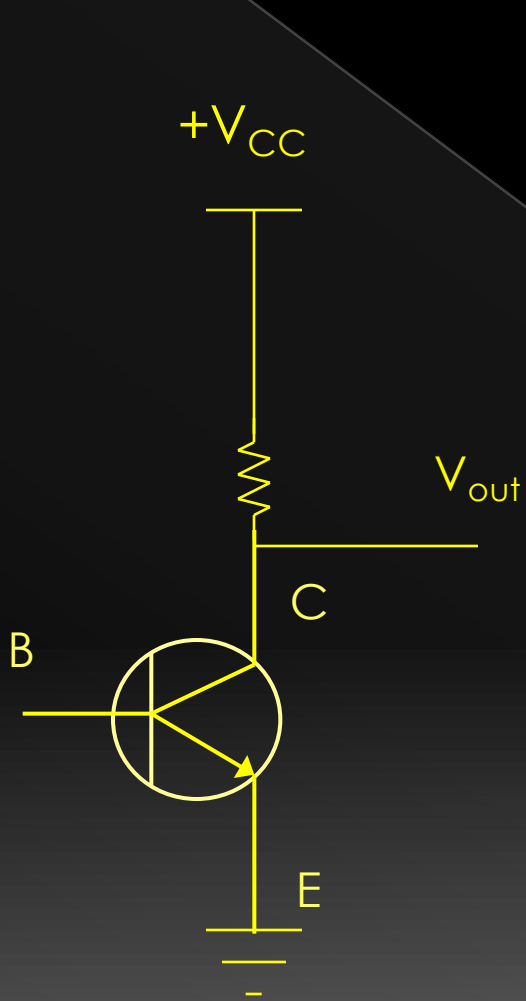


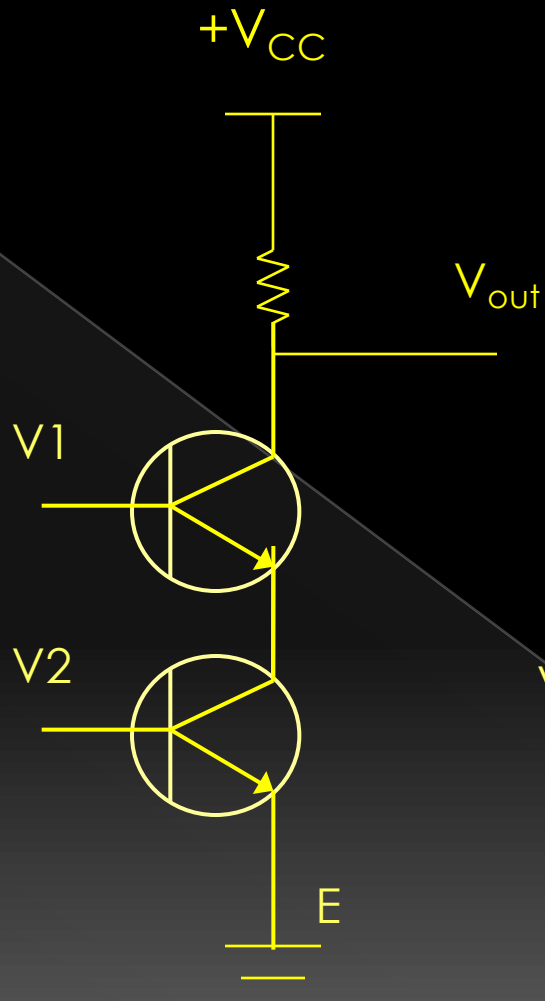
Κυκλώματα διακοππών

4^η διάλεξη στα πλαίσια του μαθήματος
Διακριτά Μαθηματικά

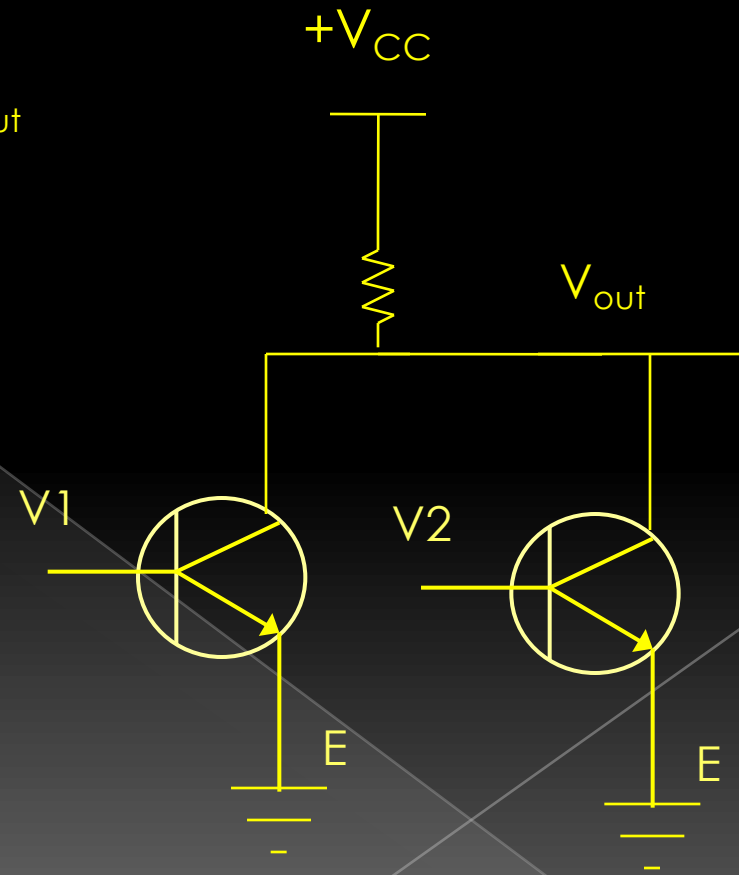
Ψηφιακές Λογικές Πύλες



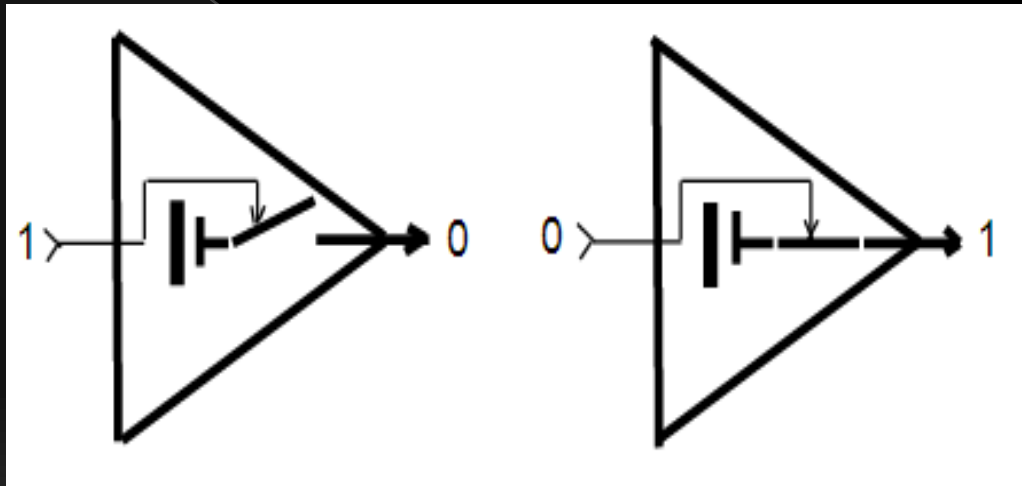
Πύλη NOT



Πύλη NAND

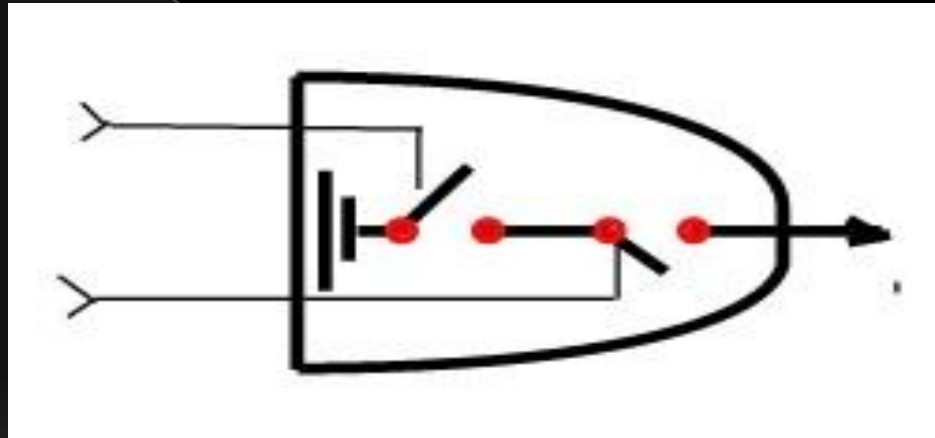


Πύλη NOR



Η πύλη **NOT** (αντιστροφέας)

Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα που μπορούν να εκτελέσουν τις βασικές πράξεις της άλγεβρας Boole ονομάζονται πύλες (gates)



Η πύλη ΚΑΙ

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

AND
ΚΑΙ



$$F = xy$$

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

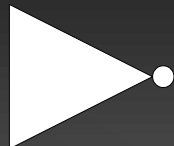
OR
Η



$$F = x+y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

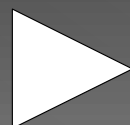
NOT
ΟΧΙ



$$F = x'$$

x	F
0	1
1	0

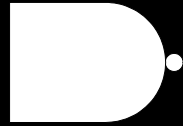
Απομονωτής
Buffer



$$F = x$$

x	F
0	0
1	1

NAND
ΟΧΙ ΚΑΙ



$$F = (xy)'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

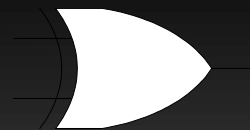
NOR
ΟΥΤΕ



$$F = (x+y)'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

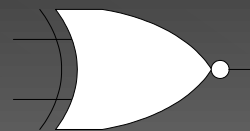
XOR
ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ
Η



$$F = xy' + x'y = x \oplus y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR
ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΟ
ΟΥΤΕ

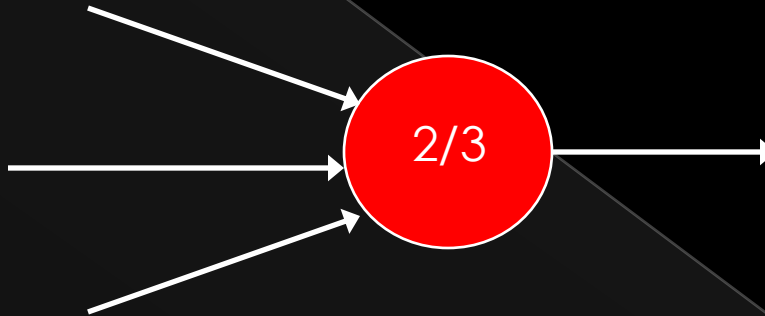


$$F = xy + x'y' = x \odot y$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Σχεδίαση απλών ψηφιακών κυκλωμάτων

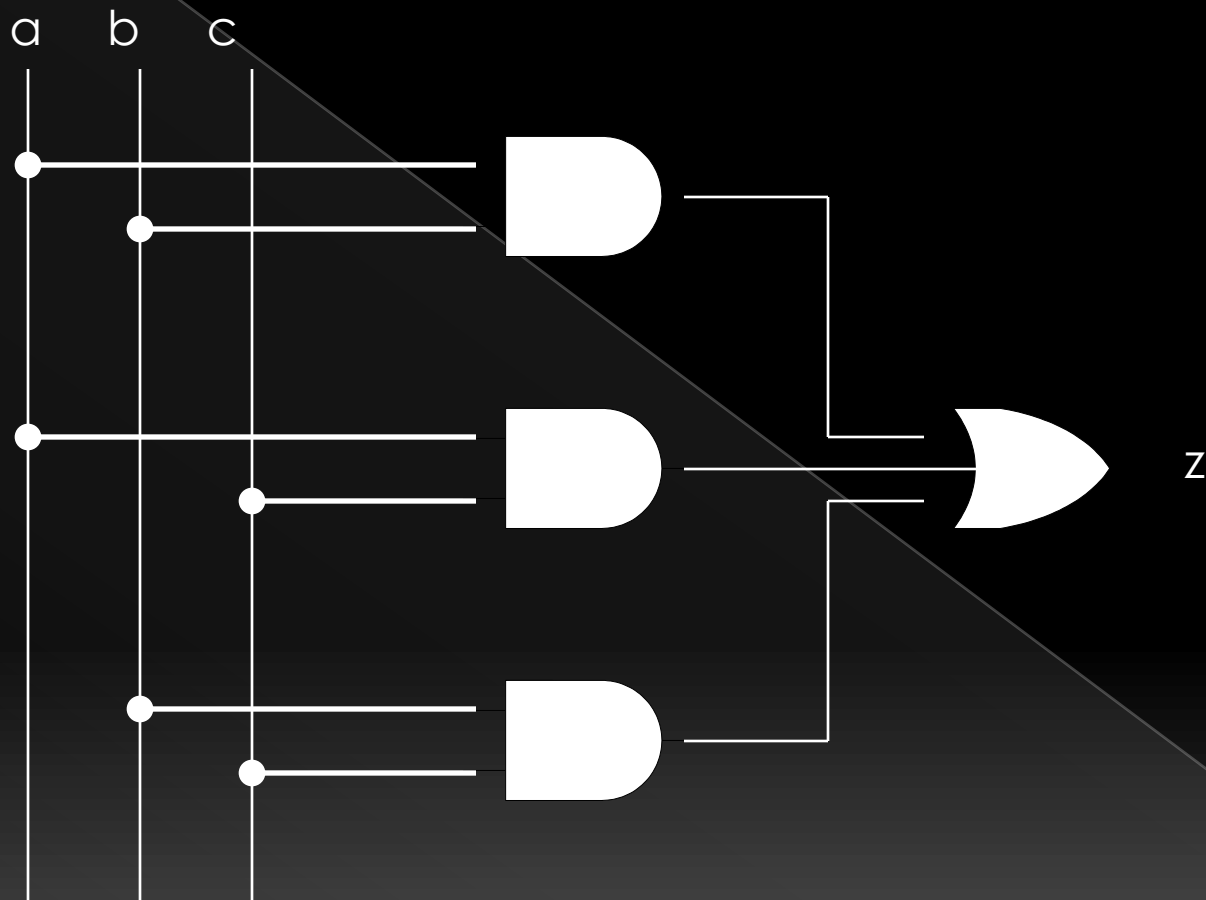
Να σχεδιαστεί ένα σύστημα πλειοψηφίας 2/3. Δηλαδή το σύστημα να έχει τρεις εισόδους και μία έξοδο και η έξοδος να γίνεται ένα μόνο όταν τουλάχιστον δύο εισοδοί είναι 1



Θα ισχύει:

$$z = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Υλοποίηση





ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΠΥΛΩΝ XOR ΚΑΙ XNOR

XOR		
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XNOR		
x	y	$x \odot y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΛΩΝ ΧΟR ΚΑΙ ΧΝΟR

Οι λογικές συναρτήσεις των πυλών ΧΟR και ΧΝΟR δύο εισόδων είναι:

$$x \oplus y = xy' + x'y$$

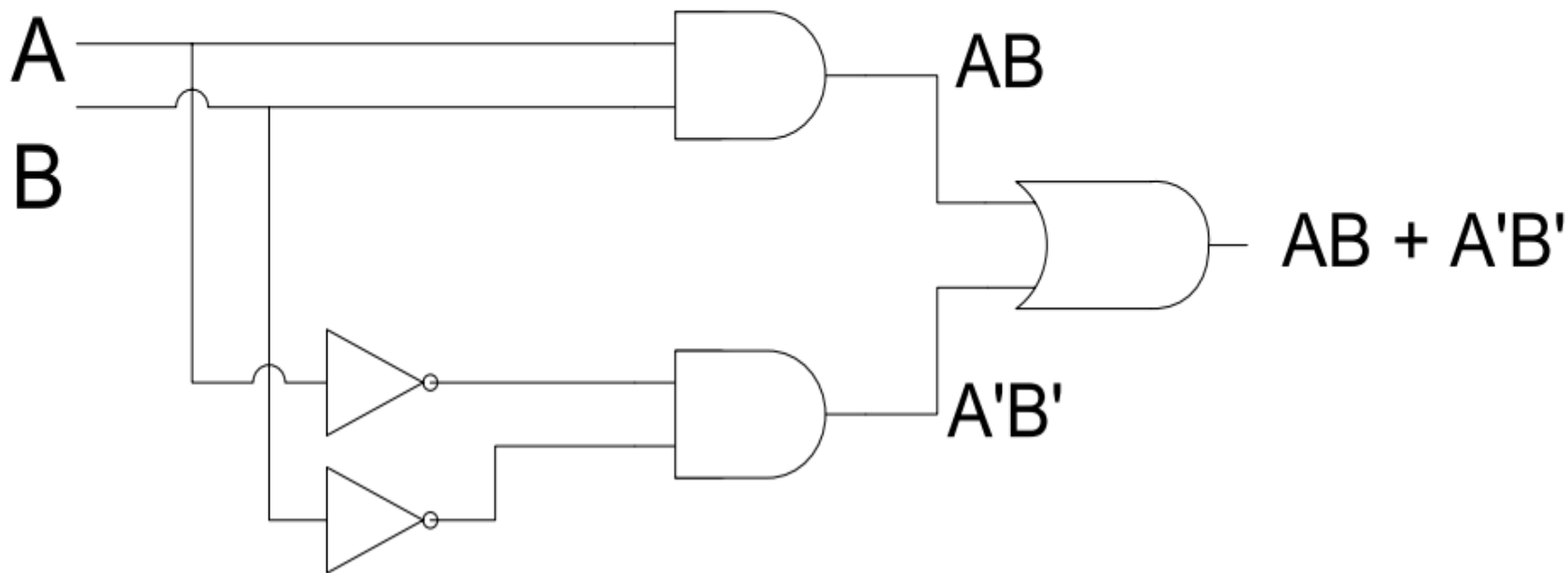
$$x \odot y = xy + x'y'$$

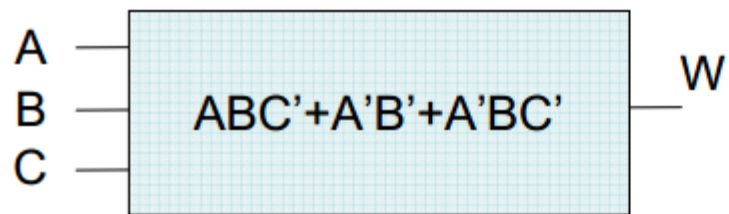
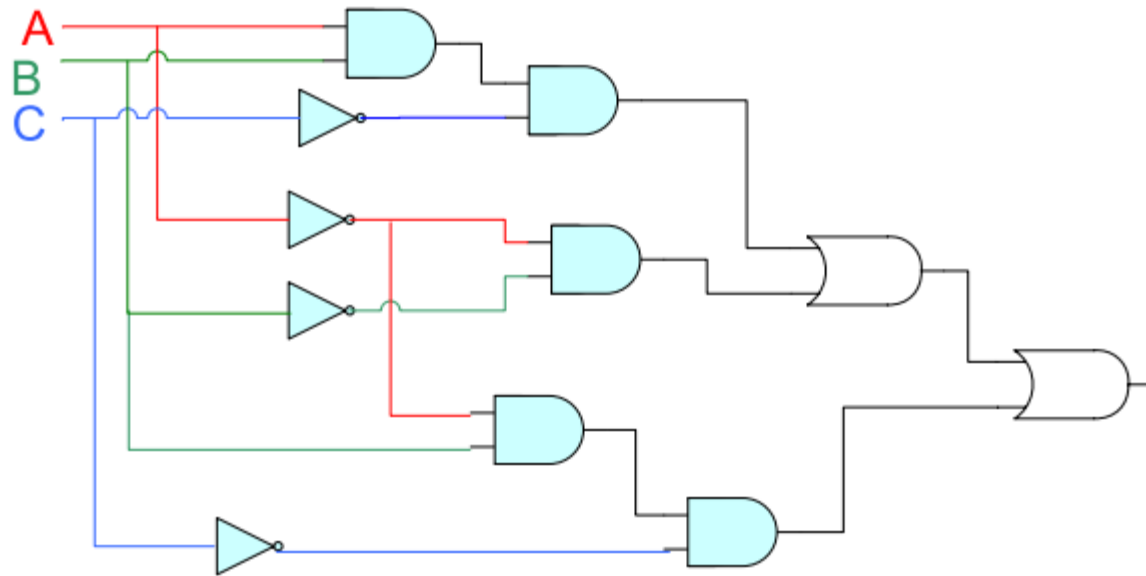
Οι λογικές συναρτήσεις των πυλών ΧΟR και ΧΝΟR δύο εισόδων συνδέονται με τη σχέση:

$$x \oplus y = (x \odot y)'$$

Μια παράσταση στην άλγεβρα Boole παριστάνεται από ένα κύκλωμα με χρήση λογικών πυλών.

Το παρακάτω κύκλωμα υλοποιεί την λογική συνάρτηση $F = AB + A'B'$.





- Να βρεθεί ο πίνακας αλήθειας για την παρακάτω λογική συνάρτηση:

$$W=ABC'+A'B'+A'BC'$$

A	B	C	A'	B'	C'	ABC'	A'B'	A'BC'	W
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

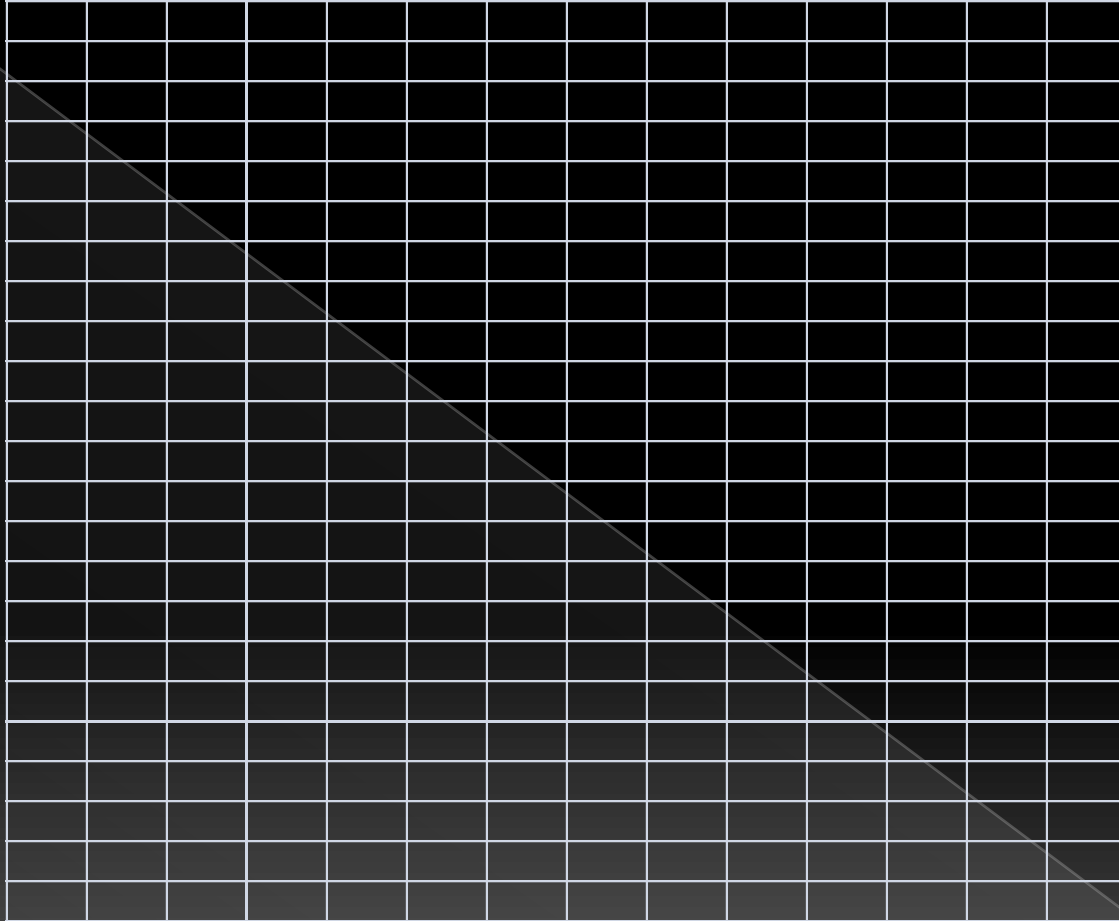
A	B	C	W
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Για την περιγραφή μιας συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων με δεδομένο τον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης:

1. Κάνουμε τον πίνακα αλήθειας σε σχέση με τις μεταβλητές της παράστασης
2. Για κάθε '1' προσθέτουμε τον αντίστοιχο όρο στην παράσταση ως εξής:
 1. Προστίθεται η αντίστοιχη μεταβλητή ως έχει αν έχει την τιμή 1
 2. Προστίθεται η άρνησή της, αν έχει την τιμή 0 στον πίνακα αλήθειας.

$$W = A'B'C' + A'BC + ABC' + AB'C$$

Να αποδειχτεί ότι
 $(xy) + (zw) \equiv (x+z)(x+w)(y+z)(y+w)$



Άλγεβρα Boole

- ◎ 4^η διάλεξη στα πλαίσια του μαθήματος
Διακριτά Μαθηματικά

Η Άλγεβρα Boole είναι μια αλγεβρική δομή ορισμένη στο σύνολο τιμών $B=\{0,1\}$ με δυο τελεστές $+$ (OR) και \cdot (AND) με τους ακόλουθους Πίνακες Αληθείας:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΒΟΟΛΕ (αξιώματα Huntington)

1. **Κλειστότητα**
 - α. ως προς την πράξη + (OR)
 - β. ως προς την πράξη · (AND)
2. **Ουδέτερα στοιχεία πράξεων**
 - α. $x+0=0+x=x$
 - β. $x\cdot 1=1\cdot x=x$
3. **Αντιμεταθετική ιδιότητα**
 - α. $x+y=y+x$
 - β. $x\cdot y=y\cdot x$
4. **Επιμεριστική ιδιότητα**
 - α. $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$
 - β. $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$
5. **Μοναδικό Συμπλήρωμα (NOT)**
 - α. $x+x'=1$
 - β. $x\cdot x'=0$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΒΟΟΛΕ

1. α. $x+x=x$
β. $x \cdot x=x$
2. α. $x+1=1$
β. $x \cdot 0=0$
3. $(x')'=x$
4. **Προσεταιριστική ιδιότητα**
α. $x+y+z=x+(y+z)=(x+y)+z$
β. $x \cdot y \cdot z=x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
5. **Θεώρημα απορρόφησης**
α. $x+x \cdot y=x$
β. $x \cdot (x+y)=x$
6. **Θεώρημα De Morgan**
α. $(x+y)'=x' \cdot y'$
β. $(x \cdot y)'=x'+y'$

Ταυτοτικοί νόμοι

$$x \vee x \equiv x \quad \text{και} \quad x \wedge x \equiv x$$

Αντιμεταθετικοί νόμοι

$$x \vee y \equiv y \vee x \quad \text{και} \quad x \wedge y \equiv y \wedge x$$

Προσεταιριστικοί νόμοι

$$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$$

Επιμεριστικοί νόμοι

$$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Νόμοι της απορρόφησης

$$x \vee (x \wedge y) \equiv x$$

$$x \wedge (x \vee y) \equiv x$$

Νόμοι του φραγμένου

$$x \wedge 0 \equiv 0 \quad \text{και} \quad x \vee 1 \equiv 1$$

επιπλέον, $x \vee 0 \equiv x$ και $x \wedge 1 \equiv x$

Νόμοι του συμπληρώματος

$$x \wedge x' \equiv 0 \quad \text{και} \quad x \vee x' \equiv 1$$

Νόμος της ενέλιξης

$$(x')' \equiv x$$

Νόμοι του De Morgan

$$(x \wedge y)' \equiv x' \vee y'$$

$$(x \vee y)' \equiv x' \wedge y'$$

Εφαρμόστε τον νόμο της
απορρόφησης για να διαγράψετε
όρους της πρότασης

$$(xy'zw) + (zxw) + (x'w) + (xz) + (wnx')$$

Να γραφεί η f σε Σ.Δ.Μ.

$$f = [\{ [y' + z) (x' y z) \} + z'] '$$

Τέσσερα δεν είναι ίσο με πέντε ,
ή τρία είναι το μισό του έξι
Και δεν ισχύει ότι τέσσερα δεν ισούται με πέντε
Και επτά είναι το μισό του δεκαπέντε.

