3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής
$f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυώνυμα μιας μεταβλητής του x με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς.

Αν η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ είναι μη γνήσια (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή $p(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή $q(x)$, τότε εκτελώντας τη διαίρεση του $p(x)$ με το $q(x)$ βρίσκουμε ένα πηλίκο $\pi(x)$ και ένα υπόλοιπο $\upsilon(x)$ και συνεπώς έχουμε :

$$p(x) = q(x)\,\pi(x) + \upsilon(x) \quad \text{ή}$$
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)} \quad ,$$

όπου $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$ είναι γνήσια. ρητή συνάρτηση (δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $q(x)$) . Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η ολοκλήρωση μιας μη γνήσιας ρητής συνάρτησης ανάγεται σε ολοκλήρωση ενός πολυωνύμου $\pi(x)$ και μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$. Επειδή η ολοκλήρωση ενός πολυωνύμου $\pi(x)$ είναι πολύ απλή θα επιστήσουμε την προσοχή μας στην ολοκλήρωση μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$.

Από τη Άλγεβρα είναι γνωστό ότι κάθε πολυώνυμο $q(x)$ βαθμού n με συντελεστές $a_n \in \mathbb{R}$ μπορεί να αναλυθεί σε πεπερασμένο γινόμενο γραμμικών και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Ένας γραμμικός παράγων είναι της μορφής $(x-a)$ ή $(x-a)^k$, ενώ ένας δευτεροβάθμιος παράγων είναι της μορφής (ax^2+bx+c) ή $(ax^2+bx+c)^\mu$, με $b^2-4ac<0$ και $k, \mu = 1,2,3,\dots$

Για την ανάλυση του πολυωνύμου $q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων βρίσκουμε τις ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης $q(x)=0$.

Οι ρίζες ρ_i , $i=1,2,...,n$ της εξίσωσης μπορεί να είναι

(1) πραγματικές απλές

(2) πραγματικές πολλαπλότητας k_i , $i=1,2,...,n$

(3) μιγαδικές απλές

(4) μιγαδικές πολλαπλότητας μ_i , $i=1,2,...,n$

(5) συνδυασμός των περιπτώσεων (1), (2), (3), (4).

Επομένως στην ανάλυση του πολυωνύμου $q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων

$(1')$ Κάποιοι γραμμικοί όροι εμφανίζονται μία φορά και είναι της μορφής $x-\rho_i$

$(2')$ Κάποιοι γραμμικοί όροι εμφανίζονται περισσότερες από μία φορά και είναι της μορφής $(x-\rho_i)^{k_i}$

$(3')$ Κάποιοι δευτεροβάθμιοι όροι εμφανίζονται μία φορά και είναι της μορφής (ax^2+bx+c)

$(4')$ Κάποιοι δευτεροβάθμιοι όροι εμφανίζονται περισσότερες από μία φορά και είναι της μορφής $(ax^2+bx+c)^{\mu_i}$.

Η γενικότερη περίπτωση είναι το πολυώνυμο $q(x)$ να έχει ρίζες πραγματικές απλές, πραγματικές πολλαπλότητας k , μιγαδικές απλές και μιγαδικές πολλαπλότητας μ . Τότε, το $q(x)$ λαμβάνει για παράδειγμα τη μορφή

$$q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)^k\ (a_1x^2+b_1x+c_1)\ (a_2x^2+b_2x+c_2)^{\mu},$$

όπου $b_1^2-4a_1c_1<0$, $b_2^2-4a_2c_2<0$ και $1+\kappa+1+2\mu = n$.

Έτσι η ρητή συνάρτηση $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$ γράφεται

$$\frac{\upsilon(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-\rho_1} + \frac{B_1}{x-\rho_2} + \frac{B_2}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{B_\kappa}{(x-\rho_2)^\kappa} + \frac{Cx+D}{a_1x^2+b_1x+c_1} +$$

$$\frac{E_1x+Z_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{E_2x+Z_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \ldots + \frac{E_\varpi x+Z_\mu}{(a_\mu x^2+b_\mu x+c_\mu)^\mu}.$$

Από την τελευταία σχέση , αφού πρώτα μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα, αθροίζουμε τους αριθμητές των ομωνύμων κλασμάτων του $2^{ου}$ μέλους και εξισώνουμε το αλγεβρικό αυτό άθροισμα με το $\upsilon(x)$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους τους συντελεστές $A, B_1, B_2, ..., B_\kappa, C, D, E_1, Z_1, ..., E_\mu, Z_\mu$.

Περιληπτικά λοιπόν, για την επίλυση ενός ολοκληρώματος της μορφής

$$\mathrm{I} = \int \frac{p(x)}{q(x)}\ dx$$

εργαζόμαστε ως εξής :

(a) Εξετάζουμε αν η ρητή συνάρτηση $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ είναι γνήσια , δηλαδή αν βαθμ. $p(x) \prec$ βαθμ. $q(x)$. Αν όχι , τότε κάνουμε τη διαίρεση και έχουμε

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)}\ .$$

(b) Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$q(x)=0.$$

(c) Τρέπουμε το $q(x)$ σε γινόμενο γραμμικών και δευτεροβάθμιων παραγόντων.

(d) Γράφουμε τη ρητή συνάρτηση $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$ ως άθροισμα κλασμάτων της μορφής

$$\frac{A}{x-\rho_1} + \frac{B_1}{x-\rho_2} + \frac{B_2}{(x-\rho_2)^2} + \ldots + \frac{B_\kappa}{(x-\rho_2)^\kappa} + \frac{Cx+D}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{E_1x+Z_1}{a_2x^2+b_2x+c_2} +$$

$$\frac{E_2x+Z_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \ldots + \frac{E_\varpi x+Z_\mu}{(a_\mu x^2+b_\mu x+c_\mu)^\mu}.$$

(e) Υπολογίζουμε τους συντελεστές $A, B_1, B_2, ..., B_\kappa, C, D, E_1, Z_1, ..., E_\mu, Z_\mu$.

(f) Ολοκληρώνουμε την ρητή συνάρτηση $\pi(x) + \dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$ αντικαθιστώντας την $\dfrac{\upsilon(x)}{q(x)}$ με το άθροισμα κλασμάτων που έχουμε υπολογίσει από τις (d) και (e).

Σημείωση. Αν η ρητή συνάρτηση $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ είναι γνήσια, τότε παραλείπουμε το βήμα (α).

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2} dx,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2 + 4x + 9)}, \qquad I_4 = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)^2},$$

$$I_5 = \int \frac{x^4 + x^3 - 3x + 5}{(x+1)(x^2 + x + 1)} dx, \quad I_6 = \int \frac{3x^4 + 4}{12x^2\,(x^2 - x + 1)} dx$$

Λύση

$$I_1 = \int \frac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx .$$

(α) Επειδή η ρητή συνάρτηση $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ είναι μη γνήσια , διαιρούμε το $x^4 - 1$ με το $x^3 - 3x^2 + 2x$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 1 & x^3 - 3x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 + 3x^3 - 2} & x + 3 \text{ πηλίκο} \\
\qquad 3x^3 - 2x^2 \qquad -1 & \\
\quad \underline{-3x^3 + 9x^2 - 6x \quad} & \\
\qquad\quad 7x^2 - 6x - 1 \text{ υπόλοιπο} &
\end{array}$$

Συνεπώς ,

$$\frac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x + 3 + \frac{7x^2 - 6x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} .$$

(b) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \ x(x^2 - 3x + 2) = 0$.

Το πολυώνυμο $x^3 - 3x^2 + 2x$ έχει τρεις απλές ρίζες $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 = 2$.

(c) $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$.

(d) $$\frac{7x^2 - 6x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} .$$

(e) $A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) = 7x^2 - 6x - 1$.

Ο υπολογισμός των σταθερών A, B, C γίνεται με δύο τρόπους.

1ος τρόπος

Στην τελευταία εξίσωση θέτουμε $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$, οπότε

για $x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$,

για $x = 1 \quad \Rightarrow -B = 7 - 6 - 1 = 0$,

για $x = 2 \quad \Rightarrow 2C = 28 - 12 - 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{15}{2}$.

2^{ος} τρόπος

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (e) προκύπτει ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού με συντελεστές τις A, B, C. Εξισώνοντας τους ομοβάθμιους συντελεστές του 1^{ου} και 2^{ου} μέλους της εξίσωσης (e) προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους A, B, C. Από τη λύση του συστήματος αυτού βρίσκουμε τους A, B, C.

$A(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 - x) = 7x^2 - 6x - 1$,

$(A + B + C)x^2 + (-3A - 2B - C)\,x + 2A = 7x^2 - 6x - 1$,

$$\left.\begin{aligned} A + B + C &= 7 \\ -3A - 2B - C &= -6 \\ 2A &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ B + C &= \frac{15}{2} \\ -2B - C &= -6 - \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ B + C &= \frac{15}{2} \\ -B &= \frac{15}{2} - 6 - \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ B &= 0 \\ C &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

(f) $\quad I_1 = \int \frac{x^4 - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\,dx = \int (x+3)\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{15}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx =$

$$\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{15}{2}\ln|x-2| + c.$$

$$\boldsymbol{I_2 = \int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2}dx}\ .$$

Τα βήματα (α) , (b), (c) ισχύουν.

(d) $\quad \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2}$

$= \frac{A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$

(e) $\quad A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1) = x^2 + x + 1$

για $x = -1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{16}$

για $x = 3 \quad \Rightarrow C = \frac{13}{4}$

για $x = 2 \quad \Rightarrow A - B + C = 7 \Rightarrow B = \frac{15}{16}$

(f) $\quad I_2 = \int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-3)^2}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{15}{16}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{13}{4}\int \frac{dx}{(x-3)^2} =$

$$\frac{1}{16}\ln|x+1| + \frac{15}{16}\ln|x-3| - \frac{13}{4}\,\frac{1}{x-3} + c.$$

$$\boldsymbol{I_3 = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4x+9)}}.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4x+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+9}$$

$$= \frac{A(x^2+4x+9) + Bx(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+9)} \Rightarrow A(x^2+4x+9) + Bx(x-1) + C(x-1) = 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{για } x=0 & \Rightarrow \quad 9A - C = 1 \\ \text{για } x=1 & \Rightarrow \qquad\quad A = \frac{1}{14} \\ \text{για } x=2 & \Rightarrow 21A + 2B + C = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{14} \\ B = -\frac{1}{14} \\ C = -\frac{5}{14} \end{array}$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4x+9)} = \frac{1}{14}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{14}\int \frac{x+5}{x^2+4x+9}\,dx =$$

$$\frac{1}{14}\ln|x-1| - \frac{1}{28}\int \frac{2x+10}{x^2+4x+9}\,dx =$$

$$\frac{1}{14}\ln|x-1| - \frac{1}{28}\int \frac{(x^2+4x+9)'}{x^2+4x+9}\,dx - \frac{3}{14}\int \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx =$$

$$\frac{1}{14}\ln|x-1| - \frac{1}{28}\ln(x^2+4x+9) - \frac{3}{14}\int \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$\frac{1}{14}\ln|x-1| - \frac{1}{28}\ln(x^2+4x+9) - \frac{3}{14\cdot 5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{14}\ln|x-1| - \frac{1}{28}\ln(x^2+4x+9) - \frac{3}{14\cdot\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}} + c.$$

$$\boldsymbol{I_4 = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)^2}}.$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A(1+x^2)^2 + Bx^2(1+x^2) + Cx(1+x^2) + Dx^2 + Ex}{x(1+x^2)^2}$$

$A(1+x^2)^2 + Bx^2(1+x^2) + Cx(1+x^2) + Dx^2 + Ex = 1$

για $x = 0 \;\Rightarrow\; A = 1$

για $x = 1 \;\Rightarrow\; 4 + 2B + 2C + D + E = 1 \Rightarrow 2B + 2C + D + E = -3$

για $x = -1 \;\Rightarrow\; 4 + 2B - 2C + D - E = 1 \Rightarrow 2B - 2C + D - E = -3$

για $x = 2 \;\Rightarrow\; 25 + 20B + 10C + 4D + 2E = 1 \Rightarrow 20B + 10C + 4D + 2E = -24$

για $x = -2 \;\Rightarrow\; 25 + 20B - 10C + 4D - 2E = 1 \Rightarrow 20B - 10C + 4D - 2E = -24$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & & A & = & 1 \\ 2B & & +D & & = & -3 \\ 5B & & +D & & = & -6 \\ 2B & +2C & +D & +E & = & -3 \\ 10B & -5C & +2D & -E & = & -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \\ D=-1 \\ E=0 \end{array}$$

Το ολοκλήρωμα $I_4 = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)^2}$ γράφεται

$$I_4 = \int \frac{dx}{x\,(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{-x}{1+x^2}dx + \int \frac{-x}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)^2} + c\,.$$

$$\boldsymbol{I_5 = \int \frac{x^4 + x^3 - 3x + 5}{(x+1)(x^2+x+1)}dx\,.}$$

Επειδή η ρητή συνάρτηση είναι μη γνήσια διαιρούμε τον αριθμητή $x^4 + x^3 - 3x + 5$ με τον παρονομαστή $(x+1)(x^2+x+1) = \boldsymbol{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - 3x + 5 & x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\ \hline -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x & \chi - 1 \;\; \text{πηλίκο} \\ \hline -x^3 - 2x^2 - 4x + 5 & \\ x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & \\ \hline -2x + 6 \;\text{υπόλοιπο} & \end{array}$$

Έτσι, $\frac{x^4 + x^3 - 3x + 5}{(x+1)(x^2+x+1)} = x - 1 + \frac{-2x+6}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

Η γνήσια ρητή παράσταση $\frac{-2x+6}{(x+1)(x^2+x+1)}$ γράφεται

$$\frac{-2x+6}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$

$$\frac{A(x^2+x+1)+B(x^2+x)+Cx+C}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$(A+B)x^2+(A+B+C)x+A+C=-2x+6$.

Για την εύρεση των συντελεστών A,B,C λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{llllll} A & +B & & = & 0 \\ A & +B & +C & = & -2 \\ A & & +C & = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{lll} A & = & 8 \\ B & = & -8 \\ C & = & -2 \end{array}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα $I_5 = \int \frac{x^4+x^3-3x+5}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$ γράφεται

$$I_5 = \int (x-1)dx + 8\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{8x+2}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 8\ln|x-1| - 4\int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 8\ln|x-1| - 4\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 8\ln|x-1| - 4\ln(x^2+x+1) + 2\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 8\ln|x-1| - 4\ln(x^2+x+1) + 2\int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2\right]} =$$

$$\frac{(x-1)^2}{2} + 8\ln|x-1| - 4\ln(x^2+x+1) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) + c.$$

$$\boldsymbol{I_6 = \int \frac{3x^4+4}{12x^2\ (x^2-x+1)}dx.}$$

Επειδή η ρητή συνάρτηση είναι μη γνήσια διαιρούμε τον αριθμητή $3x^4+4$ με τον παρονομαστή $x^2(x^2-x+1) = x^4-x^3+x^2$

$$\begin{array}{l|l} 3x^4+4 & x^4-x^3+x^2 \\ -3x^4+3x^3-3x^2 & \\ \hline 3x^3-3x^2+4 \text{ υπόλοιπο} & 3 \text{ πηλίκο} \end{array}$$

Έτσι,

$$\frac{3x^4+4}{x^2(x^2-x+1)}=3+\frac{3x^3-3x^2+4}{x^2(x^2-x+1)}$$

Η γνήσια ρητή παράσταση $\frac{3x^3-3x^2+4}{x^2(x^2-x+1)}$ γράφεται

$$\frac{3x^3-3x^2+4}{x^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(A+C)x^3+(-A+B+D)x^2+(A-B)x+B=3x^3-3x^2+4.$$

Για την εύρεση των συντελεστών A,B,C,D λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} +A & & +C & & = & 3 \\ -A & +B & & +D & = & -3 \\ +A & -B & & & = & 0 \\ & +B & & & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} A & = & 4 \\ B & = & 4 \\ C & = & -1 \\ D & = & -3 \end{array}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα $I_6=\int\frac{3x^4+4}{12x^2\ (x^2-x+1)}dx$ γράφεται

$$I_6=\int 3dx+4\int\frac{dx}{x}+4\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{x+3}{x^2-x+1}dx+4\int\frac{dx}{x}=$$

$$3x+4\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{x^2-x+1}dx=$$

$$3x+4\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$3x+4\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$3x+4\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\frac{3}{4}\left[1+\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2\right]}=$$

$$3x+4\ln|x|-\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})+c.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$\boldsymbol{I_1=\int\frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx}$, **(απ.** $x+\ln(x^2+1)+c$ **).**

$\boldsymbol{I_2=\int\frac{4x^2-x+12}{x(x^2+4)}dx}$, **(απ.** $3\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c$

$$\boldsymbol{I_3=\int\frac{4x^2+1}{x(2x-1)^2}dx}, \qquad (\textbf{απ.}\ \ln x-\frac{2}{2x-1}+c\ )$$

$$\boldsymbol{I_4=\int\frac{5x^2+11x-2}{(x+5)\,(x^2+9)}dx}, \qquad (\textbf{απ.}\ 2\ln(x+5)+\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3}+c\,)$$

$$\boldsymbol{I_5=\int\frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}dx}, \qquad (\textbf{απ.}\quad \ln x-\arctan x-\frac{1}{x}+c\ )$$

$$\boldsymbol{I_6=\int\frac{4x^5}{x^4-1}dx} \qquad (\textbf{απ.}\quad 2x^2+\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}+c\,)$$