1. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Αν $u(x),v(x)$ είναι δύο συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους είναι γνωστό από το διαφορικό λογισμό ότι ισχύει

$$d(uv) = vdu+udv \quad ή \quad (uv)' = u'v+uv'.$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει με ολοκλήρωση

$$\int vdu = uv - \int udv \quad ή \quad \int u'vdx = uv - \int uv'dx$$

Από τις σχέσεις $\int vdu = uv - \int udv$ ή $\int u'vdx = uv - \int uv'dx$

είναι δυνατόν να υπολογιστεί ένα ολοκλήρωμα με κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής :

$\int p(x)e^{ax}dx$, $\int p(x)ημ\beta xdx$, $\int p(x)συν\gamma xdx$, $\int p(x)\ln\delta xdx$, $\int e^{ax}\sin\beta xdx$, $\int e^{ax}\cos\beta xdx$, $\int \sin ax\cdot\cos\beta xdx$, όπου $p(x)$ είναι πολυώνυμο του x και $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ σταθερές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int x^2e^{3x}dx, \quad I_2 = \int x\sin 2x\,dx, \quad I_3 = \int x^n \ln x\,dx,\ n \neq -1,$$

$$I_4 = \int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad I_5 = \int e^{ax}\cos x\,dx, \quad I_6 = \int x^2\sin x\cos x\,dx,$$

$$I_7 = \int (\arcsin x)^2dx, \quad I_8 = \int x\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx, \quad I_9 = \int x\tan^2 x\,dx,$$

$$I_{10} = \int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx, \quad I_{11} = \int \arctan x\,dx, \quad I_{12} = \int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$$

Λύση

☻ $$I_1 = \int x^2e^{3x}dx = \int x^2\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'dx = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x}dx = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int x\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'dx =$$

$$\frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}\left[xe^{3x} - \int e^{3x}dx\right] = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}xe^{x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c.$$

☻ $$I_2 = \int x\sin 2x\,dx = \int x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)'dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$$

$$-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

☻ $\mathbf{I_3 = \int x^n \ln x\, dx} = \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$

☻ $\mathbf{I_4 = \int e^{ax}\sin bx\, dx} = \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx =$

$\frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}\int \left(e^{ax}\right)' \cos bx\, dx =$

$\frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\, dx \left[e^{ax}\cos bx + b\int e^{ax}\sin bx\, dx\right]$

Είναι λοιπόν

$I_4 = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I_4 \Rightarrow I_4 = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$

☻ $\mathbf{I_5 = \int e^{ax}\cos bx\, dx} = \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx =$

$\frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\int \left(e^{ax}\right)' \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\left[e^{ax}\sin bx - b\int e^{ax}\cos bx\, dx\right]$

Είναι λοιπόν

$I_5 = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\left[e^{ax}\sin bx\right] - \frac{b^2}{a^2}I_5 \Rightarrow I_5 = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$

☻ $\mathbf{I_6} = \mathbf{\int x^2 \sin x \cos x\, dx} = \int x^2\left(\frac{\eta\mu 2x}{2}\right) dx = -\frac{1}{4}\int x^2(\sigma\upsilon\nu 2x)'\, dx =$

$-\frac{1}{4}(x^2\sigma\upsilon\nu 2x) + \frac{1}{2}\int x\, \sigma\upsilon\nu 2x\, dx = -\frac{1}{4}(x^2\sigma\upsilon\nu 2x) - \frac{1}{4}\int x(\eta\mu 2x)'\, dx =$

$-\frac{1}{4}(x^2\sigma\upsilon\nu 2x) - \frac{1}{4}x\eta\mu 2x - \frac{1}{8}(\sigma\upsilon\nu 2x) + c.$

☻ **1^{ος} τρόπος**

$\mathbf{I_7} = \mathbf{\int (\arcsin x)^2 dx} = x(\text{arsin}x)^2 - 2\int x \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$x(\arcsin x)^2 + \int \arcsin x \frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \arcsin x\, (\sqrt{1-x^2})'\, dx =$

$x(\arcsin x)^2 - 2(\sqrt{1-x^2})\arcsin x + 2x + c.$

2^{ος} τρόπος

Θέτουμε $\mathbf{\arcsin} \boldsymbol{x = t \Leftrightarrow x = \sin t,\ dx = \cos t dt}$.

$\mathbf{I_7} = \mathbf{\int (\arcsin x)^2 dx} = \boldsymbol{\int t^2 \cos t dt = t^2 \sin t - 2\int t \sin t dt = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + c}$.

☻ $\mathbf{I_8 = \int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx} = \frac{1}{2}\int (x^2)' \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx =$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\frac{1-x}{1+x}} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \int \frac{x^2}{(1+x)(1-x)} dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{1-x^2-1}{1-x^2} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + \frac{1}{2}\int \frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + c =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + c = \frac{x^2-1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x + c.$$

☻ $\mathbf{I_9 = \int x \tan^2 x\, dx} = \frac{1}{2}\int x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$

$$\frac{1}{2}\int x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\int x(\tan x)' dx - \frac{1}{2}x =$$

$$\frac{1}{2}x(\tan x) - \frac{1}{2}\int \tan x\, dx - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(\tan x) - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\cos x} dx - \frac{1}{2}x + c$$

☻ $\mathbf{I_{10} = \int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx} = \int e^x \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx - \frac{1}{2}\int e^x \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx =$

$$\int e^x (\tan\frac{x}{2})' dx + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx =$$

$$e^x \tan\frac{x}{2} - \int e^x \tan\frac{x}{2} dx + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx = e^x \tan\frac{x}{2} + c.$$

☻ $\mathbf{I_{11} = \int \arctan x\, dx} = x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x \arctan x - \arctan x + c.$

☻ $\mathbf{I_{12} = \int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\, dx} = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \int x \frac{\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)'}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} dx =$

$$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int x\,\frac{\dfrac{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}}}{\sqrt{\dfrac{1+x-x}{1+x}}}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int x\,\frac{\dfrac{\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}}{\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}\,dx =$$

$$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int x\,\frac{\dfrac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int x\,\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}dx =$$

$$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int x\,\frac{(\sqrt{x})'}{(1+x)}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\int\frac{1+x-1}{1+x}(\sqrt{x})'\,dx =$$

$$x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+\int\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$$

Αναγωγικοί τύποι

Αν δίνεται ένα ολοκλήρωμα I_n, όπου $n\in\mathbb{N}$, και η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται από το n, τότε η κατά παράγοντες ολοκλήρωση μπορεί να καταλήξει σε ένα τύπο ο οποίος συνδέει το I_n με ένα ή περισσότερα από τα $I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_1$. Ο τύπος αυτός ονομάζεται **αναγωγικός ή αναδρομικός τύπος**. Η επιτυχία ενός αναγωγικού τύπου εξαρτάται από αν το αρχικό ολοκλήρωμα I_1 μπορεί να υπολογιστεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Αν $\mathbf{I_n = \int\frac{1}{(a^2+x^2)^n}dx}$, $\mathbf{n\in\mathbb{N}}$, με $\mathbf{n\geq 2}$, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$\mathbf{I_n=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+c,\quad \forall n\geq 2.}$$

Λύση

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$$I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c.$$

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}dx-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x(x^2+a^2)'}{(x^2+a^2)^n}dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)'dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.+c$$

$$=\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+c,\quad \forall n\geq 2.$$

(2) Αν $I_n=\int \sin^n x dx$, $n\in\mathbb{N}$, με $n\geq 2$,, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$\mathbf{I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}+c.}$$

Λύση

$I_1=\int \sin x dx=-\cos x+c$

$I_n=\int \sin^n x dx=\int \sin^{n-1}x\,(-\cos x)'dx=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos x\sin^{n-2}x\cos x\,dx=$

$-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx=$

$-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int \sin^n x\,dx=$

$-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$,

δηλαδή είναι

$I_n+(n-1)I_n=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}$

ή

$$I_n=\frac{-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}}{n}=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}+c.$$

(3) Αν $I_n=\int \ln^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, με $n\geq 2$, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$\mathbf{I_n=x\ln^n x-nI_{n-1}.}$$

Λύση

$I_1=\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+c.$

$I_n=\int \ln^n x\,dx=x\ln^n x-n\int x(\ln^{n-1}x)\frac{1}{x}dx=x\ln^n x-nI_{n-1}.$

(4) Αν $I_n=\int x^n e^x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, με $n\geq 2$, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$\mathbf{I_n=x^n e^x-nI_{n-1}+c.}$$

Λύση

$I_1=\int x e^x dx=\int x(e^x)'dx=x e^x-\int e^x dx=x e^x-e^x+c.$

$I_n=\int x^n e^x dx=\int x^n(e^x)'dx=x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx=x^n e^x-nI_{n-1}+c.$

(5) Αν $I_n=\int \tan^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$, με $n\geq 2$, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$\mathbf{I_n=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}+c,}$$ **και στη συνέχεια να υπολογιστεί το I_4.**

Λύση

$I_1=\int \tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{(-\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c.$

$$I_n = \int \tan^n x\, dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \tan^{n-2} x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\int \tan^{n-2} x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{n-2} x\, dx = \int \tan^{n-2} x\, (\tan x)'\, dx - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} + c.$$

Για τον υπολογισμόν του ολοκληρώματος I_4 χρησιμοποιούμε τον αναγωγικόν τύπον

$I_n = \dfrac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} + c$ για $n = 4$, δηλαδή

$I_4 = \int \tan^4 x\, dx = \dfrac{1}{3} \tan^2 x - I_2$, όπου $I_2 = \tan x - I_0$, και $I_0 = x$.

Συνεπώς

$$I_4 = \frac{1}{3} \tan^2 x - \tan x + x + c$$

(6) Αν $I_n = \int \dfrac{1}{\sin^n x} dx$, $n \in \mathbb{N}$, με $n \geq 3$, να αποδειχθεί ο αναγωγικός τύπος

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} + c.$$

Λύση

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx =$$

$$I_{n=2} + \int \cos x \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = I_{n=2} + \int \cos x \frac{(\sin x)'}{\sin^n x} dx =$$

$$I_{n=2} + \frac{1}{-n+1} \int \cos x\, (\sin^{-n+1} x)'\, dx = I_{n=2} - \frac{1}{n-1} \left[\cos x \sin^{-n+1} x + \int \sin x \frac{1}{\sin^{n-1} x} dx \right] =$$

$$I_{n=2} - \frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n=2} + c.$$

Συνεπώς

$$I_n = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n=2} + c.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$\mathbf{I_1} = \int x^3 \ln x\, dx$, **(απ.** $\dfrac{1}{4} x^4 \ln x - \dfrac{1}{16} x^4 + c$**)**

$\mathbf{I_2} = \int x (\ln x)^2 dx$, **(απ.** $\dfrac{1}{4} x^2 (\ln x)^2 - \dfrac{1}{4} x^2 \ln x + \dfrac{1}{8} x^2 + c$**)**

$\mathbf{I_3} = \int \arctan \sqrt{x}\, dx$, **(απ.** $x \arctan x - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c$**)**

$\mathbf{I_4} = \int \cos(\ln x)\, dx$, **(απ.** $x \dfrac{\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{2} + c$**)**

$\mathbf{I_5} = \int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$, (απ. $(x - 1)\ln(\ln x) + c$)

$\mathbf{I_6} = \int \ln(\sqrt{x})\, dx$, (απ. $x \ln\sqrt{x} - \frac{1}{4} x^2 + c$)

$\mathbf{I_7} = \int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$, (απ. $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} + c$)

$\mathbf{I_8} = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, (απ. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$)

$\mathbf{I_9} = \int (\arcsin x)^2 dx$, (απ. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + c$)

$\mathbf{I_{10}} = \int x \tan^2(x^2+1)\, dx$, (απ. $\frac{1}{2}\left[-x^2 + \tan(x^2+1)\right] + c$)

$\mathbf{I_{11}} = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$, (απ. $x\tan x + \ln|\cos x| + c$)

$\mathbf{I_{12}} = \int (1+x^2)\arctan x\, dx$, (απ. $(x + \frac{x^3}{3})\arctan x - \frac{x^2}{6} - \ln(1+x^2)$).