2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΠΛΩΝ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ρητή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση f που γράφεται με τη μορφή $\mathbf{f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}}$,
όπου p,q είναι πολυώνυμα μιας μεταβλητής x με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς και πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την ολοκλήρωση απλών ρητών παραστάσεων, δηλαδή παραστάσεων της μορφής

I. $\mathbf{f(x) = \dfrac{A}{x-a}}$

II. $\mathbf{g(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}}$, $\quad n \neq 1$

III. $\boldsymbol{u(x) = \dfrac{A}{x^2+a^2}}$

IV. $\mathbf{h(x) = \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}}$

VI. $\mathbf{j(x) = \dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}}$, n = 2,3… ,

όπου A,B,a,b,c είναι πραγματικοί αριθμοί. Για τις συναρτήσεις h,j υποθέτουμε επιπλέον ότι το πολυώνυμο ax^2+ bx + c δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι $b^2 - 4ac < 0$.

Τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων f,g, υπολογίζονται πολύ απλά και είναι αντίστοιχα

$$I_1 = \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + c,$$

$$I_2 = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^n} + c.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\boldsymbol{I_3 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left\{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}} = \frac{1}{a}\,τοξεφ\frac{x}{a} + c}$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

$I_4 = \displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$ και $I_5 = \displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$ εργαζόμαστε ως εξής :

1^{ον} Γράφουμε το πολυώνυμο ax^2+bx+c ως άθροισμα τετραγώνων, δηλαδή

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2+2\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \quad (\ )$$

2^{ον} Θέτουμε $\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}} = k > 0$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right].$$

3ον Θέτουμε $x+\dfrac{b}{2a} = t$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$ax^2+bx+c = a\,(t^2+k^2) \quad \text{και} \quad dx = dt.$$

Αντικαθιστούμε στα ολοκληρώματα I_4 και I_5 οπότε προκύπτει

$$\mathrm{I}_4 = \int \frac{\mathrm{A}\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{a(t^2+k^2)}\,dt = \frac{\mathrm{A}}{a}\int\frac{t}{t^2+k^2}\,dt + \frac{\mathrm{AB}}{a}\int\frac{1}{t^2+k^2}\,dt =$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{2a}\ln(t^2+k^2) + \frac{\mathrm{AB}}{a}\int\frac{1}{k^2\left[1+\left(\frac{t}{k}\right)^2\right]}\,dt = \frac{\mathrm{A}}{2a}\ln(t^2+k^2) + \frac{\mathrm{AB}}{ak}\arctan\frac{t}{k} + \mathrm{c}$$

$$\mathrm{I}_5 = \int \frac{\mathrm{A}\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{a^n(t^2+k^2)^n}\,dt = \frac{\mathrm{A}}{a^n}\int\frac{t}{(t^2+k^2)^n}\,dt + \frac{\mathrm{AB}}{a^n}\int\frac{1}{(t^2+k^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{2a^n}\int\frac{(t^2+k^2)'}{(t^2+k^2)^n}\,dt + \frac{\mathrm{AB}}{a^n}\int\frac{1}{(t^2+k^2)^n}\,dt = \frac{\mathrm{A}}{2a^n(1-n)}\,\frac{1}{(t^2+k^2)^{n-1}} +$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{a^n}\int\frac{1}{(t^2+k^2)^n}\,dt.$$

Μία μέθοδος υπολογισμού του ολοκληρώματος $\mathrm{I_n} = \int\dfrac{1}{(t^2+k^2)^n}\,dt$ είναι η κατά παράγοντες ολοκλήρωση με αναγωγικό τύπο $\quad \mathrm{I_n} = \dfrac{2n\text{-}3}{2k^2(n\text{-}1)}\mathrm{I_{n\text{-}1}} + \dfrac{t}{2k^2(n\text{-}1)(t^2+k^2)^{n-1}} + \mathrm{c},\ \ \forall n \geq 2.$

Μία άλλη μέθοδος υπολογισμού του ολοκληρώματος $\mathrm{I_n} = \int\dfrac{1}{(t^2+k^2)^n}\,dt$ είναι με την αντικατάσταση $\boldsymbol{t = k\,\varepsilon\varphi u,\ \ dt = k\,\dfrac{du}{\sigma\upsilon\nu^2 u}},\ \ \boldsymbol{t^2+k^2 = k^2\,\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}}.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$\mathbf{I_1} = \int\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3x-4}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_2} = \int\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{(2x+7)^4}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_3} = \int\dfrac{\mathbf{7x+3}}{\mathbf{x^2+9}}\,\mathbf{dx}$,

$\mathbf{I_4} = \int\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2x^2+3}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_5} = \int\dfrac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4x^2+2x+1}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_6} = \int\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{3x^2+2x+1}}\,\mathbf{dx}$,

$\mathbf{I_7} = \int\dfrac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{(4x^2+2x+1)^2}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_8} = \int\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{(4x^2+8x+13)^2}}\,\mathbf{dx}$, $\quad \mathbf{I_9} = \int\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{(4x^2+8x+13)^2}}\,\mathbf{dx}$,

$\mathbf{I_{10}} = \int\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{(4x^2+2x+1)^3}}\,\mathbf{dx}.$

Λύση

$$\mathbf{I_1} = \int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3x-4}}\,\mathbf{dx} = \frac{2}{6}\int \frac{(3x-4)'}{3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x-4| + c.$$

$$\mathbf{I_2} = \int \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{(2x+7)^4}}\,\mathbf{dx} = \frac{5}{2}\int \frac{(2x+7)'}{(2x+7)^4}\,dx = -\frac{5}{6}\frac{1}{(2x+7)^3} + c.$$

$$\mathbf{I_3} = \int \frac{\mathbf{7x+3}}{\mathbf{x^2+9}}\,\mathbf{dx} = \int \frac{7x}{x^2+9}\,dx + \int \frac{3}{x^2+9}\,dx = \frac{7}{2}\ln(x^2+9) + 3\int \frac{1}{9\left[1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]}\,dx =$$

$$\frac{7}{2}\ln(x^2+9) + \arctan(\frac{x}{3}) + c.$$

$$\mathbf{I_4} = \int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2x^2+3}}\,\mathbf{dx} = \frac{1}{4}\int \frac{(2x^2+3)'}{2x^2+3}\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + c.$$

$$\mathbf{I_5} = \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4x^2+2x+1}} = \int \frac{dx}{4(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+2\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4})} =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $x+\frac{1}{4} = u$, οπότε έχουμε $dx = du$ και

$$\mathrm{I}_5 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{16}\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)' dt}{1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4t}{\sqrt{3}} + c.$$

Επανερχόμενοι στην αρχική μεταβλητή έχουμε

$$\mathrm{I}_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4(x+\frac{1}{4})}{\sqrt{3}} + c.$$

$$\mathbf{I_6} = \int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3x^2+2x+1}}\,\mathbf{dx} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2x+1}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{(6x+2)-2}{3x^2+2x+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{6}\int \frac{(3x^2+2x+1)'-2}{3x^2+2x+1}\,dx = \frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x^2+2x+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{3(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})}\,dx \quad \frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1) - \frac{1}{9}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}}\,dx =$$

$$\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)\ -\frac{1}{9}\int\frac{1}{\frac{2}{9}\left[1+\frac{9}{2}(x+\frac{1}{3})^2\right]}\,dx\ =$$

$$\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)\ -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left[1+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}(x+\frac{1}{3}\right)^2\right]}\,dx\ =$$

$$\frac{1}{6}\ln(3x^2+2x+1)-\frac{\sqrt{2}}{6}\ \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}(x+\frac{1}{3})\right)\ +\ \mathrm{c}.$$

$$\mathbf{I_7}\ =\ \int\frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{(4x^2+2x+1)^2}}\,\mathbf{dx}\ =\int\frac{2x+1}{4(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}\,dx\ =\ \frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}\,dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέτουμε $x+\frac{1}{4}=u$, οπότε έχουμε $dx=du$ και

$$\mathrm{I}_7\ =\ \frac{1}{4}\int\frac{2(t-\frac{1}{4})+1}{t^2+\frac{3}{16}}\,dt\ =\ \frac{1}{4}\int\frac{2t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{16}}\,dt\ =\ \frac{1}{4}\int\frac{2t}{t^2+\frac{3}{16}}\,dt\ +\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{16}}\ =$$

$$\frac{1}{4}\ln(t^2+\frac{3}{16})\ +\ \frac{1}{8}\int\frac{dt}{\frac{3}{16}\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ =\ \frac{1}{4}\ln(t^2+\frac{3}{16})\ +\ \frac{1}{8}\int\frac{dt}{\frac{3}{16}\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ =$$

$$\frac{1}{4}\ln(t^2+\frac{3}{16})\ +\ \frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ =\ \frac{1}{4}\ln(t^2+\frac{3}{16})\ +\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \int\frac{\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)'dt}{\left[1+\left(\frac{4t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}\ =$$

$$\frac{1}{4}\ln(t^2+\frac{3}{16})\ +\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{4t}{\sqrt{3}}\ +\ c.$$

Επανερχόμενοι στην αρχική μεταβλητή έχουμε

$$\mathrm{I}_7\ =\ \frac{1}{4}\ln\left(\ (x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{6}\right)\ +\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \arctan\frac{4(x+\frac{1}{4})}{\sqrt{3}}\ +\ c.$$

$$\mathbf{I_8}\ =\ \int\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{(4x^2+8x+13)^2}}\,\mathbf{dx}\ =\ \frac{1}{8}\int\frac{(4x^2+8x+13)'}{(4x^2+8x+13)^2}\,\mathrm{d}x\ =-\frac{1}{8}\ \frac{1}{4x^2+8x+13}\ +\ \mathrm{c}\ .$$

$$\mathbf{I_9}\ =\ \int\frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{(4x^2+8x+13)^2}}\,\mathbf{dx}\ =\ \frac{1}{8}\int\frac{(8x+8)+16}{(4x^2+8x+13)^2}\,\mathrm{d}x\ =$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{(4x^2+8x+13)'}{(4x^2+8x+13)^2}\,\mathrm{d}x\ +2\int\frac{1}{(4x^2+8x+13)^2}\,\mathrm{d}x\ =$$

$$-\frac{1}{8}\ \frac{1}{4x^2+8x+13}\ +2\int\frac{1}{(2x+1)^2+12}\,dx\ =$$

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{4x^2+8x+13} + 2\int \frac{1}{12\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{12}}\right)^2\right]}dx =$$

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{4x^2+8x+13} + \frac{1}{\sqrt{12}}\int \frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{12}}\right)'}{\left[1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{12}}\right)^2\right]}dx =$$

$$-\frac{1}{8}\frac{1}{4x^2+8x+13} + \frac{1}{\sqrt{12}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{12}}) + \text{c}.$$

$$\mathbf{I_{10}} = \int \frac{\mathbf{x}}{(\mathbf{4x^2+2x+1})^3}\,\mathbf{dx} = \int \frac{x}{\left[(2x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right]^3}dx.$$

Θέτουμε $2x+\frac{1}{2}=t$. Επομένως είναι $x=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}$, $dx=\frac{dt}{2}$ και το ολοκλήρωμα I_{10} γίνεται

$$\mathrm{I}_{10} = \int \frac{\frac{t}{2}-\frac{1}{4}}{(t^2+\frac{3}{4})^3}dt = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2+\frac{3}{4})'}{(t^2+\frac{3}{4})^3}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^3}dt =$$

$$-\ \frac{1}{8}\frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^3}dt.$$

Το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}_3 = \int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^3}dt$ μπορεί να υπολογιστεί με δύο μεθόδους

1η μέθοδος . Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n\text{-}3}{2k^2(n\text{-}1)}\mathrm{I}_{n\text{-}1} + \frac{t}{2k^2(n\text{-}1)(\mathrm{t}^2+k^2)^{n\text{-}1}} + \mathrm{c} \quad \text{για } n=3 \text{ και } k=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{3}{2\ \frac{3}{4}\ 2}\ \mathrm{I}_2 + \frac{t}{2\ \frac{3}{4}\ 2\ (t^2+\frac{3}{4})^2} + \text{ c , όπου}$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2\ \frac{3}{4}}\ \mathrm{I}_1 + \frac{t}{2\ \frac{3}{4}\ (t^2+\frac{3}{4})} = \frac{2}{3}\mathrm{I}_1 + \frac{t}{\frac{3}{2}\ (t^2+\frac{3}{4})} \text{ , όπου}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \int \frac{1}{\frac{3}{4}(1+\frac{4}{3}t^2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right).$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα I_3 είναι

$$\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + \frac{t}{\frac{3}{2}\ (t^2+\frac{3}{4})} + \frac{t}{2\ \frac{3}{4}\ 2\ (t^2+\frac{3}{4})^2} + \text{ c.}$$

2^{η} **μέθοδος**. Θέτουμε $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan u$. Επομένως είναι $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{du}{\cos^2 u}$ και

$(t^2 + \frac{3}{4})^3 = (\frac{3}{4})^3 (1 + \tan^2 u)^3 = (\frac{3}{4})^3 \frac{1}{(\cos^2 u)^3} = \frac{27}{64}\frac{1}{\cos^6 u}$.

Συνεπώς το ολοκλήρωμα I_3 γίνεται

$$I_3 = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{du}{\cos^2 u}}{\frac{27}{64}\frac{1}{\cos^6 u}} = \frac{\sqrt{3}}{32\cdot 27}\int \cos^4 u\, du = \frac{\sqrt{3}}{32\cdot 27}\int\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2 du =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{32\cdot 27\cdot 4}\int (1+\cos^2 2u + 2\cos 2u)\; du =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3456}u + \frac{\sqrt{3}}{3456}\int\frac{1+\cos 4u}{2}\, du + \frac{\sqrt{3}}{3456}\sin 2u =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3456}u + \frac{\sqrt{3}}{6912}u + \frac{\sqrt{3}}{27648}\sin 4u + \frac{\sqrt{3}}{3456}\sin 2u + c, \text{ όπου}$$

$$u = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(2x+\frac{1}{2})\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$\mathbf{I_1 = \int \frac{2}{3x+6}\,dx}$ (απ. $\frac{2}{3}\ln(3x+6) + c$)

$\mathbf{I_2 = \int \frac{2x+3}{x^2+9}\,dx}$ (απ. $\ln(x^2+9) + \arctan(\frac{x}{3}) + c$)

$\mathbf{I_3 = \int \frac{3}{5x^2+6}\,dx}$ (απ. $\frac{3}{\sqrt{30}}\arctan(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}}) + c$)

$\mathbf{I_4 = \int \frac{x}{2x^2+4x+7}\,dx}$ (απ. $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan(\frac{\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{5}}) + c$)

$\mathbf{I_5 = \int \frac{3x+1}{x^2+3x+5}\,dx}$ (απ. $\frac{3}{2}\ln(x^2+3x+5) - \frac{7}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2(x+\frac{3}{2})}{\sqrt{11}}) + c$)

$\mathbf{I_5 = \int \frac{3x+1}{(x^2+3x+5)^2}\,dx}$ (απ. $\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+3x+5} - \frac{7}{11}\frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+3x+5} - \frac{14}{11\sqrt{11}}\arctan(\frac{2(x+\frac{3}{2})}{\sqrt{11}}) + c$)

$\mathbf{I_7 = \int \frac{x+4}{x^2+x+1}\,dx}$ (απ. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}) + c$)

$\mathbf{I_8 = \int \frac{x}{(x^2+x+1)^3}\,dx}$ (απ. $-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan(\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}) + c$)