \exp\left(\int \frac{2}{y}\,dy\right) = y^2$. Πολλαπλασιάζοντας τη Δ.Ε με y^2, βρίσκουμε

$$y^3dx + (3y^2+3xy^2-y^3)\,dy = d(xy^3)+dy^3-\frac{1}{4}\,dy^4 = 0\,,$$

οπότε

$$xy^3+y^3-\frac{1}{4}y^4=c,$$

είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.6.2: Να λυθεί η Δ.Ε. $(y^3-x^2y)\,dx+(x^3-xy^2)\,dy=0$.

Λύση

$$\frac{Q_x-P_y}{Q-P}=\frac{3x^2-y^2-3y^2+x^2}{x^3-xy^2-y^3+x^2y}=\frac{4}{x+y}.$$

Άρα

$$R(x+y)=R(z)=\exp\left(-\int\frac{4}{z}\,dz\right)=(x+y)^{-4}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη Δ.Ε με $(x+y)^{-4}$, έχουμε

$$\frac{(x^3-x^2y)\,dx+(x^3-xy^2)\,dy}{(x+y)^4}=d\,\frac{xy}{(x+y)^2}=0 \quad ή \quad \frac{xy}{(x+y)^2}=c,$$

που είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Παράδειγμα 1.6.3: Να λυθούν οι Δ.Ε:

α) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+y}{x}$ b) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2+4xy}{2x^2+3y^2}$ d) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x^2y+8xy^2}{x^3+8xy+12y^2}$.

Λύση: Προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε τις Δ.Ε σε ολικά διαφορικά.

a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+y}{x}\Rightarrow (y^2+y)\,dx-x\,dy=0\Rightarrow y\,dx-x\,dy+y^2dx=0\Rightarrow$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+dx=0\Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right)+dx=0\Rightarrow \frac{x}{y}+x=c.$$

b) $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}\Rightarrow 2xy\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0\Rightarrow$$

$$2xy\,dx+x^2dy+y^2dy=0\Rightarrow d(x^2y)+y^2dy=0\Rightarrow x^2y+\frac{1}{3}y^3=c.$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2+4xy}{2x^2+3y^2} \Rightarrow (3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+3y^2)\,dy = 0 \Rightarrow$

$3x^2dx+(4xy\,dx+2x^2dy)+3y^2dy = 0 \Rightarrow$

$d\,(x^3)+d\,(2x^2y)+3y^2dy = 0 \Rightarrow\ x^3+2x^2y+y^3 = c.$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y+8xy^2}{x^3+8x^2y+13y^2} \Rightarrow (3x^2y+8xy^2)\,dx+(x^3+8x^2y+12y^2)\,dy=0 \Rightarrow$

$(3x^2y\,dx+x^3\,dy)+(8xy^2dx+8xy^2dy)+12y^2dy = 0 \Rightarrow$

$d\,(x^3y)+d\,(4x^2y^2)+d\,(4y^3) = 0 \Rightarrow\ x^2y+4x^2y^2+4y^3 = c\ .$

1.7. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Η τυπική μορφή των γραμμικών Δ.Ε 1ης τάξης είναι η

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = f\,(x)} \qquad (1.7.1)$$

πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1.7.1) με τον παράγοντα $e^{\int p\,(x)\,dx}$, οπότε

$$y'e^{\int p\,(x)\,dx} + p\,(x)\,ye^{\int p\,(x)\,dx} = f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}$$

ή

$$\left[y\,e^{\int p\,(x)\,dx}\right]' = f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx} \qquad (1.7.2)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.7.2) έχουμε

$$ye^{\int p\,(x)\,dx} = \int f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}\,dx + c$$

ή

$$\boxed{y = e^{-\int p\,(x)\,dx}\left[c + \int f\,(x)\,e^{\int p\,(x)\,dx}dx\right]} \qquad (1.7.3)$$

που είναι η γενική λύση της (1.7.1).

Παράδειγμα 1.7.1: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'+5y = 50$.

Λύση: Εφαρμόζοντας τον τύπο (1.7.3) με $p\,(x)=5$ και $f\,(x)=50$, έχουμε

$$y = e^{-5dx}\left[c + \int 50e^{\int 5dx}dx\right] = e^{-5x}\left[c + \int 50e^{5x}\,dx\right] =$$

$$= ce^{-5x} + 10e^{-5x}\int e^{5x}d\,(5x) = ce^{-5x} + 10\,.$$

Παράδειγμα 1.7.2: Να λυθεί η Δ.Ε $xy' + 2y = x^2$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται, $y' + \frac{2}{x} y = x$, οπότε για $p(x) = \frac{2}{x}$ και $f(x) = x$, ο τύπος (1.7.3) δίνει:

$$y = e^{-\int (2/x)\,dx}\left[c + \int x e^{\int (2/x)\,dx}\,dx\right] = e^{-2\ln x}\left[c + \int x e^{2\ln x}\,dx\right] =$$

$$= \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int x^3 dx = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{c}{x^2} + \frac{x^2}{4}.$$

Παράδειγμα 1.7.3: Να λυθεί η Δ.Ε

$$y'\cos x + y\sin x + \cos^2 x = 0.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos x} y = -\cos x \quad (\text{αν } \cos x \neq 0),$$

οπότε

$$p(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{και} \quad f(x) = -\cos x.$$

Δια εφαρμογής του τύπου (1.7.3) έχουμε

$$y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[c + \int (-\cos x)\, e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} dx\right] =$$

$$= e^{\ln(\cos x)}\left[c - \int \cos x\, e^{-\ln(\cos x)} dx\right]$$

$$= \cos x\left[c - \int \cos x \frac{1}{\cos x}\,dx\right] = \cos x\left[c - \int dx\right] = (c-x)\cos x.$$

Παράδειγμα 1.7.4: Να λυθεί το πρόβλημα των αρχικών τιμών

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} - 4xy = x, \quad y(2) = 3.$$

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\frac{dy}{dx} - \frac{4x}{x^2+1} y = \frac{x}{x+1}$, οπότε για

$$p(x) = -\frac{4x}{x^2+1} \quad \text{και} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \text{ ο τύπος 1.7.3 δίνει}$$

$$y = e^{\int (4x/x^2+1)}\left[c - \int \frac{x}{x^2+1}\cdot e^{-\int\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)dx} dx\right] \text{ ή}$$

$$y = e^{2\ln(x^2+1)}\left[c - \int \frac{x}{x^2+1} e^{-2\ln(x^2+1)}dx\right] \text{ ή}$$

$$y = e^{\ln(x^2+1)^2}\left[c - \int \frac{x}{x^2+1} e^{-\ln(x^2+1)^2}dx\right] \text{ ή}$$

$$y = (x^2+1)^2\left[c - \int \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} dx\right] \text{ ή}$$

$$y = (x^2+1)^2\left[c - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}\right] \text{ ή } y = (x^2+1)^2\left[c + \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] \text{ ή}$$

$$y = c(x^2+1)^2+1.$$

Για τον προσδιορισμό της λύσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(2) = 3$, λύνουμε ως προς c την ισότητα $3 = c(1+2^2)^2+1$ ή $3=25c+1$ ή $c=2/25$.

Άρα η ζητούμενη λύση είναι η $y = \frac{2}{25}(1+x^2)^2+1$.

Παράδειγμα 1.7.5. Να λυθεί η ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}.$$

Λύση: Δι' εφαρμογής του τύπου 1.7.3, με $P(x) = \frac{2x+1}{x}$ και $f(x) = e^{-2x}$, έχουμε

$$y = e^{-\int \frac{2x+1}{x}dx}\left[c + \int e^{-2x} e^{\int \frac{2x+1}{x}dx}\right] \text{ ή}$$

$$y = e^{-(2x+\ln|x|)}\left[c + \int e^{-2x} e^{(2x+\ln|x|}dx\right] \text{ ή}$$

$$y = e^{-\ln(xe^{2x})}\left[c + \int e^{-2x} \cdot e^{\ln(xe^{2x})}dx\right] \text{ ή}$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left[c + \int e^{-2x} xe^{2x} dx\right] \text{ ή}$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left[c + \int xdx\right] \text{ ή}$$

$$y = \frac{1}{xe^{2x}}\left(c + \frac{x^2}{2}\right).$$

Παράδειγμα 1.7.6. Να λυθεί η ΔΕ

$$y' + P(x)y = f(x)y^{\nu} \quad (\alpha),$$

με $\nu \neq 0,1$ (Δ.Ε Bernoulli).

Λύση. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (α), με $y^{-\nu}$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^{-\nu}\frac{dy}{dx} + P(x)(y^{1-\nu} = f(x) \quad (\beta)$$

Θέτουμε $y^{1-\nu} = \omega$ (γ) όπου $\omega = \omega(x)$. Εκ της (γ) $\Rightarrow$

$$(1-\nu)y^{-\nu}y' = \omega' \text{ ή } y^{-\nu}y' = \frac{\omega'}{1-\nu}$$

Εκ των (β) και (δ) $\Rightarrow$ $\dfrac{\omega'}{1-\nu} + P(x)\omega = f(x)$ ή

$$\frac{d\omega}{dx} + (1-n)P(x)\omega = (1-\nu)f(x). \quad (\varepsilon)$$

Η (ε) είναι γραμμική (με εξηρτημένη την ω) και συνεπώς μπορεί να λυθεί. Στη γενική λύση της (ε) θέτοντας την τιμή της ω εκ της (γ), λαμβάνουμε την γενική λύση της (α). Για $\nu = 0$, η δοσμένη ΔΕ είναι γραμμική, ενώ για $\nu = 1$ η ΔΕ είναι χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.7.7: Να λυθεί η Δ.Ε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{xy+x^2y^3}$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $\dfrac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$ (1). Πολλαπλασιάζουμε με x^{-2}, οπότε θα έχουμε

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} - yx^{-1} = y^3 \quad (2).$$

Θέτοντας $x^{-1} = \omega$ ($\omega_y = -x^{-2}x_y'$), η Δ.Ε (2) γράφεται

$$-\frac{d\omega}{dy} - y\omega = y^3 \quad \text{ή} \quad \frac{d\omega}{dy} + y\omega = -y^3. \quad (3)$$

Η Δ.Ε (3) είναι γραμμική, οπότε η γενική λύση της είναι

$$\omega e^{y^2/2} = e^{y^2/2}(2-y^2) - c_1 \text{ ή } \omega = (2-y^2) - c_1 e^{-y^2/2} \text{ ή}$$

$$\frac{1}{x} = (2-y^2) - c_1 e^{-y^2/2}.$$

Παράδειγμα 1.7.8: Να λυθεί η Δ.Ε $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4 y^{1/3}$ (1)

Λύση: Η Δ.Ε (1) είναι τύπου Bernoulli, με $v = \frac{1}{3}$, οπότε πολλαπλασιάζοντας με $y^{-1/3}$ και τα δύο μέλη της, θα έχουμε

$$y^{-1/3}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y^{2/3} = x^4. \qquad (2)$$

Θέτοντας $\omega = y^{2/3}$ και $\frac{d\omega}{dx} = \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}$, η Δ.Ε (2) γίνεται

$$\frac{d\omega}{dx} - \left(\frac{2}{x}\right)\omega = \frac{2}{3}x^4. \qquad (3)$$

Η ΔΕ (3) είναι γραμμική, οπότε δ' εφαρμογής του τύπου (1.7.3) βρίσκουμε $\frac{\omega}{x^2} = \frac{2}{9}x^3 + c$. Επανερχόμενοι και πάλι στο μετασχηματισμό $\omega = y^{2/3}$, θα έχουμε $y^{2/3} = cx^2 + \frac{2}{9}x^5$ ή $y = \left(cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{3/2}$.

Παράδειγμα 1.7.9: Να λυθεί η Δ.Ε

$$6y^2\,dx - x(2x^3 + y)\,dy = 0. \qquad (1)$$

Λύση: Η ΔΕ (1) γράφεται

$$\frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{6y}\right)x = \left(\frac{1}{3y^2}\right)x^4. \qquad (2)$$

Η Δ.Ε (2) είναι τύπου Bernoulli με $v = 4$. Πολλαπλασιάζοντες και τα δύο μέλη της με x^{-4}, παίρνουμε

$$x^{-4}\frac{dx}{dy} - \left(\frac{1}{6y}\right)x^{-3} = \frac{1}{3y^2}. \qquad (3)$$

Η Δ.Ε (3), θέτοντας $\omega = x^{-3}$ (οπότε $\omega_y' = x^{-4}x_y'$), γίνεται

$$\frac{d\omega}{dy} + \frac{1}{2y}\omega = -\frac{1}{y^2}.$$

Η τελευταία Δ.Ε είναι γραμμική 1ης τάξης, οπότε η γενική λύση της

$$y^{1/2}\omega = 2y^{-(1/2)} + c'$$

ή, επειδή $\omega = x^{-3}$,

$y = 2x^3 + c'y^{1/2}x^3$ ή $(y-2x^3)^2 = (c')^2\,y\,x^6$ ή $(y-2x^3)^2 = cx^6y$ $(c = (c')^2)$.

Παράδειγμα 1.7.10: Να λυθεί η Δ.Ε $y' - \frac{1}{3x}y = \frac{1}{3}xy^{-1}$.

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε που γράφεται $y' - \frac{1}{3x}y = \frac{1}{3}xy^{-1}$ είναι τύπου Bernoulli. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη αυτής με y, έχουμε

$$yy' - \frac{1}{3x}y^2 = \frac{1}{3}x \qquad (1).$$

Θέτουμε $\qquad y^2 = \omega \quad (2),$

όπου $\omega = \omega(x)$. Παραγωγίζουμε την (2) ως προς x, οπότε έχουμε

$$2yy' = \omega' \quad ή \quad yy' = \frac{\omega'}{2} \qquad (3)$$

Εκ των (2), (3) $\Rightarrow$

$$\frac{\omega'}{2} - \frac{1}{3x}\omega = \frac{1}{3}x \quad ή \quad \frac{d\omega}{dx} - \frac{2}{3x}\omega = \frac{2x}{3} \qquad (4)$$

Η Δ.Ε (4) είναι γραμμική, οπότε θα έχουμε

$$\omega = e^{\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}}\left[c + \int \frac{2x}{3}e^{-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}}dx\right] = e^{2/3\ln x}\left[c + \int\frac{2x}{3}e^{-\frac{2}{3}\ln x}.dx\right] =$$

$$= e^{\ln x^{2/3}}\left[c + \frac{2}{3}\int x\, e^{-\ln x^{2/3}}dx\right] = x^{2/3}\left[c + \frac{2}{3}\int x\cdot\frac{1}{x^{2/3}}dx\right] =$$

$$= x^{2/3}\left[c + \frac{2}{3}\int x^{1/3}dx\right] = x^{2/3}\left[c + \frac{1}{2}x^{4/3}\right].$$

Τελικά, θέτοντας την τιμή του ω εκ της (2), έχουμε τη γενική λύση της δοθείσης Δ.Ε

$$y^2 = x^{2/3}\left[c + \frac{1}{2}x^{4/3}\right].$$

1.8. Διαφορικές εξισώσεις του Riccati

Μια Δ.Ε της μορφής

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x) = 0} \qquad (1.8.1)$$

λέγεται **Δ.Ε του Riccati.** Η Δ.Ε του Riccati έχει διάφορες εφαρμογές σε μια προχωρημένη θεώρηση των διαφορικών εξισώσεων.

Για να βρούμε τη γενική λύση της, πρέπει να γνωρίζουμε μια μερική λύση της, έστω $y_1 = y_1(x)$. Οπότε, θέτοντας

$$\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}} \qquad \boxed{y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u'}$$

η Δ.Ε (1.8.1) μετασχηματίζεται πάντοτε σε γραμμική Δ.Ε 1ης τάξης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.8.1: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε:

$$y' + \frac{1-x}{2x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2} = 0,$$

που έχει μια μερική λύση την $y_1 = x$.

Λύση: Θέτουμε $y = x + \dfrac{1}{u}$, $\quad y' = 1 - \dfrac{u'}{u^2}$, οπότε

$$1 - \frac{u'}{u^2} + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + \frac{2}{u}x + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{x}\frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2}\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0 \Rightarrow$$

$$-2x^2u' + 2xu - 2x^2u + 1 - x - 2xu = 0 \Rightarrow 2x^2(u'+u) + x - 1 = 0$$

ή

$$u' + u = \frac{1-x}{2x^2}.$$

Η τελευταία αυτή γραμμική Δ.Ε λύνεται εύκολα, οπότε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{2x}{cxe^{-x} - 1} = x\,\frac{cx + e^x}{cx - e^x}.$$

Παράδειγμα 1.8.2: Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2$$

που έχει μία μερική λύση την $y_1 = -\dfrac{1}{2}e^x$.

Λύση: Η Δ.Ε γράφεται $y' - y^2 - \left(1 + \frac{5}{2} e^x\right) y - e^{2x} = 0$ (1)

Η Δ.Ε (1) είναι Riccati και προς εύρεση της γενικής λύσης της θέτουμε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (2), \text{ οπότε } y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} \quad (3).$$

Εκ των (1), (2) (3) $\Rightarrow$ $u' + \left(\frac{3}{2} e^x + 1\right) u = -1$ (4)

Η Δ.Ε (4) είναι γραμμική, οπότε ακολουθώντας τη γνωστή μέθοδο εύρεσης της λύσης της, βρίσκουμε $u = \dfrac{2/3 + c\, e^{-3e^x/2}}{e^x}$. Θέτοντας την τιμή της u στην (2), έχουμε τη γενική λύση της Δ.Ε (1), δηλαδή

$$y = -\frac{1}{2} e^x + \frac{e^x}{2/3 + c\, e^{-3e^x/2}}.$$

Παράδειγμα 1.8.3: Να λυθεί η Δ.Ε $2x^2 y' - (x-1)(y^2 - x^2) = 2xy$ της οποίας μία μερική λύση είναι η $y_1 = x$.

Λύση: Η δοθείσα Δ.Ε γράφεται

$$y' - \frac{x-1}{2x^2} y^2 - \frac{1}{x} y + \frac{x-1}{2} = 0 \quad (1)$$

Η Δ.Ε (1) είναι Riccati και προς εύρεση της γενικής λύσης αυτής, θέτουμε

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad (2), \text{ οπότε } y' = y_1 - \frac{u'}{u^2} \quad (3).$$

Εκ των (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $u' - u = \dfrac{x-1}{2x^2} u^2$ (4)

λαμβάνοντας υπόψη ότι η y_1 είναι λύση της (1) και συνεπώς αυτή θα επαληθεύεται δηλαδή $y_1' - \dfrac{x-1}{2x^2} y_1^2 - \dfrac{1}{x} y_1 + \dfrac{x-1}{2} = 0$

Η Δ.Ε (4) είναι Bernoulli και ακολουθώντας τη γνωστή μέθοδο εύρεσης της λύσης αυτής, βρίσκουμε $u = \dfrac{2x}{2xce^{-x} - 1}$. Θέτουμε την τιμή του u στην $y = y_1 + u$, έχουμε τη γενική λύση της Δ.Ε (1), δηλαδή