

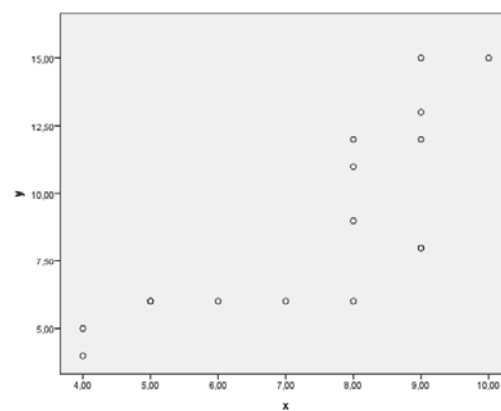
Μη γραμμική παλινδρόμηση

Non linear regression

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D.
Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

1

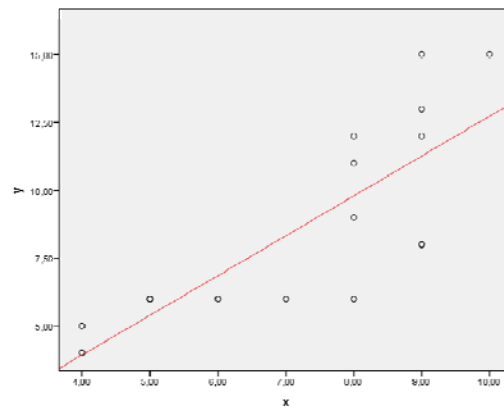
Χρησιμοποιώντας την απλή γραμμική παλινδρόμηση



2

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Χρησιμοποιώντας την απλή γραμμική παλινδρόμηση
 «εκβιάζουμε»
 τα δεδομένα να ακολουθήσουν γραμμικό σχήμα

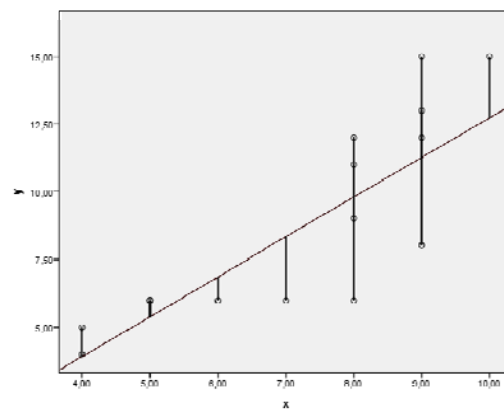


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

3

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης γραμμικής παλινδρόμησης (Linear)

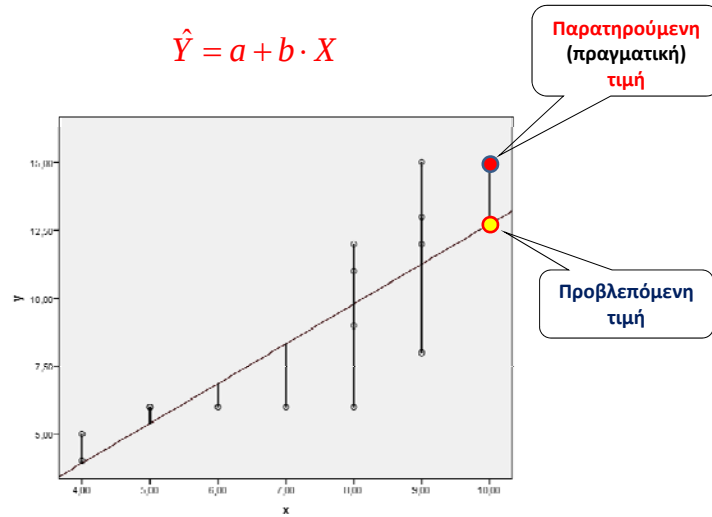
$$\hat{Y} = a + b \cdot X$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

4

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης γραμμικής παλινδρόμησης (Linear)

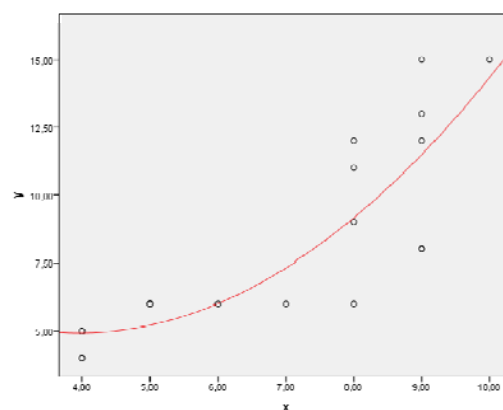


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

5

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Quadratic)

Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού $\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$

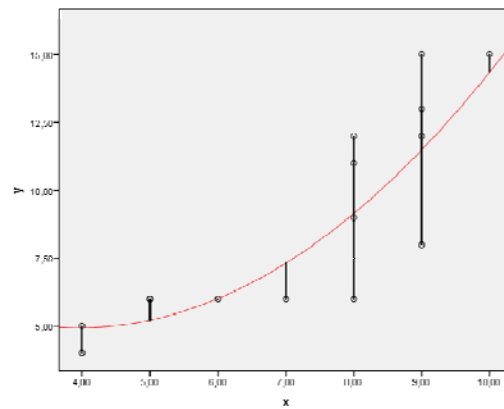


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

6

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Quadratic)

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

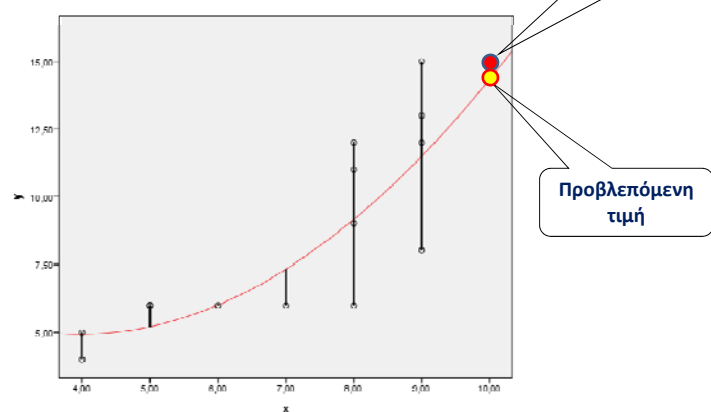


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

7

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Quadratic)

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

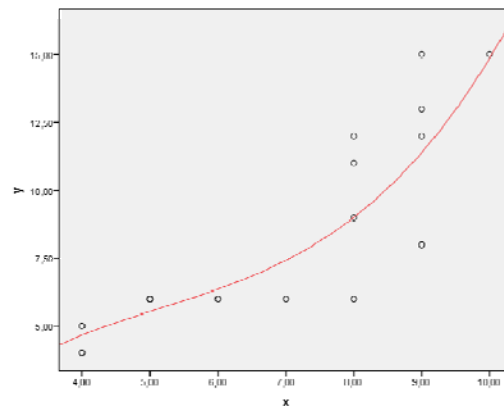


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

8

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Cubic)

Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού $\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2 + d \cdot X^3$

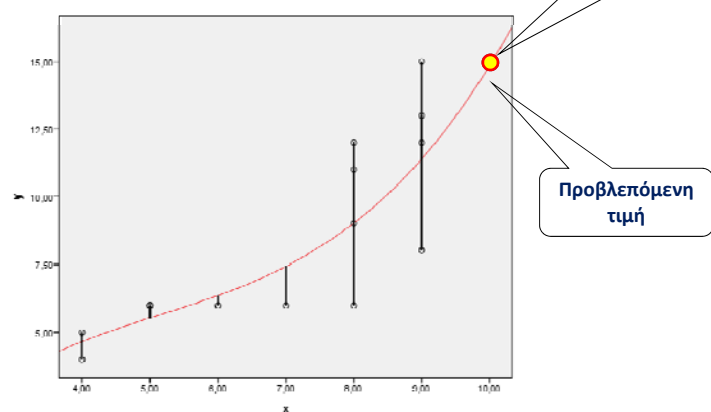


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

9

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Cubic)

$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2 + d \cdot X^3$



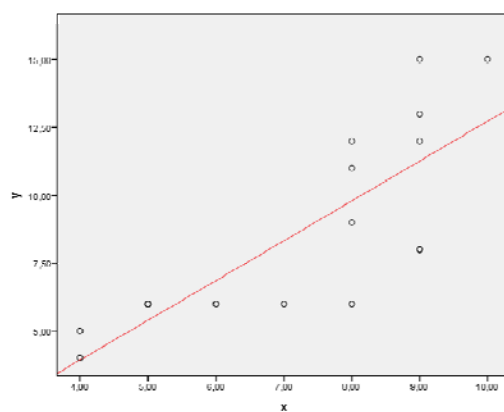
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

10

Πολυώνυμα 1^{ου} βαθμού

Linear

$$\hat{Y} = a + b \cdot X$$



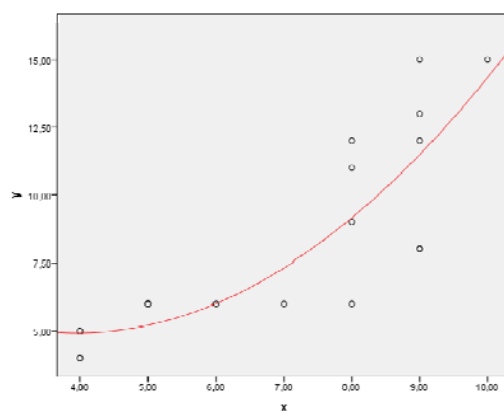
11

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού

Quadratic

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$



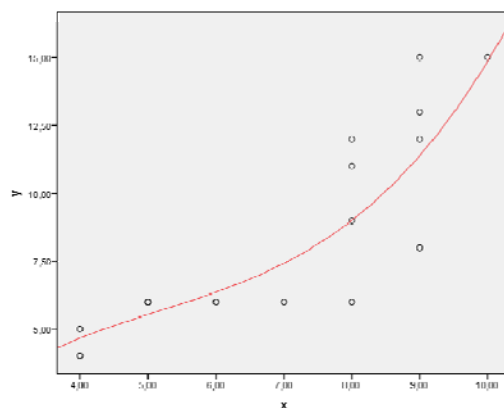
12

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού

Cubic

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2 + d \cdot X^3$$

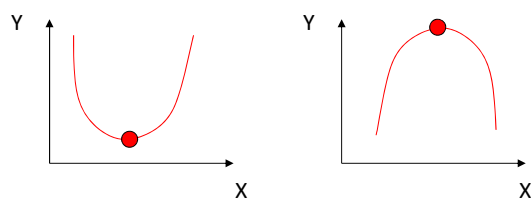


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

13

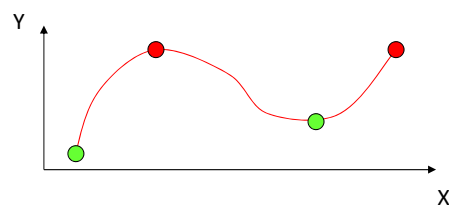
Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού (Quadratic): $\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$

Η καμπύλη έχει **μία αλλαγή διεύθυνσης**



Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού (Cubic): $\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2 + d \cdot X^3$

Η καμπύλη έχει **δύο μέγιστα και δύο ελάχιστα**



Ένα πολυώνυμο k-βαθμού
έχει k-1 κορυφές και κοιλάτες

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

14

Εξίσωση μη γραμμικής παλινδρόμησης
(πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού - *Quadratic*)

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

15

*Ποια καμπύλη (καμπύλη παλινδρόμησης)
εκφράζει καλύτερα (με μεγαλύτερη ακρίβεια) τα δεδομένα;*

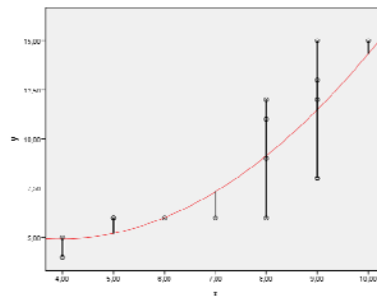
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

16

*Ποια καμπύλη (καμπύλη παλινδρόμησης)
εκφράζει καλύτερα (με μεγαλύτερη ακρίβεια) τα δεδομένα;*

όταν

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum (Y - a - b \cdot X - c \cdot X^2)^2 = \text{ελάχιστο}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

17

*Πώς καθορίζεται η διεύθυνση
αυτής της καμπύλης παλινδρόμησης;*

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

18

Καθορισμός συντελεστών παλινδρόμησης

Όταν ...

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum (Y - a - b \cdot X - c \cdot X^2)^2 = \text{ελάχιστο}$$

... τότε

$$\sum Y = na + b \sum X + c \sum X^2$$

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2 + c \sum X^3$$

$$\sum X^2 Y = a \sum X^2 + b \sum X^3 + c \sum X^4$$



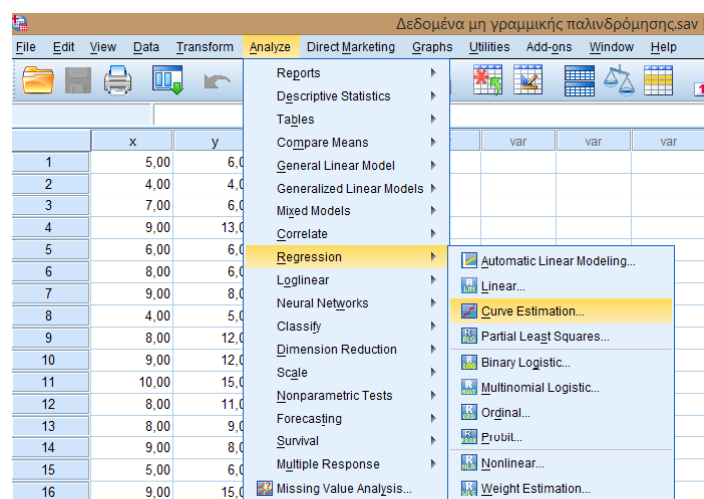
$a =$

$b =$

$c =$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

19

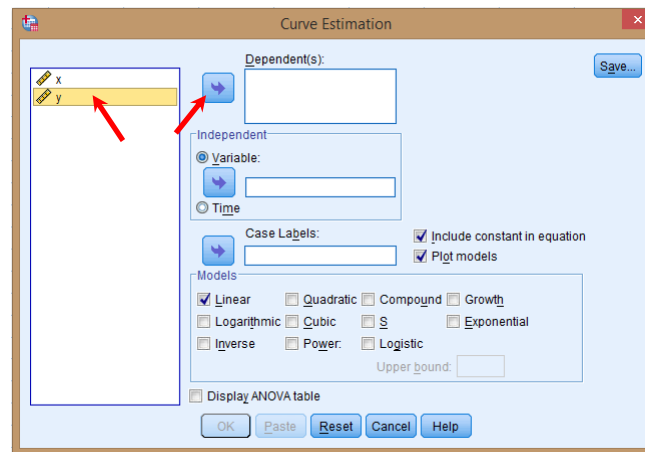


Analyze
Regression
Curve Estimation ...

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

20

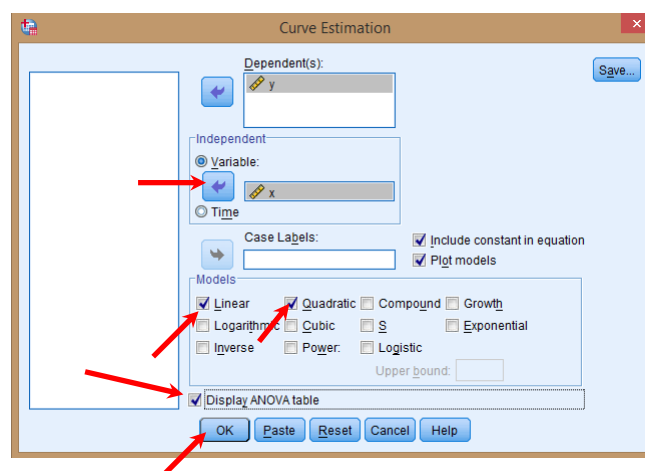
Εισαγωγή – καθορισμός **εξαρτημένης** (*dependent*) μεταβλητής **Y**



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

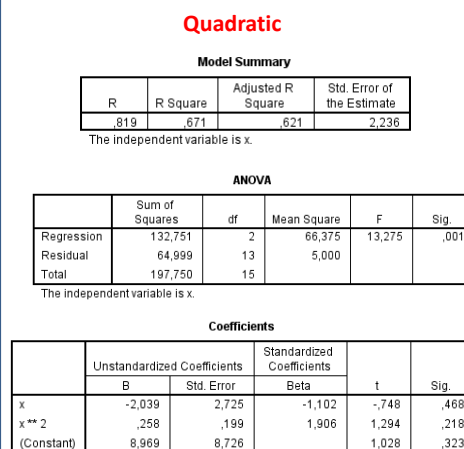
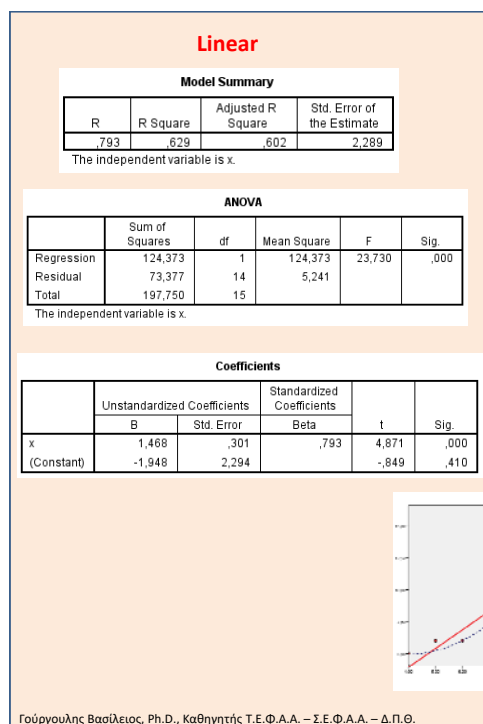
21

Εισαγωγή – καθορισμός **ανεξάρτητης** (*independent*) μεταβλητής **X**
Επιλογή: **γραμμικής** (*Linear*) και **μη γραμμικής** με πολυώνυμο **2^{ου} βαθμού** (*Quadratic*)



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

22



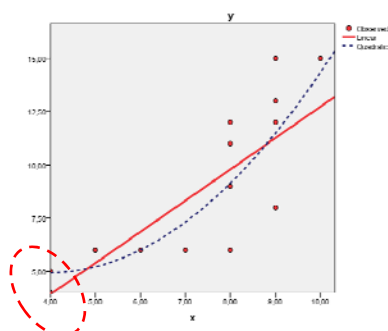
23

Quadratic

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
x	-2,039	2,725	-,102	-,748	,468
x ** 2	,258	,199	1,906	1,294	,218
(Constant)	8,969	8,726		1,028	,323

$$\hat{Y} = 8.969 - 2.039 \cdot X + 0.258 \cdot X^2$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

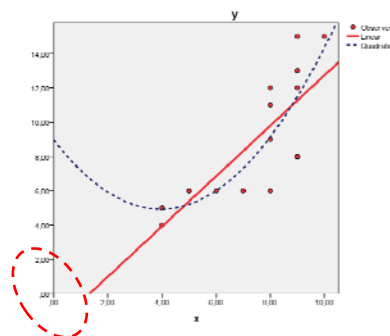
24

Quadratic

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
x	-2,039	2,725	-.1,102	-,748	,468
x ** 2	,258	,199	1,906	1,294	,218
(Constant)	8,969	8,726		1,028	,323

$$\hat{Y} = 8.969 - 2.039 \cdot X + 0.258 \cdot X^2$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

25

Ερμηνεία συντελεστών μη γραμμικής παλινδρόμησης

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

$$\hat{Y} = 8.969 - 2.039 \cdot X + 0.258 \cdot X^2$$

a = σημείο τομής της καμπύλης παλινδρόμησης με τον άξονα των Y

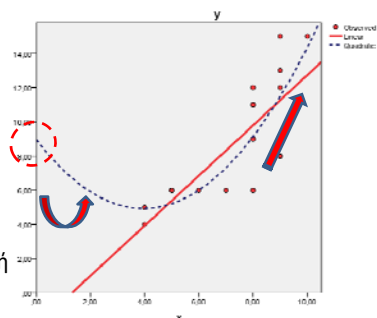
b = η κλίση της καμπύλης παλινδρόμησης

c = δηλώνει την διεύθυνση και την καμπυλότητα της καμπύλης παλινδρόμησης

$$a = 8.969$$

$$b = -2.039$$

Αρνητική = πορεία καθοδική



$$c = +0.258$$

Θετική = πορεία ανοδική

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

26

	X	Y_neg	Y_pos
1	1.00	4.00	1.00
2	1.50	3.50	1.50
3	2.00	3.00	2.00
4	2.50	2.50	2.50
5	3.00	3.00	3.00
6	3.50	3.50	3.50
7	4.00	4.00	4.00
8	4.50	4.50	3.50
9	5.00	5.50	3.00
10	5.50	6.00	2.50
11	6.00	7.00	2.00

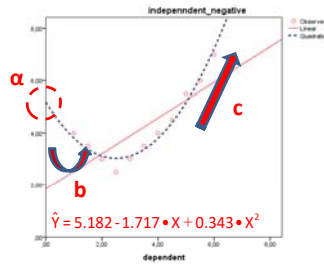
Ερμηνεία **συντελεστών** μη γραμμικής παλινδρόμησης

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

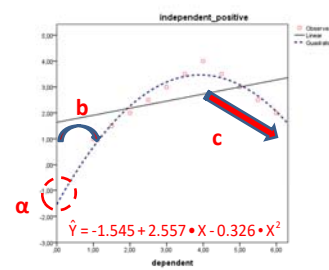
a = σημείο τομής της καμπύλης παλινδρόμησης με τον άξονα των Y

b = η κλίση της καμπύλης παλινδρόμησης

c = δηλώνει την **διεύθυνση** και την **καμπυλότητα** της καμπύλης παλινδρόμησης



	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		t	Sig.
	B	Std. Error	Beta			
dependent	-1,717	,267	-.2029	-6,424	,000	
dependent** 2	,343	,037	,2691	9,152	,000	
(Constant)	5,182	,417		12,437	,000	



	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		t	Sig.
	B	Std. Error	Beta			
dependent	2.557	.278	.4624	9.184	.000	
dependent** 2	-.326	.039	-.4212	-8.367	.000	
(Constant)	-1.545	.434		-3.561	.007	

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Κατά πόσο το συγκεκριμένο μη γραμμικό μοντέλο είναι κατάλληλο για να εκφράσει τα αρχικά δεδομένα;

Δηλαδή

ποια είναι η ισχύς της σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της ανεξάρτητης μεταβλητής X;

Δηλαδή

τι ποσό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, εκτιμάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X;

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

Έλεγχος καταλληλότητας του μη γραμμικού μοντέλου

$$R^2_{Y;X,X^2} = \frac{\sum (\bar{Y} - \hat{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$$

ερμηνεύσιμη μεταβλητότητα της Y, από την X

συνολική μεταβλητότητα της Y

Εκφράζει
το ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
που ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

29

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

$$R^2_{Y;X,X^2} = 1 - \frac{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n - 1}}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

30

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

$$R^2_{Y;X,X^2} = 1 - \frac{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

μη ερμηνεύσιμη διακύμανση της Y, από την X

συνολική διακύμανση της Y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

31

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

$$R^2_{Y;X,X^2} = 1 - \frac{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1}} \Rightarrow$$

$$R^2_{Y;X,X^2} = \frac{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1} - \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

32

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

$$R^2_{Y;X,X^2} = 1 - \frac{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1}} \Rightarrow$$

$$R^2_{Y;X,X^2} = \frac{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1} - \frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m}}{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{n-1}}$$

ερμηνεύσιμη διακύμανση της Y, από την X

συνολική διακύμανση της Y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

33

Συντελεστής προσδιορισμού R^2
(coefficient of determination)

$$R^2_{Y;X,X^2} = \frac{\sum (\bar{Y} - \hat{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$$

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,819	,671	,621	2,236

The independent variable is x.

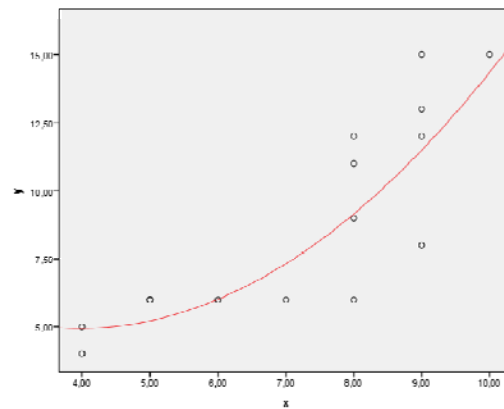
67.1% της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, **ερμηνεύεται** από την ανεξάρτητη μεταβλητή X

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Παρατηρούμενες τιμές (Observed) και προβλεπόμενες τιμές
 βάσει της εξίσωσης μη γραμμικής παλινδρόμησης (Quadratic)

Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

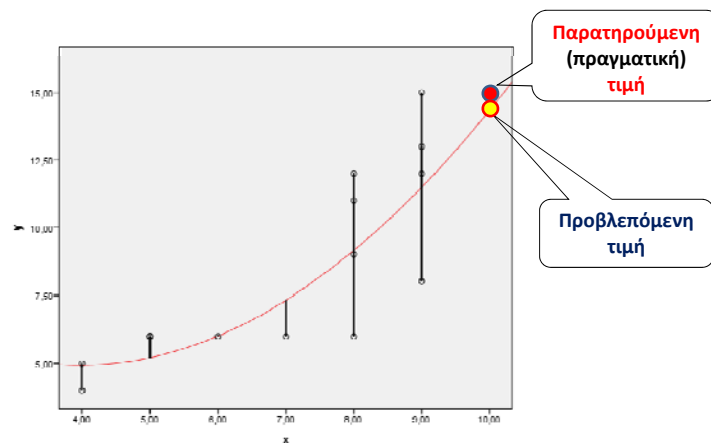
35

Πόσο απέχουν οι πραγματικές τιμές Y
 από τις προβλεπόμενες τιμές $\hat{Y}$;



Τυπικό σφάλμα εκτιμητή παλινδρόμησης
 (τυπική απόκλιση παλινδρόμησης)

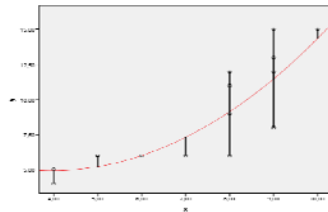
$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

36

Τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)



Αποτελεί έναν δείκτη που μας πληροφορεί

πόσο μακριά είναι καταναμεμημένες

οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y (**παρατηρούμενες** τιμές)

από το εκτιμώμενο υπερπλάνο (καμπύλη, υπερπλάνο, κλπ.) (**προβλεπόμενες** τιμές Y').

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

37

Τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$

n = αριθμός ατόμων

m = βαθμός πολωνύμου + 1

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a \cdot \sum Y - b \cdot \sum X \cdot Y - c \cdot \sum X^2 \cdot Y}{n - m}}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

38

Τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$

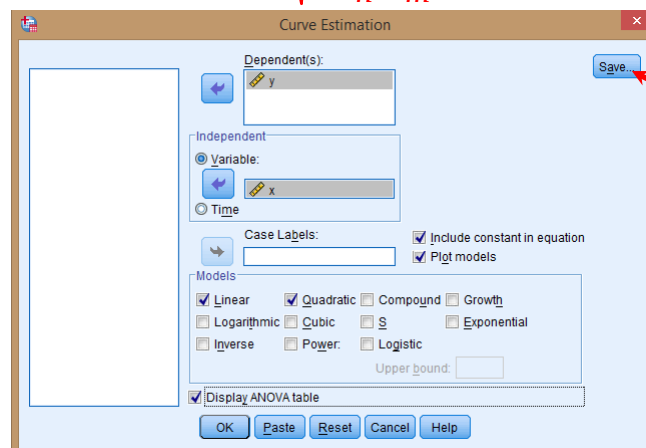
Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,819	,671	,621	2,236

The independent variable is x.

Πως υπολογίζεται το
τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)

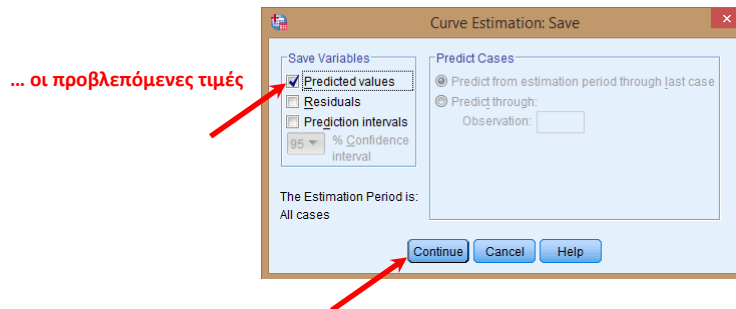
$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$



Να σωθούν ...

**Πως υπολογίζεται το
τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)**
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

41

**Πως υπολογίζεται το
τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)**
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$

*Δεδομένα μη γραμμικά

	x	y	FIT_1	var
1	5,00	6,00	5,21564	
2	4,00	4,00	4,93580	
3	7,00	6,00	7,32099	
4	9,00	13,00	11,48724	
5	6,00	6,00	6,01070	
6	8,00	6,00	9,14650	
7	9,00	8,00	11,48724	
8	4,00	5,00	4,93580	
9	8,00	12,00	9,14650	
10	9,00	12,00	11,48724	
11	10,00	15,00	14,34321	
12	8,00	11,00	9,14650	
13	8,00	9,00	9,14650	
14	9,00	8,00	11,48724	
15	5,00	6,00	5,21564	
16	9,00	15,00	11,48724	
17				

Οι προβλεπόμενες
τιμές της Y,
βάσει του
μοντέλου της
μη γραμμικής
παλινδρόμησης

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

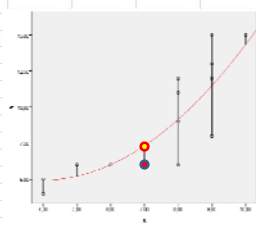
42

Πως υπολογίζεται το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Y	Y-predicted squared	Y-Ypredicted (A-B)	(Y-Ypredicted)squared							
2	6	5.22	0.78	0.62							
3	4	4.94	-0.94	0.88							
4	6	7.32	-1.32	1.75							
5	13	11.49	1.51	2.29							
6	6	6.01	-0.01	0.00							
7	6	9.15	-3.15	9.90							
8	8	11.49	-3.49	12.16							
9	5	4.94	0.06	0.00							
10	12	9.15	2.85	8.14							
11	12	11.49	0.51	0.26							
12	15	14.34	0.66	0.43							
13	11	9.15	1.85	3.44							
14	9	9.15	-0.15	0.02							
15	8	11.49	-3.49	12.16							
16	6	5.22	0.78	0.62							
17	15	11.49	3.51	12.34							
18											
19				Sum							
20				64.999							
21											
22				n	16						
23				m (2+1)	3						
24											

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}} = \frac{64.999}{16 - 3} = 2.236$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

43

Πως υπολογίζεται το Τυπικό σφάλμα του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)
(Standard error of the estimate)

$$\bar{S}_{(Y;X,X^2)} = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m}}$$

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
.819	.671	.621	2.236

The independent variable is x.

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

44

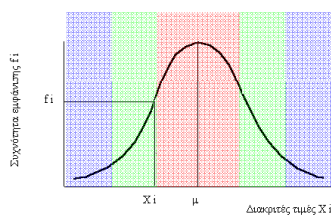
Διαστήματα εμπιστοσύνης

μεταξύ ποιών ορίων,
σε σχέση με την προβλεπόμενη τιμή Y' ,
θα βρίσκεται η πραγματική τιμή Y

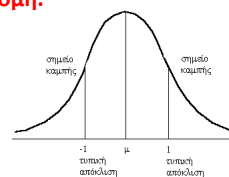
45

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Όταν το δείγμα είναι **μεγάλο**
η κατανομή των Y γύρω από την καμπύλη παλινδρόμησης ακολουθεί
κανονική κατανομή



Η κανονική κατανομή μπορεί να μετατραπεί σε
z - τυπική κατανομή.



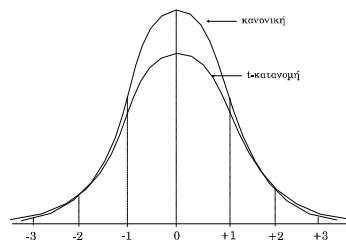
Με βάση τους πίνακες της **z - κατανομής**
μπορούν να καθοριστούν **διαστήματα εμπιστοσύνης** (πρόβλεψης)
(**μεταξύ ποιών ορίων**, σε σχέση με την προβλεπόμενη Y' , θα βρίσκεται η πραγματική τιμή Y)

$$\hat{Y} \pm z \cdot \bar{S}_{(Y;X,X^2)}$$

46

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Όταν το δείγμα είναι **μικρό**
 η κατανομή των Y γύρω από την καμπύλη παλινδρόμησης ακολουθεί την
t-κανονική



Με βάση τους πίνακες της **t - κατανομής**
 μπορούν να καθοριστούν **διαστήματα εμπιστοσύνης** (πρόβλεψης)
 (με $n-m$ βαθμούς ελευθερίας)
 (μεταξύ **ποιών ορίων**, σε σχέση με την προβλεπόμενη Y' , θα βρίσκεται η πραγματική τιμή Y)

$$\hat{Y} \pm t_{(a/2, n-m)} \cdot \bar{S}_{(Y; X, X^2)}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

47

Analyze
 Regression
Curve Estimation ...

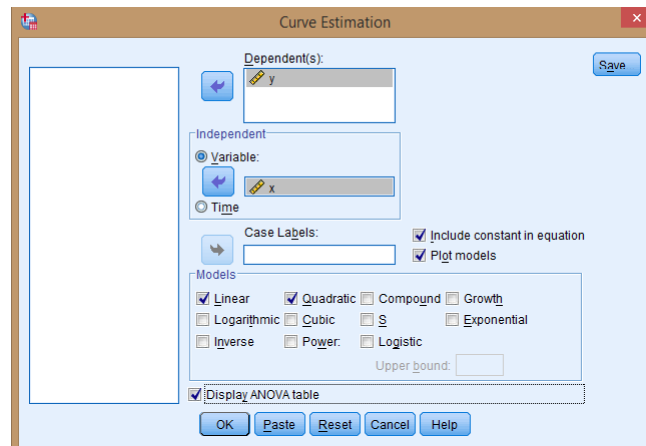
Διαστήματα εμπιστοσύνης



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

48

Πως υπολογίζονται τα
διαστήματα εμπιστοσύνης



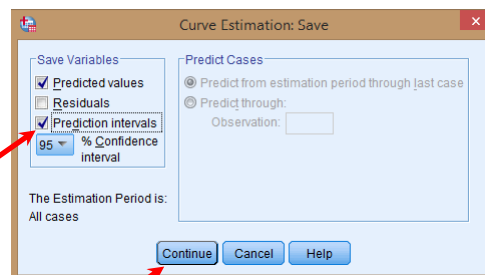
Να σωθούν ...

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

49

Πως υπολογίζονται τα
διαστήματα εμπιστοσύνης

... τα διαστήματα
εμπιστοσύνης
των προβλεπόμενων τιμών



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

50

Πως υπολογίζονται τα
διαστήματα εμπιστοσύνης

*Δεδομένα μη γραμμικής παλινδρόμησης_αρχικά(Y-X)

1: LCL_2						
	x	y	FIT_1	LCL_2	UCL_2	var
1	5,00	6,00	5,21564	,00433	10,42695	
2	4,00	4,00	4,93580	-,74393	10,61554	
3	7,00	6,00	7,32099	2,06199	12,57999	
4	9,00	13,00	11,48724	6,38770	16,58679	
5	6,00	6,00	6,01070	,76152	11,25988	
6	8,00	6,00	9,14650	4,03638	14,25663	
7	9,00	8,00	11,48724	6,38770	16,58679	
8	4,00	5,00	4,93580	-,74393	10,61554	
9	8,00	12,00	9,14650	4,03638	14,25663	
10	9,00	12,00	11,48724	6,38770	16,58679	
11	10,00	15,00	14,34321	8,43963	20,24679	
12	8,00	11,00	9,14650	4,03638	14,25663	
13	8,00	9,00	9,14650	4,03638	14,25663	
14	9,00	8,00	11,48724	6,38770	16,58679	
15	5,00	6,00	5,21564	,00433	10,42695	
16	9,00	15,00	11,48724	6,38770	16,58679	
17						

Κατώτατο και
ανώτατο όριο
διαστημάτων
εμπιστοσύνης 95%
των
προβλεπόμενων
τιμών της Y,
βάσει του μοντέλου
της
μη γραμμικής
παλινδρόμησης

51

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Ποιου βαθμού πολυώνυμο
εκφράζει καλύτερα τη σχέση
μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της ανεξάρτητης μεταβλητής X;

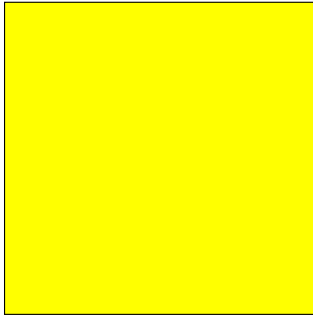
Είναι ;

$$R^2_{Y;X,X^2} > R^2_{Y;X}$$

52

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;

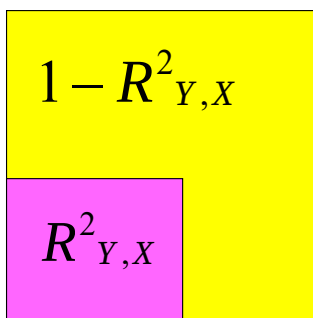


Συνολική διακύμανση της Y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

53

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;



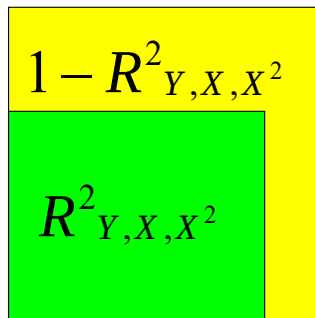
Διακύμανση της Y
 που **δεν** ερμηνεύεται
 από την **γραμμική** σχέση

Διακύμανση της Y
 που **ερμηνεύεται**
 από την **γραμμική** σχέση

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

54

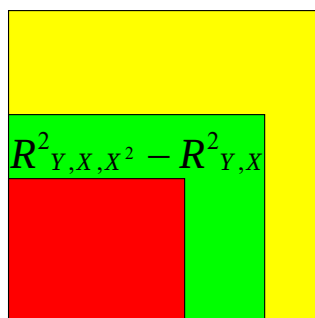
Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;



Διακύμανση της Y
που δεν ερμηνεύεται
από την μη γραμμική σχέση

Διακύμανση της Y
που ερμηνεύεται
από την μη γραμμική σχέση
(πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;



Ανεξήγητη διακύμανση της Y
από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται
από την μη γραμμική σχέση
(πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)

Ποιου βαθμού πολυώνυμο
εκφράζει καλύτερα τη σχέση
μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της ανεξάρτητης μεταβλητής X;

Είναι ;

$$R^2_{Y;X,X^2} > R^2_{Y;X}$$



Μερικός συντελεστής προσδιορισμού

$$r^2_{Y;X^2,X}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

57

Μερικός συντελεστής προσδιορισμού (2^{ου} βαθμού)

Ο μερικός συντελεστής προσδιορισμού 2^{ου} βαθμού

$$r^2_{Y;X^2,X}$$

δηλώνει

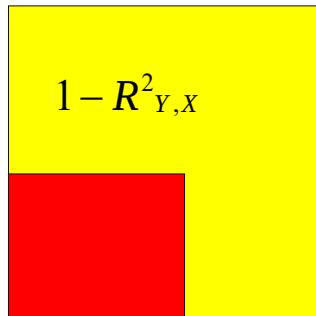
το ποσοστό της ανεξήγητης διακύμανσης της Y,
όταν χρησιμοποιείται η γραμμική σχέση $(1-R^2_{Y;X})$,
το οποίο πλέον εξηγείται
με τη χρήση της μη γραμμικής σχέσης $(R^2_{Y;X,X^2} - R^2_{Y;X})$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

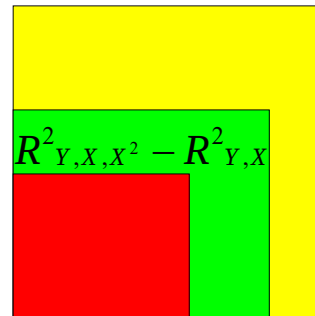
58

Μερικός συντελεστής προσδιορισμού (2^{ου} βαθμού)

Ανεξήγητη διακύμανση της Y
από την γραμμική σχέση



Ανεξήγητη διακύμανση της Y
από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται
από την μη γραμμική σχέση



$$r^2_{Y;X^2,X} = \frac{R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X}}{1 - R^2_{Y,X}}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

59

Μερικός συντελεστής προσδιορισμού (2^{ου} βαθμού)

$$r^2_{Y;X^2,X} = \frac{R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X}}{1 - R^2_{Y,X}}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

60

Μερικός συντελεστής προσδιορισμού (2^{ου} βαθμού)

$$r^2_{Y;X^2,X} = \frac{R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X}}{1 - R^2_{Y,X}}$$

ανεξήγητη διακύμανση
από τη γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται
από την μη γραμμική σχέση

ανεξήγητη διακύμανση
από τη γραμμική σχέση

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

61

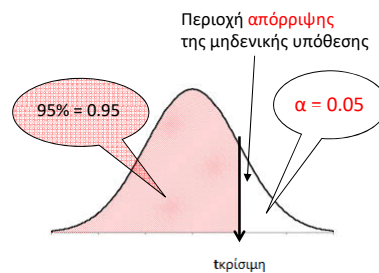
Έλεγχος μερικού συντελεστή προσδιορισμού (2^{ου} βαθμού)

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{Y;X^2,X} \cdot (n - 3)}{1 - r^2_{Y;X^2,X}}}$$

n = αριθμός ατόμων

t_{κρίσιμη} = για α= 0.05 και β.ε.= n-3

Όταν
 $t > t_{\text{κρίσιμη}}$
απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση
οπότε
οι δύο συντελεστές προσδιορισμού
δεν εξηγούν το ίδιο ποσοστό διακύμανσης της Y



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

62

A normal distribution curve is shown with a vertical line at the mean μ . The area under the curve to the left of μ is shaded and labeled p . The area to the right of μ is labeled $1-p$.

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha/2) &= \\ 1 - (0.05/2) &= \\ 1 - 0.025 &= \\ 0.975 \end{aligned}$$
$$t_{\text{κρίσιμη}} = 2.16$$

63

(2^{ου} βαθμού)

$$r^2_{Y;X^2,X} = \frac{R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X}}{1 - R^2_{Y,X}}$$

$$t = \sqrt{\frac{r^2_{Y;X^2,X} \cdot (n-3)}{1-r^2_{Y;X^2,X}}}$$

Αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση
οπότε

$$H_0: R^2_{Y,X,X^2} = R^2_{Y,X}$$

64

Analyze
Regression
Curve Estimation ...

Μερικός συντελεστής προσδιορισμού



Δεν υπολογίζεται μέσω της διαδικασίας Curve Estimation

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

65

Τι μπορούμε να κάνουμε για να υπολογίσουμε

- τους **συντελεστές** (**a, b, c**) της μη γραμμικής (**quadratic**) παλινδρόμησης
- τον **συντελεστή προσδιορισμού** R^2_{x,x^2} της μη γραμμικής (**quadratic**) παλινδρόμησης
- το **τυπικό σφάλμα** του εκτιμητή διακύμανσης (παλινδρόμησης)

και επιπλέον

- να **ελέγχουμε**
αν το **ποσοστό της διακύμανσης που ερμηνεύεται επιπλέον** από τη μη γραμμική σχέση
είναι στατιστικά **σημαντικό**

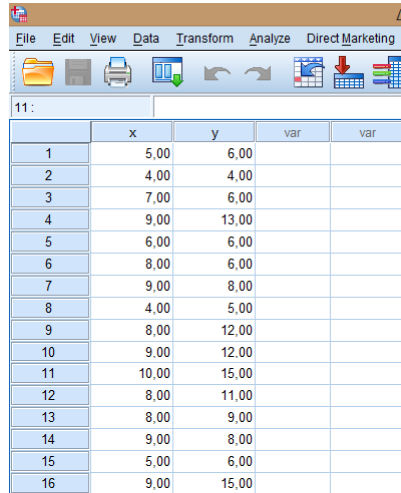


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

66

$$\hat{Y} = a + b \cdot X + c \cdot X^2$$

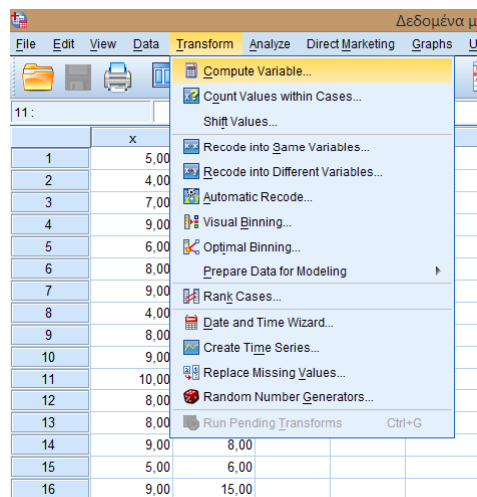
Υπολογισμός της μεταβλητής X^2



	x	y	var	var
1	5,00	6,00		
2	4,00	4,00		
3	7,00	6,00		
4	9,00	13,00		
5	6,00	6,00		
6	8,00	6,00		
7	9,00	8,00		
8	4,00	5,00		
9	8,00	12,00		
10	9,00	12,00		
11	10,00	15,00		
12	8,00	11,00		
13	8,00	9,00		
14	9,00	8,00		
15	5,00	6,00		
16	9,00	15,00		

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

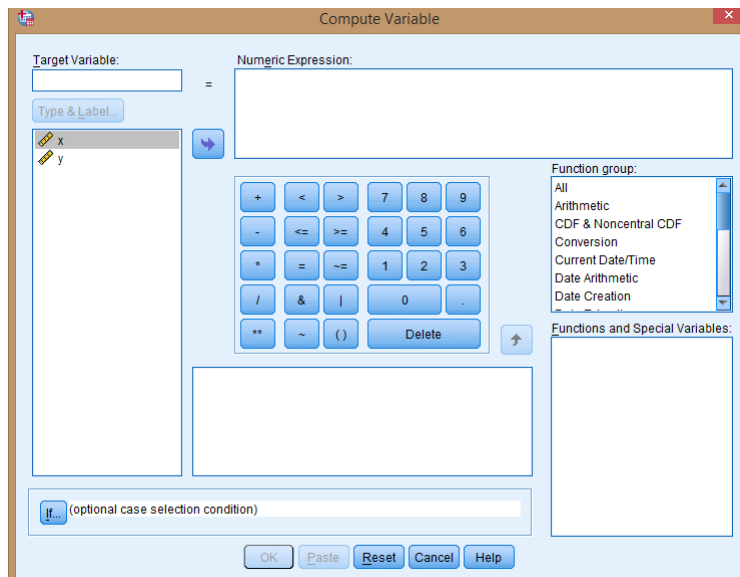
67



Transform
Compute Variable...

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

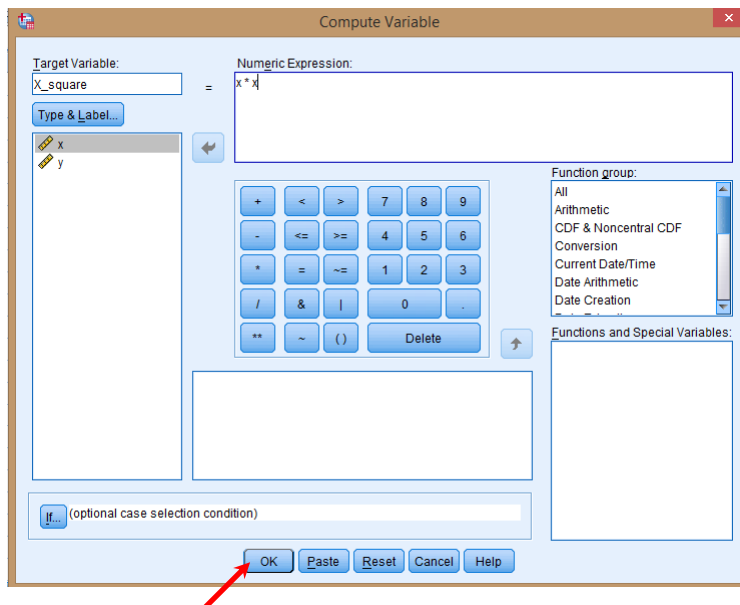
68



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

69

Υπολογίζουμε τη μεταβλητή **x^2 (x_square)**, που είναι **$x * x$**



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

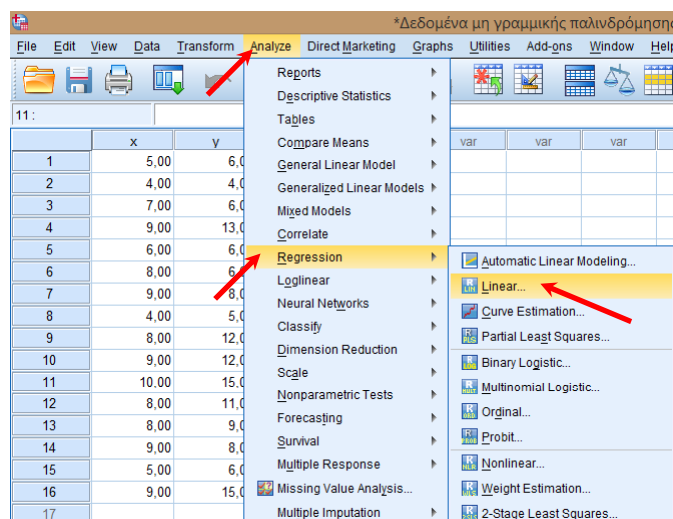
70

$$\hat{Y} = a + bX + cX^2$$

	x	y	X_square	var
1	5,00	6,00	25,00	
2	4,00	4,00	16,00	
3	7,00	6,00	49,00	
4	9,00	13,00	81,00	
5	6,00	6,00	36,00	
6	8,00	6,00	64,00	
7	9,00	8,00	81,00	
8	4,00	5,00	16,00	
9	8,00	12,00	64,00	
10	9,00	12,00	81,00	
11	10,00	15,00	100,00	
12	8,00	11,00	64,00	
13	8,00	9,00	64,00	
14	9,00	8,00	81,00	
15	5,00	6,00	25,00	
16	9,00	15,00	81,00	

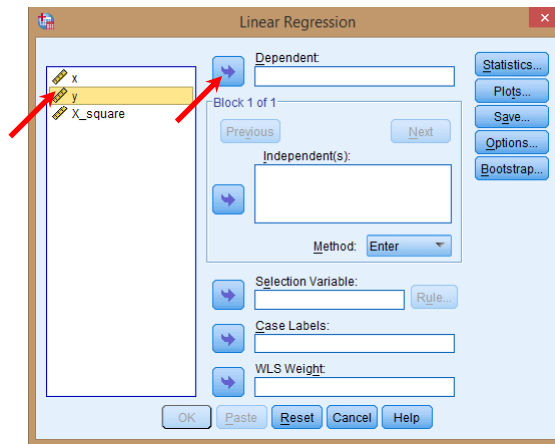
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

71



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

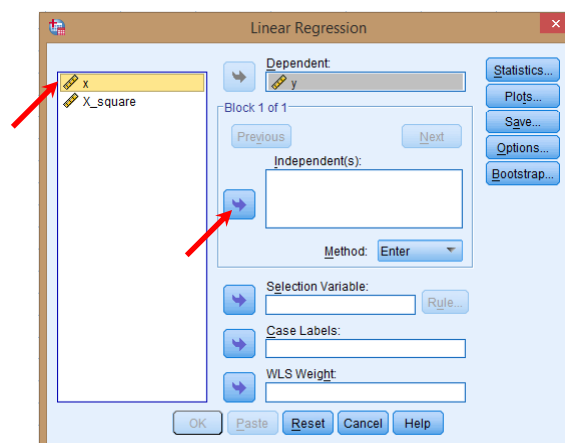
72



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

73

Εισάγουμε τη μεταβλητή **X**, ως ανεξάρτητη (independent), στο **Block 1**



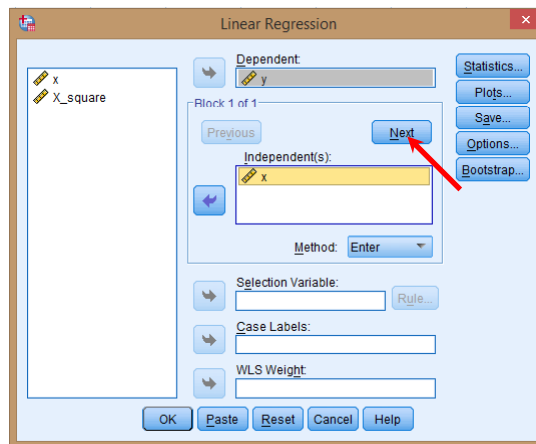
Ιεραρχική
πολλαπλή
παλινδρόμηση
(Block 1 of 1)

X

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

74

Εισάγουμε τη μεταβλητή **X**, ως ανεξάρτητη (independent), στο **Block 1** ... και Next



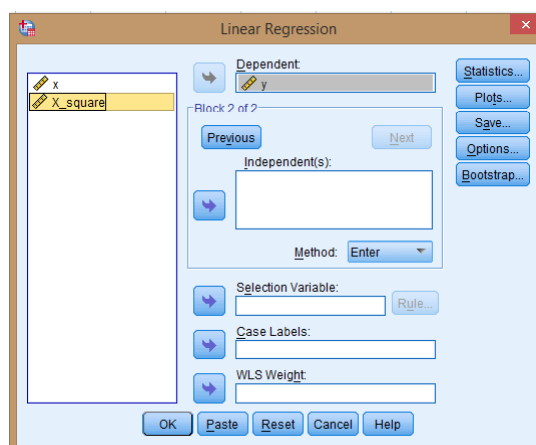
Ιεραρχική
πολλαπλή
παλινδρόμηση
(Block 1 of 1)

X

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

75

Εισάγουμε τη μεταβλητή **X² (X_square)**, ως ανεξάρτητη (independent), στο **Block 2**



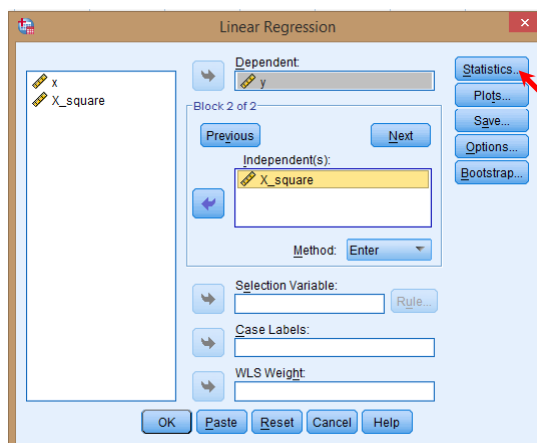
Ιεραρχική
πολλαπλή
παλινδρόμηση
(Block 2 of 2)

X_square

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

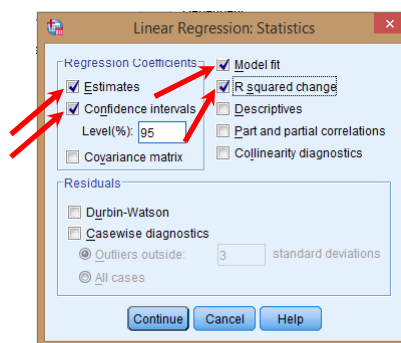
76

Εισάγουμε τη μεταβλητή X^2 (**X_square**), ως ανεξάρτητη (independent), στο **Block 2**



Ιεραρχική
πολλαπλή
παλινδρόμηση
(Block 2 of 2)

X_square



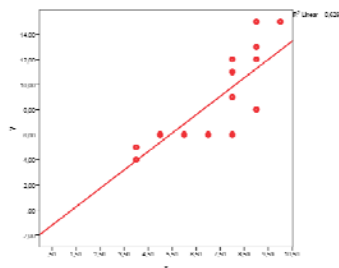
συντελεστές της γραμμικής (a, b) και μη γραμμικής (*quadratic*) (a, b, c) παλινδρόμησης

Coefficients ^a								
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	-1,948	2,294		-,849	,410	-6,869	2,973
	x	1,468	,301	,793	4,871	,000	,821	2,114
2	(Constant)	8,969	8,726		1,028	,323	-9,883	27,821
	x	-2,039	2,725	-,102	-,748	,468	-7,925	3,848
	X_square	,258	,199	,1906	1,294	,218	-,172	,688

a. Dependent Variable: y

Εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης:

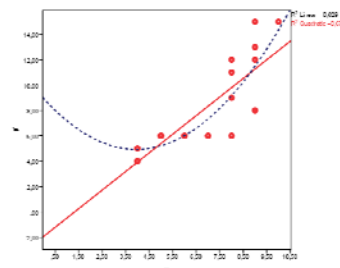
$$\hat{Y} = -1.948 + 1.468 \cdot X$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Εξίσωση μη γραμμικής παλινδρόμησης:

$$\hat{Y} = 8.969 - 2.039 \cdot X + 0.258 \cdot X^2$$



79

συντελεστής προσδιορισμού

της γραμμικής $R^2_{Y,X}$ και της μη γραμμικής (*quadratic*) R^2_{Y,X,X^2} παλινδρόμησης

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,793 ^a	,629	,602	2,28936	,629	23,730	1	14	,000
2	,819 ^b	,671	,621	2,23605	,042	1,676	1	13	,218

a. Predictors: (Constant), x

b. Predictors: (Constant), x, X_square

συντελεστής προσδιορισμού
της γραμμικής $R^2_{Y,X}$
παλινδρόμησης

0.629



62.9%

της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
ερμηνεύεται από το γραμμικό μοντέλο

συντελεστής προσδιορισμού
της μη γραμμικής (*quadratic*) R^2_{Y,X,X^2}
παλινδρόμησης

0.671



67.1%

της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
ερμηνεύεται από το μη γραμμικό μοντέλο

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

80

Το ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X
 μέσω του μοντέλου της γραμμικής και της μη γραμμικής παλινδρόμησης
είναι διαφορετικό από το μηδέν (0);



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

81

Το ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X
 μέσω του μοντέλου της γραμμικής και της μη γραμμικής παλινδρόμησης
είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	124,373	1	124,373	23,730	,000 ^b
	Residual	73,377	14	5,241		
	Total	197,750	15			
2	Regression	132,751	2	66,375	13,275	,001 ^c
	Residual	64,999	13	5,000		
	Total	197,750	15			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x

c. Predictors: (Constant), x, X_square

γραμμική

$$F = \frac{\text{Mean Square Regression}}{\text{Mean Square Residual}}$$

Μη γραμμική

$$F_{1,14} = 23.730; p < 0.05$$

το $R^2_{Y,X} = 0.629$
 είναι στατιστικά σημαντικά
 διαφορετικό από το μηδέν (0)

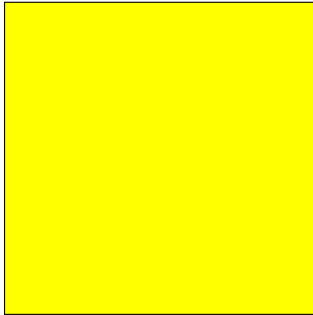
$$F_{2,13} = 13.275; p < 0.05$$

το $R^2_{Y,X,X^2} = 0.671$
 είναι στατιστικά σημαντικά
 διαφορετικό από το μηδέν (0)

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

82

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;

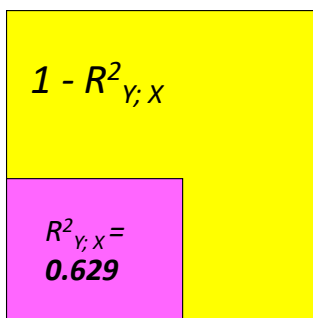


Συνολική διακύμανση της Y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

83

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;



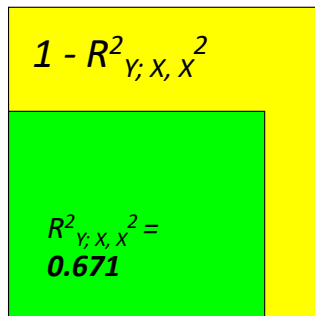
Διακύμανση της Y
 που **δεν** ερμηνεύεται
 από την **γραμμική** σχέση

Διακύμανση της Y
 που **ερμηνεύεται**
 από την **γραμμική** σχέση

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

84

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;



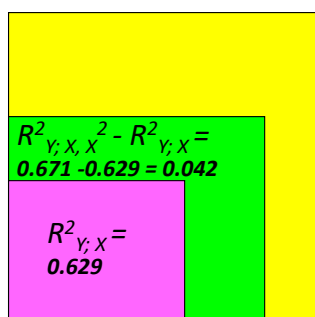
Διακύμανση της Y
 που **δεν** ερμηνεύεται
 από την **μη γραμμική** σχέση

Διακύμανση της Y
 που ερμηνεύεται
 από την **μη γραμμική** σχέση
 (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

85

Τι ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,
που ΔΕΝ ερμηνεύεται από την ανεξάρτητη μεταβλητή X μέσω του μοντέλου της γραμμικής,
ερμηνεύεται από το μοντέλο της μη γραμμικής παλινδρόμησης ;

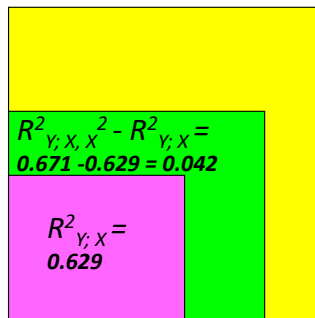


Ανεξήγητη διακύμανση της Y
 από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται
 από την **μη γραμμική** σχέση
 (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

86

Είναι το ποσοστό
της ανεξήγητης διακύμανσης της Y από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται από την μη γραμμική σχέση (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)
στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);



$$H_0: R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X} = 0$$

$$H_A: R^2_{Y,X,X^2} - R^2_{Y,X} \neq 0$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

87

Είναι το ποσοστό
της ανεξήγητης διακύμανσης της Y από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται από την μη γραμμική σχέση (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)
στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);

Model Summary								
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics			
					R Square Change	F Change	df1	Sig. F Change
1	,793 ^a	,629	,602	2,28936	,629	23,730	1	,000
2	,819 ^b	,671	,621	2,23605	,042	1,676	1	,218

a. Predictors: (Constant), x

b. Predictors: (Constant), x, X_square

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

88

Είναι το ποσοστό
της ανεξήγητης διακύμανσης της Y από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται από την μη γραμμική σχέση (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)
στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,793 ^a	,629	,602	2,28936	,629	23,730	1	14	,000
2	,819 ^b	,671	,621	2,23605	,042	1,676	1	13	,218

a. Predictors: (Constant), x

b. Predictors: (Constant), x, X_square

R Square Change = 0.042

F Change = 1.646; p= 0.218

$F_{1,13} = 1.646; p = 0.218 > 0.05$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

89

Είναι το ποσοστό
της ανεξήγητης διακύμανσης της Y από την γραμμική σχέση,
που ερμηνεύεται από την μη γραμμική σχέση (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού)
στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,793 ^a	,629	,602	2,28936	,629	23,730	1	14	,000
2	,819 ^b	,671	,621	2,23605	,042	1,676	1	13	,218

a. Predictors: (Constant), x

b. Predictors: (Constant), x, X_square

R Square Change = 0.042

F Change = 1.646; p= 0.218

$F_{1,13} = 1.646; p = 0.218 > 0.05$

Το ποσοστό της διακύμανσης της Y,
που ερμηνεύεται **ΕΠΙΠΛΕΟΝ** από την **μη γραμμική** σχέση (πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού),
ΔΕΝ είναι
στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0);

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

90

Συγγραφή αποτελεσμάτων ...

Από την εφαρμογή της μη – γραμμικής παλινδρόμησης με πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού (quadratic), για την πρόβλεψη των τιμών της ποσοτικής εξαρτημένης μεταβλητής (Y) βάσει της ανεξάρτητης μεταβλητής (X),

διαπιστώθηκε ότι

η μη γραμμική παλινδρόμηση, μέσω του πολυώνυμου 2^{ου} βαθμού, δεν συμβάλει στατιστικά σημαντικά περισσότερο στην πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής Y από την ανεξάρτητη μεταβλητή X, σε σύγκριση με το γραμμικό μοντέλο, καθώς συνεισφέρει στην αύξηση του ποσοστού διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής που ερμηνεύεται από το μοντέλο πρόβλεψης μόνο κατά 4.2% ($R^2 \text{ Change} = 0.042$), το οποίο δεν είναι στατιστικά σημαντικό ($F \text{ Change}_{1,13} = 1.676$; $p = 0.218$). Η χρήση μόνο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης ερμηνεύει το 62.9% ($R^2 = 0.629$) της συνολικής διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής, το οποίο είναι στατιστικά σημαντικό ($F_{1,14} = 23.730$; $p < 0.05$) και η εξίσωση πρόβλεψης είναι:

$$Y = -1.948 + 1.468 \cdot X$$

91

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Ερωτήσεις;



92

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Youtube video_non linear regression

Curvilinear Regression - SPSS (part 1)

<https://www.youtube.com/watch?v=HtzE-HmAcwk>

Curvilinear Regression - SPSS (part 2)

https://www.youtube.com/watch?v=6TL4qp5Jt_k

Curvilinear Regression - SPSS (part 3)

<https://www.youtube.com/watch?v=Q8buA3-bxRs>

Curvilinear Regression - SPSS (part 4)

<https://www.youtube.com/watch?v=NYHwxnvVu2Y>

Curvilinear Regression - SPSS (part 5)

<https://www.youtube.com/watch?v=zcjM5eDcy6M>

Curvilinear Regression - SPSS (part 6)

https://www.youtube.com/watch?v=kh_M5_MHWA4