Το 20% των σπιτιών έχει σκύλο ← Επιτυχία/αποτυχία Διωνυμική

Αν διαλέξω τυχαία 10 σπίτια ποια η πιθανότητα:

i) ακριβώς τρία σπίτια να έχουν σκύλο

ii) περισσότερα από 2 σπίτια να έχουν σκύλο.

Το πείραμα ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $p = 20\% = 0,2$ $\quad n = 10$ $\quad X \sim B(0{,}2, 10)$ ($p$, $n$)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Τύπος διωνυμικής κατανομής

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

i)
$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot (1-0{,}2)^{10-3}$$
$$= \frac{10!}{3!(10-3)!} 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7$$
$$= \frac{10!}{3!\,7!} 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7$$ ← υπολογισμός
$$= 120 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}209$$
$$= 0{,}2$$
$$= 20\%$$

$>$ περισσότερο

$\geq$ τουλάχιστον

ii) $P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + \dots + P(X=10)$

Σωστό αλλά χρονοβόρο!!!

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)]$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$
$$= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot (1-0{,}2)^{10-0} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot (1-0{,}2)^{10-1} \dots$$
$$- \binom{10}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot (1-0{,}2)^{10-2}$$

Ύψος βροχής μία περιοχή ακολουθεί κανονική κατανομή με διάμεσο $\delta = 100$ cm και διακύμανση 400 cm²

Ποια η πιθανότητα να βρείτε:

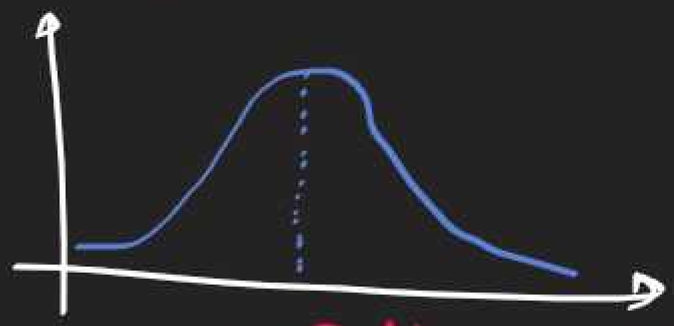
i) λιγότερο από 120 cm

ii) μεταξύ 80 και 120 cm

iii) περισσότερο από 110 cm

iv) ακριβώς 70 cm

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



$\mu = \delta = M_0$

μέση τιμή = διάμεσος = επικρατούσα τιμή

Στην κανονική κατανομή η μέση τιμή ισούται με τη διάμεσο άρα

$\mu = 100$

Διακύμανση 400 $\Leftrightarrow \sigma^2 = 400 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{400} \Leftrightarrow \sigma = 20$

άρα $X \sim N(100, 20^2)$

$\boxed{\frac{X-\mu}{\sigma} = Z}$ έχω τιμές από πίνακες

i) $P(X < 120) =$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{120-\mu}{\sigma}\right) =$

$P\left(Z < \frac{120-100}{20}\right) =$

$P\left(Z < \frac{20}{20}\right) =$

ψάχνω πίνακα $P(Z < 1{,}00) =$

$0{,}8413$

ii) $P(80 < X < 120) =$

$P\left(\frac{80-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{120-\mu}{\sigma}\right) =$

$P\left(\frac{80-100}{20} < Z < \frac{120-100}{20}\right) =$

$P\left(\frac{-20}{20} < Z < \frac{20}{20}\right) =$

$P(-1 < Z < 1) =$

$P(Z < 1) - P(Z < -1) =$

$0{,}8413 - 0{,}1587 =$

$0{,}6826$

iii) $P(X > 110) =$

$1 - P(X \leq 110) =$

$1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{110-\mu}{\sigma}\right) =$

$1 - P\left(Z \leq \frac{110-100}{20}\right) =$

$1 - P(Z \leq 0{,}50) =$

$1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

iv) $P(X = 70) = 0$

Επειδή X συνεχής μεταβλητή

Ισχύει $\underbrace{P(A) = 2P(B) = 4P(A \cap B)}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

3

Υπολογίστε: $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$

Ενδεχόμενα $A, B$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα?

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{8} = 4P(A \cap B) + 2P(A \cap B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{8} = 5 \cdot P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{8} = P(A \cap B)}$$

άρα:

$$\begin{cases} 2P(B) = 4P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \frac{\cancel{2}P(B)}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(B) = 2P(A \cap B) \end{cases}$$

$$\boxed{P(A)} = 4 \cdot P(A \cap B) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P(B)} = 2 \cdot P(A \cap B) = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Τύπος για δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\right) = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \left(\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$A, B$ ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\left.\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{8} \end{aligned}\right\}$$

άρα ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

άρα $A, B$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

④

Μία παραγωγή εργοστασίου προέρχεται κατά 70% από Μηχανή A και κατά 30% από Μηχανή B.

$P(A) = 70\% = 0{,}7$

$P(B) = 30\% = 0{,}3$

Η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό αν προέρχεται από Μηχανή A είναι 5%.

$P(E|A) = 5\% = 0{,}05$

Η πιθανότητα ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό αν προέρχεται από Μηχανή B είναι 10%.

$P(E|B) = 10\% = 0{,}10$

Διαλέγω ένα προϊόν στην τύχη.

Ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό?

Έστω A το ενδεχόμενο να διαλέξω προϊόν από μηχανή A

Έστω B —״— —״— —״— —״— B

Έστω E το ενδεχόμενο να διαλέξω ελαττωματικό προϊόν.

Από Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχω:

$$P(E) = P(E|A)\cdot P(A) + P(E|B)\cdot P(B)$$

$$= 0{,}05 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3$$

$$= 0{,}035 + 0{,}03$$

$$= 0{,}065$$

$$= 6{,}5\%$$

Ποια η πιθανότητα ένα ελαττωματικό προϊόν να προέρχεται από μηχανή A?

Τύπος Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$$

Από τύπο Bayes έχω

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)\cdot P(A)}{P(E)}$$

$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}7}{0{,}065} = \frac{0{,}035}{0{,}065} = 0{,}538 = 53{,}8\%$$