Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός αριθμού διαφορετικών αποτελεσμάτων πειράματος (με συνδυαστικά επιχειρήματα)
  - Πείραμα: διαδικασία που παράγει πεπερασμένο σύνολο αποτελεσμάτων
  - Πληθικός αριθμός συνόλου A: P(A)=n
  - Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου $P[\Delta(A)]=2^n$.

Κανόνας Γινομένου

- Έστω δυο πειράματα A και B με P(A)=n & P(B)=m
- Τότε, αν A και B ανεξάρτητα (υπό την έννοια ότι τα αποτελέσματα του A δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα του B, και $A \times B$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των A και B, θα είναι $P(A \times B) = P(A) \bullet P(B)$
- Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας (τριών γραμμάτων και τεσσάρων αριθμών του δεκαδικού συστήματος) οχημάτων μπορεί να εκδώσει το Υπουργείο Μεταφορών;

Σχέσεις

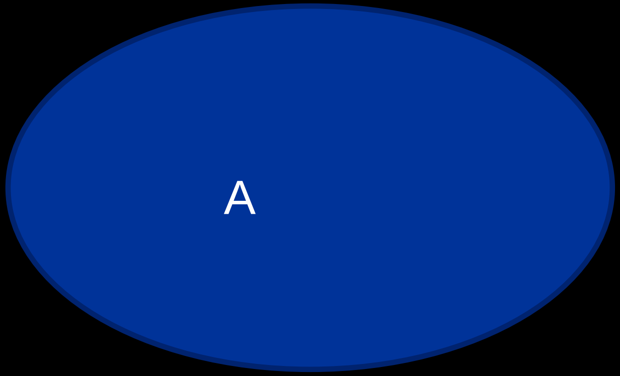
- Διμελείς
  - Ανακλαστικές
    - $2^{n(n-1)}$
  - Συμμετρικές
    - $2^{n(n+1)/2}$
  - Αντισυμμετρικές
    - $2^n 3^{n(n-1)}$
  - Αλυσίδες (σχέσεις ολικής διάταξης)
    - $n!$
  - Όλες μαζί
    - $(2^n)^n$

Κανόνας Αθροίσματος

- Έστω δυο πειράματα Α και Β με P(A)=n & P(B)=m
- Αν Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους τότε:
  - P(AUB)=P(A)+P(B)

Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

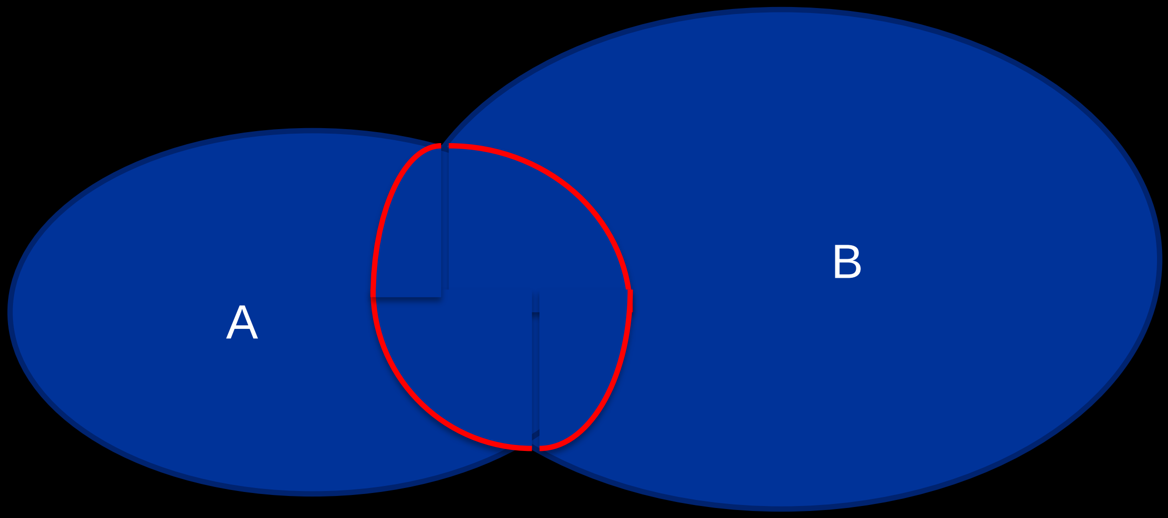
- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
- Παραδείγματα:



Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

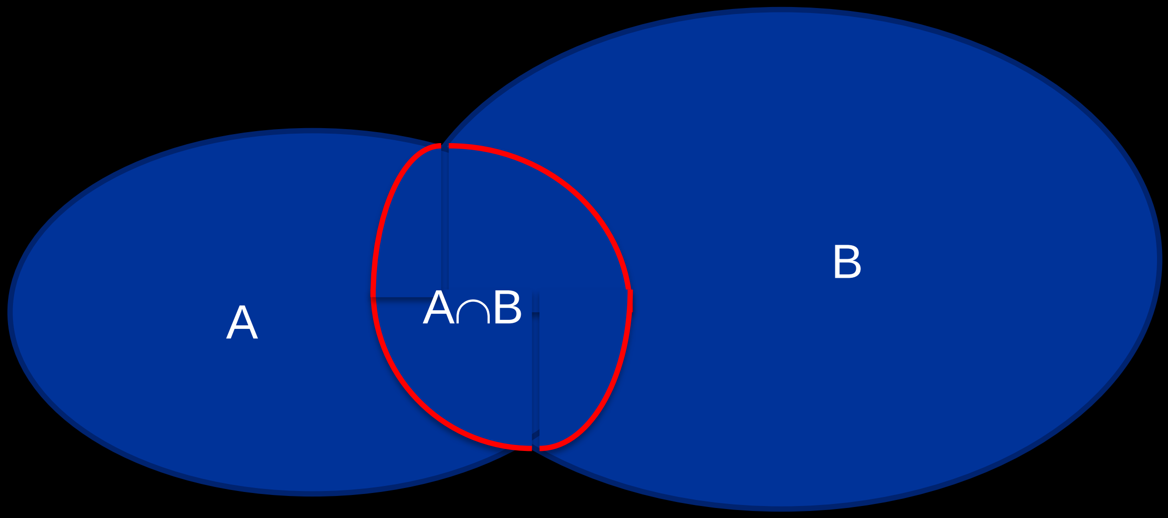
- $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- Παραδείγματα:

A



Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

- $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
- Παραδείγματα:



Απεικονίσεις, συναρτήσεις και εγκλεισμοί

- Θεωρείται η έννοια της συναρτήσεως γνωστή
- Αν P(A)>P(B), τότε δεν υπάρχει 1:1 απεικόνιση του A στο B
- Για κάθε απεικόνιση f από το A στο B υπάρχουν περισσότερα από k-[P(A)/P(B)] στοιχεία, με k=P(A)-P(B)
- Να παρουσιάσετε παραδείγματα:

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

- Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που ο καθο-ρισμός τους ή ο σχηματισμός τους μπορεί να θεωρηθεί ότι γίνεται σε m διαδοχικές φάσεις, τέτοιες ώστε, σε οποιαδήποτε φάση το πλήθος των δυνατοτήτων που απαριθμούνται να είναι σταθερό, ανεξάρτητα από το τι συνέβη στις προηγούμενες φάσεις, ισούται με:

$$n = n_1 * n_2 * \ldots * n_k$$

όπου , n_k, (κ=1, 2, , … , m)

- η απαρίθμηση των δυνατοτήτων στην k φάση.

Παράδειγμα

- Οι πινακίδες των ιδιωτικών αυτοκινήτων στην Ελλάδα σχηματίζονται από τρία γράμματα του Ελληνικού αλφάβητου που έχουν αντίστοιχά τους στο Λατινικό και από 4 αριθμητικά ψηφία που σχηματίζουν τετραψήφιο αριθμό.
- Πόσα το πολύ ιδιωτικά αυτοκίνητα μπορούν να κυκλοφορούν στην Ελλάδα;
- Πόσα το πολύ από αυτά θα έχουν διαφορετικά ψηφία;
- Πόσα το πολύ θα έχουν όλα τα σύμβολα διαφορετικά;
- Πόσα το πολύ αρχίζουν από Μ ή Ν;

Παράδειγμα (συνέχεια)

1ο γράμμα	2ο γράμμα	3ο γράμμα	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	4ο ψηφίο	ΘΑΑ
14	14	14	9	10	10	10	24 696 000
14	14	14	9	9	8	7	12 446 784
14	13	12	9	9	8	7	9 906 624
2	14	14	9	10	10	10	3 528 000

Παράδειγμα

5. Πόσοι περιττοί τριψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 3, 6, 7 και 8, όταν :
(α) μπορούν να έχουν και όμοια ψηφία,
(β) έχουν όλα τα ψηφία διαφορετικά.

(α)

1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	ΘΑΑ
5	5	3	$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$
Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 1η θέση	Διότι και τα 5 ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στη 2η θέση	Διότι μόνο τα 3 από τα ψηφία που δόθηκαν μπορούν να είναι στην 3η θέση	

(β)

3ο ψηφίο	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	ΘΑΑ
3	4	3	$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
Διότι 3 από τα ψηφία είναι περιττοί	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ψηφίο που επιλέξαμε στην προηγούμενη φάση	Διότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία που επιλέξαμε στις προηγούμενες φάσεις	

Β΄ τρόπος

	1ο ψηφίο	2ο ψηφίο	3ο ψηφίο	ΘΑΑ
άρτ.–άρτ.–περιτ.	2	1	3	6
άρτ.–περιτ.–περιτ.	2	3	2	12
περιτ.–άρτ.–περιτ.	3	2	2	12
περιτ.–περιτ.–περιτ.	3	2	1	6
			Σύνολο	36

Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης

Το πλήθος n των στοιχείων ενός συνόλου που έχει διαμεριστεί σε m ξένες μεταξύ τους κατηγορίες, ισούται με :

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

όπου n_k , $(k = 1, 2, \ldots, m)$, το πλήθος στοιχείων στην k κατηγορία.

Μουσιάδης Πολυχρόνης - Τμήμα Μαθηματικών ΑΠΘ

Ασκήσεις

- Πόσα χρήματα στοιχίζει ένα σύστημα στο ΠΡΟΠΟ με μία τριπλή και τρεις διπλές παραλλαγές (και οι υπόλοιποι αγώνες στάνταρ);
- Πόσα μονοπάτια μήκους 3 υπάρχουν σε ένα μοναδιαίο κύβο, που να συνδέουν μια κορυφή του με αυτήν που βρίσκεται διαγωνίως απέναντι;
- Η αίθουσα ενός κινηματογράφου έχει 6 πόρτες. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να μπει από μια πόρτα και να βγει από άλλη;
- Πόσοι ακέραιοι μεγαλύτεροι από 53000 έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά και κανένα από τα ψηφία του δεν είναι 8 ή 9;
- Αν υπολογιστεί το 52! πόσα διαδοχικά μηδενικά θα εμφανιστούν στο τέλος;

Ασκήσεις

- Αν υπολογιστεί το 52! πόσα διαδοχικά μηδενικά θα εμφανιστούν στις τελευταίες θέσεις του γινομένου;
- Μία βιβλιοθήκη έχει 50.000 βιβλία που πρόκειται να μηχανογραφηθούν. Ο βιβλιοθηκάριος σκέφθηκε να δώσει σε κάθε βιβλίο έναν κωδικό που να αποτελείται από 2 γράμματα και τρία ψηφία. Υπάρχουν αρκετοί κωδικοί ώστε να κωδικοποιηθούν όλα τα βιβλία με διαφορετικούς κωδικούς;
- Παίρνουμε τυχαία τρία από τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες είναι οι διαφορετικές τριάδες στις οποίες δεν εμφανίζονται διαδοχικά γράμματα;
- Πόσοι ακέραιοι μικρότεροι από 1 000 000, περιέχουν το ψηφίο 2;

- Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 100 αντικείμενα σε 4 κουτιά ;

Κύριες μορφές Συμπλεγμάτων

- Μεταθέσεις
- Διατάξεις : Αν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης
- Διατάξεις με επανατοποθέτηση
- Συνδυασμοί: Αν δεν ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης

Να αναγνωρίσετε τη φύση του συμπλέγματος

- Ρίχνουμε διαδοχικά δύο ζάρια και κατά-γράφουμε τις ενδείξεις τους με τη σειρά που εμφανίστηκαν. Πόσα διαφορετικά ζεύγη ενδείξεων είναι δυνατό να εμφανιστούν αν δεν τεθεί κανένας περιορισμός;

Να αναγνωρίσετε τη φύση του συμπλέγματος

- Ρίχνουμε διαδοχικά δύο ζάρια και κατά-γράφουμε τις ενδείξεις τους με τη σειρά που εμφανίστηκαν. Πόσα διαφορετικά ζεύγη ενδείξεων είναι δυνατό να εμφανιστούν αν τα ζάρια έχουν διαφορετική ένδειξη;

Να αναγνωρίσετε τη φύση του συμπλέγματος

- Τέσσερεις αερομεταφορείς (α, β, γ, δ) συνδέουν την Αθήνα με το Άμστερνταμ και τρεις (Α, Β, Γ) το Άμστερνταμ με Βοστώνη. Με πόσες
- διαφορετικές διαδρομές μπορεί κάποιος να πετάξει από την Αθήνα στη Βοστώνη μέσω Άμστερνταμ;

Μεταθέσεις (Permutations)

- Μεταθέσεις n διαφορετικών αντικειμένων ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία σειρά επάνω σε μία ευθεία γραμμή. Το πλήθος τους
- συμβολίζεται με P(n, n)

Απλές Μεταθέσεις

- Είναι ο αριθμός των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων διακεκριμένων στοιχείων. Οι μεταθέσεις αναφέρονται σε συμπλέγματα όπου έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των σημείων και τα στοιχεία αυτά δεν επαναλαμβάνονται μέσα στο σύμπλεγμα. Οι μεταθέσεις στοιχείων δίνονται από τη σχέση .
- $P(n, n)=n!$

Κυκλικές Μεταθέσεις

Όταν το σύμπλεγμα έχει κυκλική δομή, δεν παρατηρείται αρχή και τέλος, σε αντίθεση με τα γραμμικά συμπλέγματα. Στην περίπτωση αυτή, το πλήθος των συμπλεγμάτων συμβολίζεται P^{o}_{ν} και είναι $P^{o}_{\nu} = (\nu-1)!$.

Παράδειγμα : Με πόσους τρόπους 4 αγόρια και 4 κορίτσια μπορούν να καθίσουν :

(1) εναλλάξ σε κυκλικό τραπέζι οκτώ θέσεων;
(2) εναλλάξ σε «ουρά»;

Παράδειγμα : Πόσες λέξεις δημιουργούνται με τα γράμματα της λέξης "επαναληψη" ; (Θέμα Σεπτεμβρίου 2014)

Ασκήσεις

- Να υπολογισθεί το πλήθος των τρόπων που ***n*** ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε (α) ευθύγραμμο ή (β) σε κυκλικό τραπέζι, έτσι ώστε σε ***k*** συγκεκριμένα ανδρόγυνα, οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.
- Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε σειρά έξι άτομα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, έτσι ώστε
- α) ο Β να μην προηγείται του Ζ,
- β) ο Β να είναι ακριβώς μπροστά από τον Ζ,
- γ) ο Ζ να είναι ακριβώς μπροστά από τον Β,
- δ) ο Β και ο Ζ να είναι μαζί;

Μεταθέσεις σε ομάδες

- Μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες ιδίων αντικειμένων με πληθικούς αριθμούς $n_1, n_2, \ldots, n_k$
- $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k)=n!/(n_1!n_2!...n_k!)$
- **Παράδειγμα**
- Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους 20 νεοσύλλεκτοι μπορούν να τοποθετηθούν σε 4 διαφορετικά σώματα στρατού, 5 σε κάθε σώμα;
- Έχουμε n=20 και και $k_1=k_2=k_3=k_4=5$ άρα υπάρχουν $20!(5!)^4$ διαφορετικοί τρόποι.

Ασκήσεις

- Κατά πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε ένα ράφι 3 βιβλία Γαλλικά, 5 Ελληνικά και 6 Γερμανικά αν α) είναι διαφορετικών συγγραφέων β) τα βιβλία κάθε γλώσσας είναι του ίδιου συγγραφέα;

- Πόσοι είναι οι 9-ψήφιοι αριθμοί του δυαδικού συστήματος αρίθμησης (με ψηφία 0 και 1), που έχουν 4 μηδενικά και 5 μονάδες; Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από 1 και τελειώνουν σε 0;

Διατάξεις

- Διατάξεις P(n,k): k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
- P(n,k) = αριθμός τρόπος να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα $P(n,k)=n(n-1)(\ldots(n-k+1)=n!/(n-k)!$
- Διατάξεις n αντικειμένων ανά k, (kn), ονομάζονται οι διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τα k από τα n αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε το ένα μετά το άλλο σε μία γραμμή, διατηρώντας τη σειρά επιλογής τους.
- Αν επιτρέπεται επανάληψη των ψηφίων τότε έχουμε επαναληπτικές διατάξεις και το πλήθος τους συμβολίζεται με E^m_κ
- Αν δεν ενδιαφέρει η σειρά των k αντικειμένων που επιλέξαμε από τα n, τότε έχουμε αντίστοιχα συνδυασμούς των n ανά k, που πλήθος τους συμβολίζεται ή και επαναληπτικούς συνδυασμούς των n ανά k που πλήθος τους συμβολίζεται $C^n{}_k$

Αναλυτική προσέγγιση του συμπλέγματος

- Το πρώτο στοιχείο μιας διάταξης στοιχείων που επιλέγεται από σύνολο στοιχείων, μπορεί να επιλεγεί με τρόπους. Όταν επιλεγεί το πρώτο στοιχείο, το δεύτερο μπορεί να επιλεγεί από τα υπόλοιπα στοιχεία κατά τρόπους. Το τρίτο στοιχείο μπορεί να επιλεγεί κατά τρόπους και τελικά το στοιχείο μπορεί να επιλεγεί κατά τρόπους. Η εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής δίνει τότε την προηγούμενη σχέση του .

Διατάξεις με Επανάληψη

- Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τη χρήση κ διακεκριμένων προς άλληλα στοιχείων σε συμπλέγματα m στοιχείων. Η χρήση κάθε στοιχείου επαναληφθεί μέχρι και m φορές και για το λόγο αυτό αναφερόμαστε σε επαναληπτική διαδικασία. Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων κ από m στοιχεία ενός συνόλου προσδιορίζεται με τη σχέση
- $E^m_\kappa = m^\kappa$.

- Παράδειγμα

Συνδυασμοί

- Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων ενός υποσυνόλου κ διακεκριμένων στοιχείων που ανήκουν σε ένα υπερσύνολο ν διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των ν-κ στοιχείων του υπερσυνόλου αλλά ενδιαφέρει η θέση των κ στοιχείων του υπό θεώρηση υποσυνόλου. Αυτό σημαίνει ότι συμπλέγματα συγκεκριμένου πλήθους κ στοιχείων του υπερσυνόλου, που διαφέρουν ως προς τη θέση τους στο σύμπλεγμα, καταμετρούνται ως διαφορετικά στοιχεία του συνόλου των συμπλεγμάτων. Οι συνδυασμοί των κ στοιχείων από το δοσμένο σύνολο ν στοιχείων, δίνονται με τη σχέση

$$C_{\kappa}^{\nu} = \binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Συνδυασμοί

- C(n,k)=P(n,k)/k!
- Είναι το σύνολο των συμπλεγμάτων που μπορεί να προκύψουν από τις εναλλαγές των θέσεων ενός υποσυνόλου διακεκριμένων στοιχείων που ανήκουν σε ένα υπερσύνολο διακεκριμένων στοιχείων. Εδώ δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των στοιχείων του υπερσυνόλου, αλλά ενδιαφέρει η θέση των στοιχείων του υπό θεώρηση υποσυνόλου. Αυτό σημαίνει ότι συμπλέγματα συγκεκριμένου πλήθους στοιχείων του υπερσυνόλου, που διαφέρουν ως προς τη θέση τους στο σύμπλεγμα, καταμετρούνται ως διαφορετικά στοιχεία του συνόλου των συμπλεγμάτων.
- Παράδειγμα
- Παράδειγμα

Συνδυασμοί με επανάληψη στοιχείων

- C(n,k)=P(n+k-1, k)
- Ένας συνδυασμό με επαναλήψεις των ***k*** στοιχείων από ***n*** του συνόλου S δίδεται από μία αλληλουχία από ***k*** (όχι απαραίτητα διακριτά στοιχεία του S), όπου η σειρά δεν λαμβάνεται υπόψη: π.χ. δύο ακολουθίες των οποίων η μία μπορεί να είναι που λαμβάνεται από την άλλη με μετάθεση των όρων που ορίζουν το ίδιο πολυσύνολο.

Συνδυασμοί (συνέχεια)

- Με άλλα λόγια, είναι ο αριθμός των τρόπων να ληφθούν k στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχείων, που επιτρέπουν μεν την εις διπλούν (δηλαδή, με αντικατάσταση) λήψη, αλλά δεν λαμβάνουν υπόψη την διαφορετική διάταξη (π.χ. {2,1,2} = {1,2,2}).
- Παράδειγμα
- Παράδειγμα

- ΠΑΡΑΠΟΜΠΗ ΣΤΟ 2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΟΥ ΗΛ. ΒΙΒΛΙΟΥ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Όνομα	Οι κ-άδες αποτελούνται από:	Πλήθος:
Διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ	Διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$(\nu)_\kappa = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$
Διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ με επανάληψη	Διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	ν^κ
Συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ	Μη διατεταγμένα, διαφορετικά στοιχεία	$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$
Συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ με επανάληψη	Μη διατεταγμένα, όχι απαραίτητα διαφορετικά στοιχεία	$\binom{\nu+\kappa-1}{\kappa} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{\kappa!(\nu-1)!}$

Όνομα	Οι ν-άδες αποτελούνται από:	Πλήθος:
Μεταθέσεις των ν στοιχείων σε ευθεία	ν διαφορετικά στοιχεία	ν!
Μεταθέσεις των ν στοιχείων σε ευθεία με επανάληψη	K_1 από τα ν όμοια, K_2 από τα ν όμοια και διαφορετικά από πριν, K_3 από τα ν όμοια και διαφορετικά από πριν, ... K_λ από τα ν όμοια και διαφορετικά από πριν, με $K_1+K_2+\ldots K_\lambda=\nu$	$\frac{\nu!}{K_1!\cdot K_2!\cdots\cdot K_\lambda!}$
Μεταθέσεις των ν στοιχείων σε κύκλο	ν διαφορετικά στοιχεία	(ν-1)!

Όνομα	Πλήθος:
Διαμέριση (ή μοιρασιά) των ν στοιχείων με συγκεκριμένη σειρά σε λ ομάδες με K_1, K_2, …K_λ στοιχεία αντίστοιχα ($K_1+K_2+\ldots K_\lambda=\nu$)	$\frac{\nu!}{K_1!\cdot K_2!\cdots\cdot K_\lambda!}$
Διαμέριση (ή μοιρασιά) των ν στοιχείων με συγκεκριμένη σειρά σε λ ομάδες με K_1, K_2, …K_λ στοιχεία αντίστοιχα ($K_1+K_2+\ldots K_\lambda=\nu$), **όταν η διάταξη των ομάδων δεν έχει σημασία**	$\frac{\nu!}{\lambda!\cdot K_1!\cdot K_2!\cdots\cdot K_\lambda!}$

ΛΟΓΙΚΗ & ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

1. Διακόπτες & Πύλες
2. Κυκλώματα & Προτάσεις
3. Άλγεβρα του Boole
4. Ελάχιστες Μορφές

- **ΘΕΜΑ 1ο /1 :** Με πόσους τρόπους μπορείτε να οργανώσετε 4 ομάδες των 4 ατόμων από 16 διαθέσιμα άτομα;
- **Απάντηση:** C(16, 4)*C(12, 4)*C(8, 4)*C(4,4)

- **ΘΕΜΑ 3ο /1 :** Πόσες διαφορετικές λέξεις μπορείτε να παράγετε με τα γράμματα της λέξης «επανάληψη»;
- **Answer:** 9!/2!2!

- **ΘΕΜΑ 2ο /1 :** Πόσες τετραψήφιους αριθμούς του τριαδικού συστήματος αρίθμησης μπορείτε να παράγετε αν τεθεί ο περιορισμός να περιέχουν τουλάχιστον δυο 1;
- **Απάντηση:** Το σύνολο των τετραψήφιων αριθμών του τριαδικού συστήματος είναι
- $3*3*3*3 = 3^4 = 81$
- Το σύνολο των τετραψήφιων αριθμών του τριαδικού συστήματος με λιγότερα από δυο 1 είναι εκείνα με ένα 1 και εκείνα με κανένα 1. Αυτά είναι :
- Κανένα 1 : C(4, 0) + C(4, 1) + C(4, 2) + C(4, 3) + C(4, 4) = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16
- Μοναδικό 1 : 4 διαφορετικές θέσεις (τοποθετήσεις) για το 1 **επί**
- C(3, 0) + C(3, 1) + C(3, 2) + C(3, 2) για το 0 (τις λοιπές θέσεις καταλαμβάνει το 2. Συνολικά, 24 θεσεις.
- Αποτέλεσμα 16 + 24 = 40 μη επιθυμητές καταστάσεις
- Άρα η απάντηση είναι 81 – 40 = 41 τετραψήφιους αριθμούς, που διαθέτουν τις περιγραφείσες ιδιότητες, μπορεί να απαριθμήσουμε .