1.9 Συνδυασμοί

Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων ενός υποσυνόλου κ διακεκριμένων στοιχείων που ανήκουν σε ένα υπερσύνολο ν διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των $\nu-\kappa$ στοιχείων του υπερσυνόλου, αλλά ενδιαφέρει η θέση των κ στοιχείων του υπό θεώρηση υποσυνόλου. Αυτό σημαίνει ότι συμπλέγματα συγκεκριμένου πλήθους κ στοιχείων του υπερσυνόλου, που διαφέρουν ως προς τη θέση τους στο σύμπλεγμα, καταμετρούνται ως διαφορετικά στοιχεία του συνόλου των συμπλεγμάτων. Οι συνδυασμοί των κ στοιχείων από το δεδομένο σύνολο ν στοιχείων δίνονται με τη σχέση

$$C_{\kappa}^{\nu}=\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Οι διατάξεις των κ από τα ν στοιχεία αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των ν αυτών σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα.

Παράδειγμα 1.13

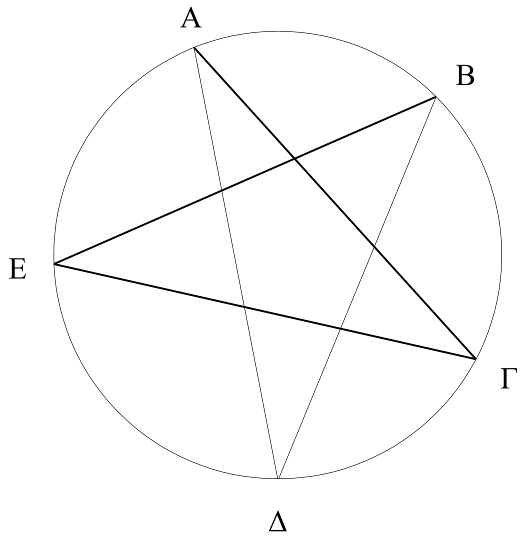
Αν στις πινακίδες κυκλοφορίας που μπορεί να δοθούν από το Υπουργείο Συγκοινωνιών, χρησιμοποιηθούν τα 14 γράμματα που είναι κοινά στο ελληνικό και λατινικό αλφάβητο, αλλά χωρίς επανάληψη, και δεδομένου ότι σε κάθε πινακίδα χρησιμοποιούνται 3 γράμματα, το σύνολο των πινακίδων αυτών έχει $14!/(3!)(11!)=364$ συνδυασμούς γραμμάτων. (Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει και σε πολλές περιπτώσεις παρατηρούμε πινακίδες με επανάληψη γραμμάτων, όπως ΝΒΝ κ.λ.π.).

Παράδειγμα 1.14

Πέντε διακεκριμένα σημεία επί της περιφερείας ενός κύκλου ορίζουν

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{20}{2}=10$$

τρίγωνα.



Σχήμα 1.2 Το Διώνυμο του Newton

Επειδή

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^{\nu} &= \\
&= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\dots(\alpha+\beta) = \\
&= (\alpha\alpha\dots\alpha)+(\alpha\alpha\dots\alpha\beta)+(\alpha\alpha\dots\beta\alpha)+\dots \\
&\quad +(\beta\alpha\dots\alpha\alpha\alpha)+\dots+(\alpha\alpha\dots\beta\beta)+\dots+(\beta\beta\dots\beta\beta)
\end{aligned}
$$

είναι προφανές ότι κάθε όρος του αναπτύγματος σε άθροισμα έχει ν παράγοντες.
Διακρίνουμε:

- 1 όρο με ν παράγοντες, που είναι όλοι τους α
- ν όρους με ν παράγοντες, όπου $\nu-1$ εξ αυτών είναι α και ένας μόνο είναι β
- περισσότερους όρους με $\nu-2$ παράγοντες α και 2 παράγοντες β
- …
- 1 όρο με ν παράγοντες, που είναι όλοι τους β

Παρατηρούμε ότι οι όροι των ν παραγόντων με κ α και $\nu-\kappa$ β έχουν τα α και τα β σε διάφορες θέσεις. Οι δυνατοί συνδυασμοί των κ α από ν συνολικά παράγοντες, απαριθμούν το σύνολο των όρων που έχουν κ ακριβώς α και τα υπόλοιπα $\nu-\kappa$ είναι β στη θέση των παραγόντων αυτών των όρων.
Γράφουμε λοιπόν ότι

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = (\alpha+\beta)^{\nu} = \sum_{i=0}^{\nu}\left(\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\kappa!}\right)\alpha^{\kappa}\beta^{\nu-\kappa}$$

Παρατηρούμε τη συμμετρία των διωνυμικών συντελεστών ως προς τον κεντρικό ή τους δύο κεντρικούς όρους (όταν ν άρτιο ή περιττό αντιστοίχως).

❍ Ορισμός 1.4

Προσέγγιση του *n*! κατά Stirling
Μία βοηθητική και ευρέως εφαρμοζόμενη προσεγγιστική σχέση για τον υπολογισμό του παραγοντικού «μεγάλων αριθμών» είναι η προσέγγιση του Stirling:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Μία ελαφρώς πιο ακριβής προσέγγιση είναι η ακόλουθη:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right)$$

αλλά στις περισσότερες των περιπτώσεων η διαφορά είναι μικρή. Αυτός ο επιπρόσθετος όρος μπορεί να συντελέσει στην αποτίμηση στο αν η προσέγγιση παρουσιάζει μεγάλο σφάλμα.

Η προσέγγιση του Stirling είναι επίσης χρήσιμη στον προσεγγιστικό υπολογισμό του λογαρίθμου ($\log$) του παραγοντικού ενός αριθμού, που βρίσκει εφαρμογή στον υπολογισμό της εντροπίας σχετικά με τη θεωρία της πολυπλοκότητας. Ο λογάριθμος του παραγοντικού ενός αριθμού n ισούται με

$$\ln N! = N \ln N - N + \ln\left(\sqrt{2\pi n}\right)$$

αλλά ο τελευταίος όρος μπορεί, και συνήθως παραλείπεται, ώστε μια λειτουργική προσέγγιση να είναι η εξής:

$$\ln N! = N \ln N - N$$

Θυμίζουμε ότι $N! = N(N-1)(N-2)...3\times 2\times 1$. Ενώ ο Stirling παρουσίασε την εξής υπέροχη σχέση:

$$N! \approx \left(\frac{2\pi}{N+1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{N+1}\left(N+1\right)^{(N+1)}$$

Αυτή η σχέση παρουσιάζει σφάλμα περίπου 8% για το $1!$, και $0{,}8\%$ για το $10!$ -και ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις για το $N!$, καθώς ο αριθμός N όλο και μεγαλώνει. Στην πραγματικότητα, το κλασματικό λάθος πλησιάζει αρκετά την ποσότητα $1/_{12N}$: αν η σχέση του Stirling πολλαπλασιασθεί με $1+1/_{12N}$, προκύπτει μια νέα βελτιωμένη και ταχύτερη σχέση (με σφάλμα ανάλογο του $1/_{N2}$).

Σημειώνεται εδώ ότι $0!=1$, επειδή ισχύει ότι $N!=N\times\left(N-1\right)!$, οπότε $(N–1)!= N!/_{N}$, επομένως συνεπάγεται ότι $0!=1$. (Για παράδειγμα: $3!=3\times2\times1=6$, $2!=2=\frac{3!}{3}$, $1!=1=\frac{2!}{2}$, άρα $0!=\frac{1!}{1}=1$). Αν εφαρμόσουμε τη σχέση σε αρνητικούς ακέραιους, παρατηρούμε ότι $\left(-1\right)!=\frac{1}{0}=\infty$, $\left(-2\right)!=\frac{(-1)!}{-1}=\infty$, $\left(-3\right)!=\frac{(-2)!}{-2}=\frac{\infty}{2}=\infty$.

Δηλαδή, $N!$ είναι άπειρο, όταν ο αριθμός N είναι αρνητικός ακέραιος. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η σχέση για τον αριθμό $\left(z-1\right)!$ (όπου $z=N+1$) έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, ακριβώς όπως οι σειρές της ποσότητας $1/z$, ιδιότητα που οφείλεται στα παραπάνω άπειρα μεγέθη. Μια μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης του $1/z$ θα έπρεπε να περιλαμβάνει μερικές αρνητικές τιμές οι οποίες βρίσκονται κοντά στο μηδέν -που συνεπάγεται και μεγάλους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς. Από τότε που αυτή η συνάρτηση με το παραγοντικό $\left(z-1\right)!$ (γνωστή και ως Gamma συνάρτηση) έχει ως αποτέλεσμα το άπειρο για όλους τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, δεν είναι δυνατό να περιγραφεί από συγκλίνουσες σειρές. Δεν μπορεί να συγκλίνει για 10!, διότι δεν πρέπει να συγκλίνει για $\left(-12\right)!$.

Παράδειγμα 1.15

Υπολογίστε το $50!$.

Για μεγάλο n ισχύει $n!\approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, άρα $50!\approx sqrt\left(2\pi 50\right)\times 50^{50}\times e^{-50}=N$.

Χρησιμοποιώντας δεκαδικούς λογάριθμους, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\log N &= \log\left[sqrt\left(100\pi\right)\times 50^{50}\times e^{-50}\right]= \\ &=\frac{1}{2}\times\log 100+\frac{1}{2}\times\log\pi+50\log 50-50\log e= \\ &=64{,}4836\end{aligned}$$

οπότε προκύπτει ότι $N=3{,}04\times10^{64}$