Να υπολογιστούν τα $D(x,\hat{x})$ και SNR_{dB}

Λύση

Προφανώς $L=10$. Συνεπώς

$$D(x,\hat{x}) = P_e = \sum_{k=1}^{10} \int_{d_k}^{d_{k+1}} (x-r_k)^2 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} \left. \frac{(x-r_k)^3}{3} \right|_{d_k}^{d_{k+1}} = \frac{1}{12}$$

Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο σύμφωνα με τη σχέση (3.60). Ακόμη

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{30} x^3 \Big|_{-5}^{5} = \frac{1}{30}\left(5^3 - (-5)^3\right) = \frac{25}{3}$$

Συνεπώς

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_x}{P_e}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\frac{25}{3}}{\frac{1}{12}}\right) = 10\log_{10}\left(100\right) = 20\,\text{dB}$$

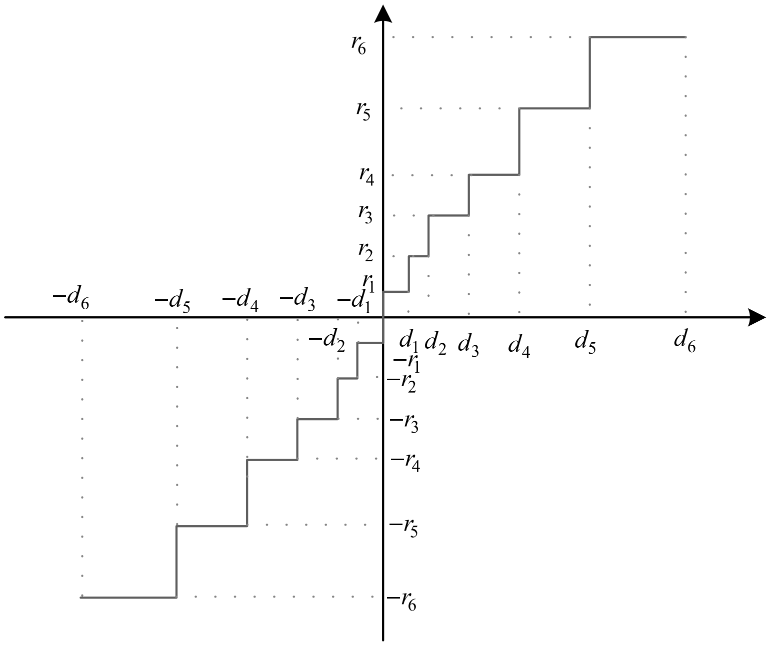
3.6.4 Βέλτιστοι κβαντιστές

Μπορούμε να σχεδιάσουμε βέλτιστου κβαντιστές με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος κβαντισμού. Οι βέλτιστες τιμές που θα βρούμε αφορούν τα d_k και r_k.Ο πλέον γνωστός βέλτιστος κβαντιστής είναι ο Lloyd-Max. Ένας τυπικός μη ομοιόμορφος κβαντιστής τύπου μέσης ανύψωσης δείχνεται στο Σχήμα 3.15.

3.6.4.1 Βέλτιστος κβαντιστής Lloyd-Max

Ο σχεδιασμός ενός κβαντιστή με τη μέθοδο Lloyd-Max έχει ως κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια της μεθόδου $f(x,y)$ αυτής μπορούμε να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές των d_k και r_k για έναν κβαντιστή L επιπέδων έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το ακόλουθο μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$D(x,\hat{x}) = \sum_{k=1}^{L} \int_{d_k}^{d_{k+1}} (x-\hat{x})^2 p(x) dx \qquad (3.61)$$



Σχήμα 3.15 Μη ομοιόμορφος κβαντιστής τύπου μέσης ανύψωσης

Στην παραπάνω σχέση επαναλαμβάνουμε ότι η $p(x)$ εκφράζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής x.

Η σχέση (3.61) γράφεται και ως

$$D(x,\hat{x}) = \sum_{k=1}^{L} \int_{d_k}^{d_{k+1}} (x - r_k)^2 p(x)dx \tag{3.62}$$

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην παραπάνω σχέση είναι τα d_k, r_k, οπότε η ελαχιστοποίηση του σφάλματος απαιτεί όπως

$$\frac{\partial D(x,\hat{x})}{\partial d_k} = 0 \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial D(x,\hat{x})}{\partial r_k} = 0 \tag{3.64}$$

Επίσης, από τη σχέση (3.63) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial D(x,\hat{x})}{\partial d_k} = \frac{\partial}{\partial d_k}\left[\int_{d_{k-1}}^{d_k} (x - r_{k-1})^2 p(x)dx + \int_{d_k}^{d_{k+1}} (x - r_k)^2 p(x)dx\right]$$

$$= (d_k - r_{k-1})^2 p(x) + (d_k - r_k)^2 p(x)$$

$$= (d_k - r_{k-1})^2 p(x) + (d_k - r_k)^2 p(x) \tag{3.65}$$

Θέτοντας το αποτέλεσμα αυτό ίσο με το μηδέν προκύπτει

$$d_k = \frac{r_{k-1} + r_k}{2} \tag{3.66}$$

Δηλαδή, εκτός από το αρχικό d_1 και το τελικό d_{L+1} που είναι από την αρχή δεδομένα, τα υπόλοιπα d_k πρέπει να είναι ίσα με την αριθμητική μέση τιμή των γειτονικών r_k.

Επίσης, από την (3.64) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial D(x,\hat{x})}{\partial r_k} = \int_{d_k}^{d_{k+1}} \frac{\partial}{\partial r_k}(x - r_k)^2 p(x)dx = \int_{d_k}^{d_{k+1}} -2(x - r_k)p(x)dx = 0 \tag{3.67}$$

$$\Rightarrow r_k = \frac{\int_{d_k}^{d_{k+1}} xp(x)dx}{\int_{d_k}^{d_{k+1}} p(x)dx} \tag{3.68}$$

Η εξίσωση αυτή σημαίνει ότι για βέλτιστο κβαντισμό, πρέπει τα r_k να τεθούν ίσα με το κέντρο βάρους των περιοχών $\left[d_k, d_{k+1}\right]$. Αν για παράδειγμα έχουμε έναν κβαντιστή με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας όπως αυτή της σχέσης (3.55), τότε από την (3.68) προκύπτει ότι

$$\Rightarrow r_k = \frac{\int_{d_k}^{d_{k+1}} x \frac{1}{\Delta_k} dx}{\int_{d_k}^{d_{k+1}} \frac{1}{\Delta_k} dx} = \frac{0.5\left(d_{k+1}^2 - d_k^2\right)}{\left(d_{k+1} - d_k\right)} = \frac{d_{k+1} + d_k}{2} \tag{3.69}$$

δηλαδή, η σχέση που χρησιμοποιήσαμε στους ομοιόμορφους κβαντιστές.

Ο σχεδιασμός λοιπόν ενός βέλτιστου κβαντιστή Lloyd-Max βασίζεται στις εξισώσεις (3.66) και (3.68). Συγκεκριμένα, με δεδομένη τη συνάρτηση $p(x)$ και του L, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ακόλουθα βήματα

Βήμα 1. Επιλέγουμε αρχικές τιμές για τα d_k, $k = 1,...,L+1$.

Βήμα 2. Από την εξίσωση (3.68) προσδιορίζουμε τα $r_k, k = 1,...,L$.

Βήμα 3. Βρίσκουμε τα νέα d_k από την εξίσωση (3.66).

Βήμα 4. Αν ικανοποιείται ένα κριτήριο σύγκλησης (π.χ. μη διαφοροποίηση των d_k) τερματίζεται η διαδικασία. Διαφορετικά πάμε στο Βήμα 2.

Παράδειγμα 3.5 Μια τυχαία μεταβλητή x έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x) = 0.5(x+1)$, $x \in [-1,1]$.

(α) Να υπολογιστεί το σφάλμα κβαντισμού για έναν ομοιόμορφο κβαντιστή $b = 1\text{bit}$ με παραμέτρους: $\Delta = 1$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -1$, $x = \{-1,0,1\}$, $\hat{x} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

(β) Να σχεδιαστεί ένας Lloyd-Max κβαντιστής.

Λύση

(α) Το πλήθος των σταθμών κβαντισμού είναι ίσο με $L = 2^b = 2$. Συνεπώς

$$D(x,\hat{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{x})^2 p(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x-(-0.5))^2 0.5(x+1)dx + \int_{0}^{1} (x-0.5)^2 0.5(x+1)dx$$

$$= 0.5\int_{-1}^{0}\left(x^3 + 2x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}\right)dx + 0.5\int_{0}^{1}\left(x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right)dx$$

$$\Rightarrow D(x,\hat{x}) = \frac{1}{12}$$

(β) Προκειμένου να σχεδιάσουμε έναν μη ομοιόμορφο κβαντιστή Lloyd-Max επιλέγουμε ως αρχικά επίπεδα κβαντισμού αυτά του ερωτήματος (α). Δηλαδή έχουμε αρχικά $d_1 = -1, d_2 = 0, d_3 = 1$.

Αν εφαρμόσουμε την επαναληπτική διαδικασία θα πάρουμε σε κάθε επανάληψη τις ακόλουθες τιμές

1$^{\eta}$ επανάληψη

$$d_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{9},\ r_1 = \frac{\int_{-1}^{0} 0.5x(x+1)dx}{\int_{-1}^{0} 0.5(x+1)dx} = -\frac{1}{3},\quad r_2 = \frac{\int_{0}^{1} 0.5x(x+1)dx}{\int_{0}^{1} 0.5(x+1)dx} = \frac{5}{9}$$

Οι υπόλοιπες επαναλήψεις, μέχρι την τελική λύση, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Παρατηρούμε ότι στην 11$^{\eta}$ επανάληψη δεν έχουμε μεταβολή των τιμών και επομένως έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση. Συνεπώς, ο βέλτιστος ταξινομητής Lloyd–Max αντιστοιχεί σε

$r_1 = -0.176,\ r_2 = 0.648$ και $d_1 = -1, d_2 = 0.236, d_3 = 1$.

Επανάληψη	Τιμές
2	$r_1 = -0.259,\ r_2 = 0.598$ και $d_2 = 0.169$
3	$r_1 = -0.22,\ r_2 = 0.621$ και $d_2 = 0.2$
4	$r_1 = -0.20,\ r_2 = 0.633$ και $d_2 = 0.217$
5	$r_1 = -0.189,\ r_2 = 0.640$ και $d_2 = 0.226$
6	$r_1 = -0.183,\ r_2 = 0.644$ και $d_2 = 0.23$
7	$r_1 = -0.18,\ r_2 = 0.646$ και $d_2 = 0.233$
8	$r_1 = -0.178,\ r_2 = 0.647$ και $d_2 = 0.234$
9	$r_1 = -0.177,\ r_2 = 0.647$ και $d_2 = 0.235$
10	$r_1 = -0.177,\ r_2 = 0.648$ και $d_2 = 0.236$
11	$r_1 = -0.176,\ r_2 = 0.648$ και $d_2 = 0.236$

Το σφάλμα κβαντισμού τώρα είναι ίσο με

$$D(x,\hat{x}) = \int_{-1}^{0.236} (x-(-0.176))^2 0.5(x+1)dx + \int_{0.236}^{1} (x-0.648)^2 0.5(x+1)dx$$

$$\Rightarrow D(x,\hat{x}) = 0.06192$$

Μικρότερο δηλαδή από αυτόν του ομοιόμορφου κβαντιστή.

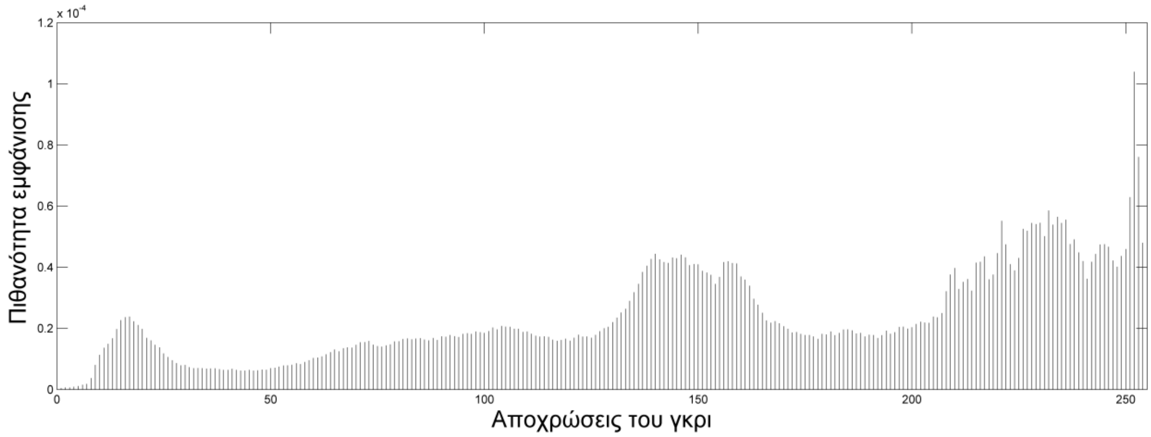
Παράδειγμα 3.6 Να κβαντιστεί η εικόνα του Σχήματος 3.16 σε επτά επίπεδα φωτεινότητας.

Σχήμα 3.16

Λύση

Ουσιαστικά θέλουμε να μειώσουμε τις γκρι αποχρώσεις της εικόνας από 256 σε 7. Αυτό θα το κάνουμε σχεδιάζοντας έναν κατάλληλο κβαντιστή Lloyd-Max.

Ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θεωρούμε το ιστόγραμμα πιθανότητας της εικόνας που φαίνεται στο Σχήμα 3.17.



Σχήμα 3.17 Το ιστόγραμμα της εικόνας λαμβάνεται ως $p(x)$.

Για να σχεδιάσουμε έναν μη ομοιόμορφο κβαντιστή Lloyd-Max με επτά επίπεδα κβαντισμού επιλέγουμε αρχικά τα d_k, $k = 1,...,8$ να ισαπέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta = \dfrac{256}{7+1} = 32$. Δηλαδή έχουμε αρχικά

$$d^T = [0,32,64,96,128,160,192,224]$$

Στην πρώτη επανάληψη προκύπτει ότι

$$r^T = [18.672,49.631,80.913,111.644,145.266,174.157,210.997]$$

και

$$d^T = [0,35.294,66.344,96.483,128.455,159.945,192.972,224]$$

Μετά από 14 επαναλήψεις, ο αλγόριθμος έδωσε τις ακόλουθες τιμές

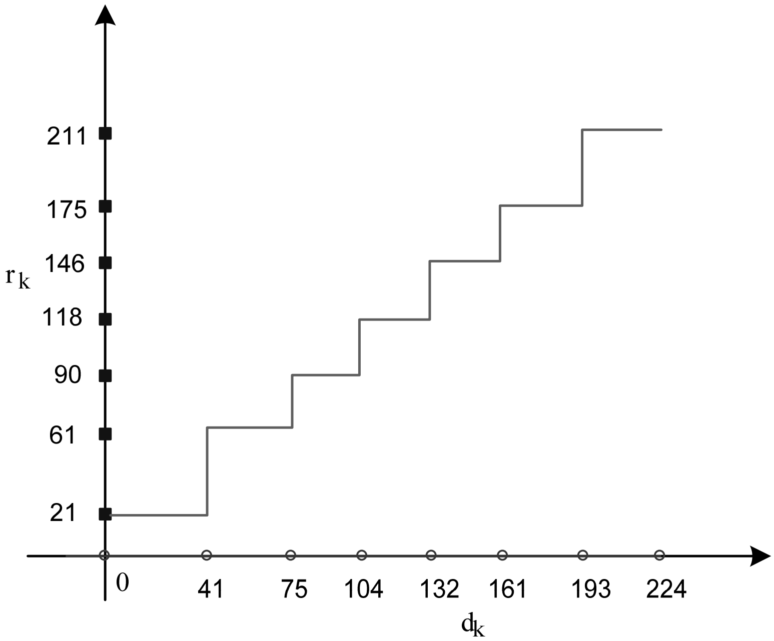
$$r^T = [21.303,61.213,89.734,117.676,146.469,174.624,211.32]$$

$$d^T = [0,41.258,75.473,103.705,132.072,160.546,192.972,224]$$

Με στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο ακέραιο έχουμε τελικά

$$r^T = [21,61,90,118,146,175,211]$$

Στο Σχήμα 3.18 δείχνεται σχηματικά ο κβαντιστής που προέκυψε και στο Σχήμα 3.19 παρουσιάζεται η κβαντισμένη εικόνα με μόνο επτά αποχρώσεις. Το σφάλμα κβαντισμού είναι ίσο με 0.371. Το πρόγραμμα που υλοποιεί τον αλγόριθμο του Lloy-Max για μείωση των αποχρώσεων σε εικόνες δίνεται στο Σχήμα 3.20.



Σχήμα 3.18

Σχήμα 3.19 Κβαντισμένη εικόνα με επτά μόνον αποχρώσεις του γκρι.

```
Im=double(imread('aaa.bmp'));
N=7;
[Im,partition,codebook] =grayscale_red_Lloyd(Im,N);
Im=uint8(Im); figure (2), imshow(Im)
title(strcat('Image with only ',num2str(N),' gray values'))
function [Im,partition,codebook] =grayscale_red_Lloyd(Im,N)
% (c) 2013 Nikos Papamarkos
% Grayscale reduction using Lloyds algorithm
% Im the initial image and the output image
% N the final number of grayscales
% partition and codebook as they defined in lloyds function
[m,n]=size(Im);mn=m*n; Delta=256/(N+1);
d=zeros(N,1);initcodebook=d;
% Initialization of initicodebook
for i=1:N+1,   d(i)=(i-1)*Delta;  end
 for i=1:N
     initcodebook(i)=(d(i)+d(i+1))/2;
 end
%   Reshape the image data to define training set
 training_set=reshape(Im,1,mn);
%  Execute lloyds algorithm
   [partition,codebook] = lloyds(training_set,initcodebook);
 % According to the results the imaga's grayscales
%  are substituded with the ones defined by the codebook
   Im2=Im;
   for i=1:N-1
       a=find(Im2<partition(i));
       Im(a)=round(codebook(i));
       Im2(a)=300;
   end
   a= Im>partition(N-1);
   Im(a)=round(codebook(N));
   end
```

Σχήμα 3.20 Μείωση των αποχρώσεων σε εικόνες με τον Lloyd-Max. Κβαντισμένη εικόνα με επτά μόνον αποχρώσεις του γκρι.