ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Δυναμοσειρά με κέντρο x_0 ή σειρά δυνάμεων του $x-x_0$ ονομάζεται κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + ...$$

Αν $x_0 = 0$ τότε ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο το 0 ή σειρά δυνάμεων του x και είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... \, .$$

Η σύγκλιση μιας δυναμοσειράς εξαρτάται από την τιμή του x, δηλαδή είναι δυνατόν για κάποιες τιμές του x να συγκλίνει και για κάποιες άλλες να αποκλίνει.
Αν θεωρήσουμε το x σταθερό η δυναμοσειρά είναι μία σειρά πραγματικών αριθμών, οπότε μπορούν να εφαρμοστούν όλα τα κριτήρια σύγκλισης αριθμητικών σειρών.

Κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 0$.

Ακτίνα σύγκλισης R μιας δυναμοσειράς είναι $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ και είναι $0 \le R \prec \infty$.

Μια δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x - x_0| \prec R$ και αποκλίνει για $|x - x_0| \succ R$.

Διάστημα σύγκλισης είναι το $(-R + x_0, R + x_0)$.

Η σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος $-R + x_0,\ R + x_0$ μελετάται χωριστά.

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\rho}} \begin{cases} \text{συγκλινει αν } \rho \succ 1 \\ \text{αποκλινει αν } \rho \le 1 \end{cases}$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Η $\sum_{n=0}^{\infty} a\omega^n \begin{cases} \text{συγκλίνει και το άθροισμά της είναι } \dfrac{a}{1-\omega} & \text{για } 0 \prec \omega \prec 1 \\ \text{αποκλίνει για } \omega \ge 1 \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$

Είναι $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$

Διάστημα σύγκλισης είναι $(-R + x_0, R + x_0) = (0, 2)$.

Στο σημείο $x = 0$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ η οποία είναι εναλλασσομένου πρόσημου.

Θα εξετάσουμε αν συγκλίνει απόλυτα δηλαδή αν συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

και επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα.

Στο σημείο $x=2$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ η οποία συγκλίνει.

Τελικά το διάστημα σύγκλισης είναι $\left[0,2\right]$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$

Είναι $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$

Διάστημα σύγκλισης είναι $\left(-R+x_0,R+x_0\right)=(-\infty,\infty)$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

Είναι $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=1.$

Διάστημα σύγκλισης είναι $\left(-R+x_0,R+x_0\right)=(-1,1)$.

Στο σημείο $x=-1$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ η οποία είναι εναλλασσομένου πρόσημου. Θα εξετάσουμε αν συγκλίνει απόλυτα δηλαδή αν συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Είναι $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n^2+3n+2}\prec\frac{1}{n^2}$.

Η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και από το κριτήριο σύγκρισης θα συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ συγκλίνει απόλυτα.

Στο σημείο $x=1$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ η οποία συγκλίνει.

Τελικά το διάστημα σύγκλισης είναι $\left[-1,1\right]$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^n$

Θέτουμε $y=\frac{3x}{x+4}$ οπότε η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,y^n$.

Είναι $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n}{n+2}}{\frac{n+1}{n+3}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right|=1.$

Η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}\,y^n$ συγκλίνει για $\left|y\right|\prec 1$ ή

$$\left|\frac{3x}{x+4}\right| \prec 1 \Leftrightarrow \frac{(3x)^2}{(x+4)^2} \prec 1 \Leftrightarrow 9x^2 \prec x^2+8x+16 \Leftrightarrow x^2-x-2 \prec 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \prec 0.$$

Το τριώνυμο x^2-x-2 είναι αρνητικό στο διάστημα μεταξύ των ριζών, άρα στο διάστημα $(-1,2)$ η

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}\left(\frac{3x}{x+4}\right)^n$ συγκλίνει.

Στο σημείο $x=-1$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\left(\frac{3(-1)}{-1+4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\left(\frac{3^n(-1)^n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$ η ο οποία είναι εναλλασσομένου πρόσημου.

Θα εξετάσουμε αν συγκλίνει απόλυτα δηλαδή αν συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n+2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}$.

Επειδή όμως $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1\neq 0$, σύμφωνα με γνωστό κριτήριο, η $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n+2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+2}$ αποκλίνει και

επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$ δεν συγκλίνει απόλυτα.

Επίσης δεν συγκλίνει υπό συνθήκη διότι $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1\neq 0$ (δεν ισχύει η μία από τις δύο συνθήκες του Leibnitz.

Στο σημείο $x=2$ έχουμε την αριθμητική δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\left(\frac{3\cdot 2}{2+4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$

η οποία αποκλίνει διότι $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1\neq 0$.

Τελικά το διάστημα σύγκλισης είναι $\left(-1,2\right)$.

ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR , ΣΕΙΡΕΣ MAC-LAURIN

Αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει παραγώγους κάθε τάξης σε μια περιοχή του x_0, τότε για κάθε σημείο x της περιοχής αυτής ισχύει ότι

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}$$,όπου

$R_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $x_0 \prec \xi \prec x$ (υπόλοιπο Lagrange).

Αν $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}=0$ τότε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (Σειρά Taylor της $f(x)$ στο x_0)

Αν το $x_0=0$ τότε $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (Σειρά Mac-Laurin της $f(x)$ στο 0)

Το διάστημα σύγκλισης των σειρών αυτών προσδιορίζεται με τον γνωστό τρόπο που εφαρμόζεται στις δυναμοσειρές.