

Πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση

Multiple linear regression

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D.
Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

1

Ανιχνεύει τη σχέση μεταξύ
περισσότερων από δύο ποσοτικών μεταβλητών

Από τις τιμές **πολλών ανεξάρτητων** (independent) μεταβλητών (X_i)
να προβλεφθούν
οι τιμές **μιας εξαρτημένης** (dependent) μεταβλητής (Y)

2

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

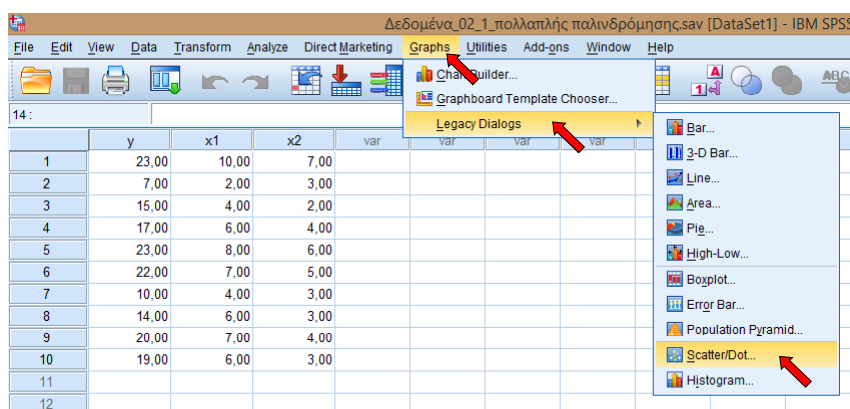
Εξαρτημένη
μεταβλητή

Ανεξάρτητες
μεταβλητές

	Y	X ₁	X ₂
1	23	10	7
2	7	2	3
3	15	4	2
4	17	6	4
5	23	8	6
6	22	7	5
7	10	4	3
8	14	6	3
9	20	7	4
10	19	6	3

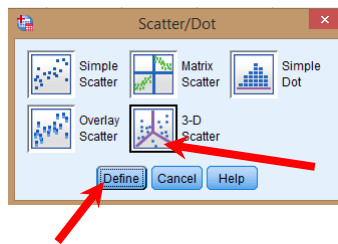
3

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



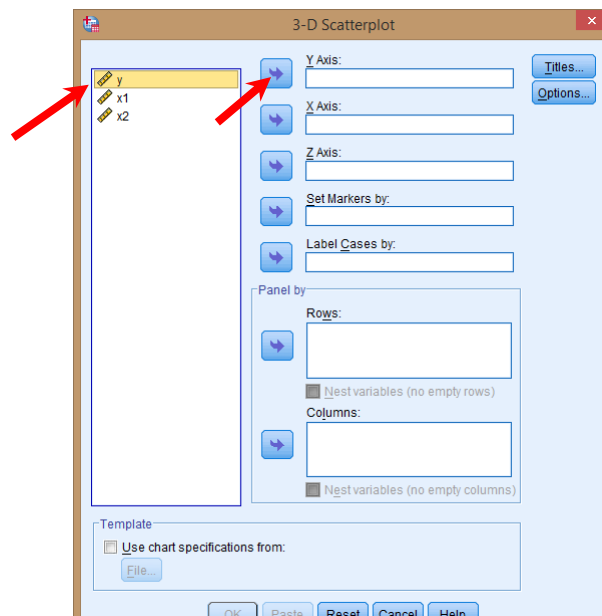
4

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



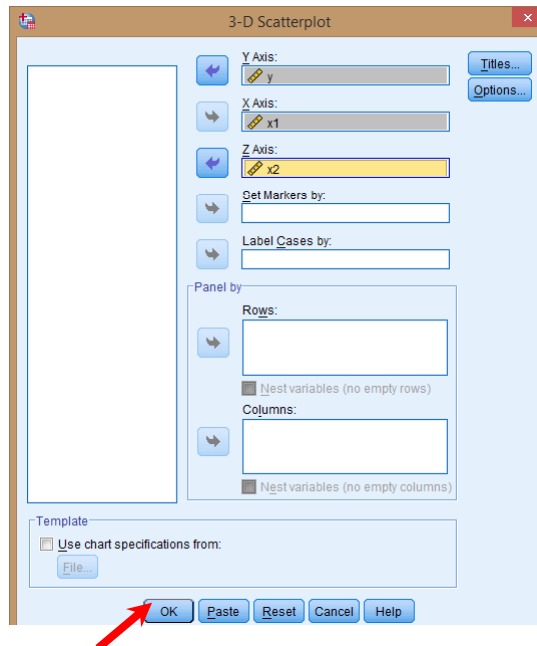
5

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



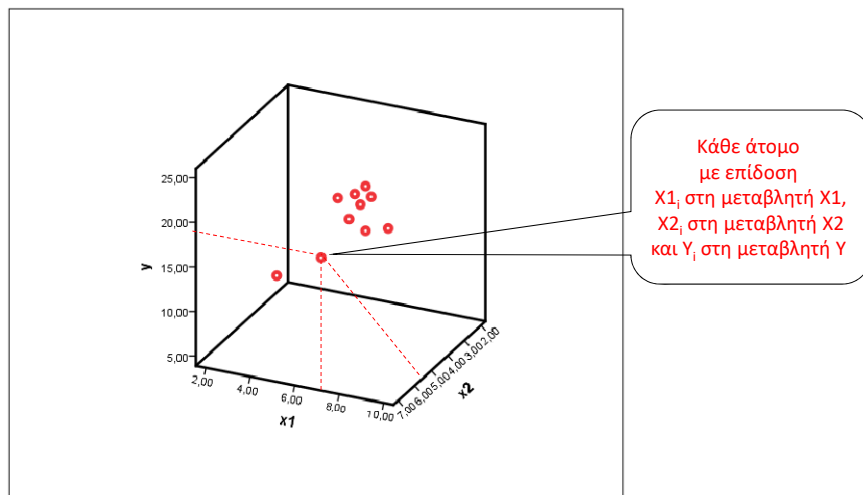
6

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



7

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

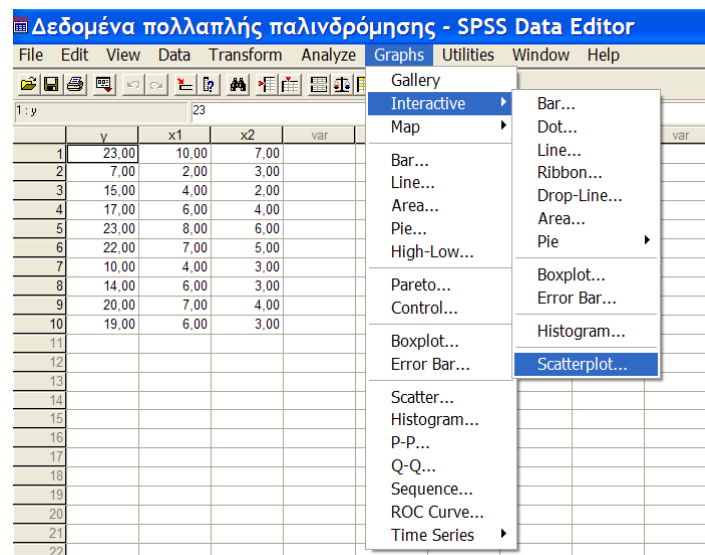


8

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

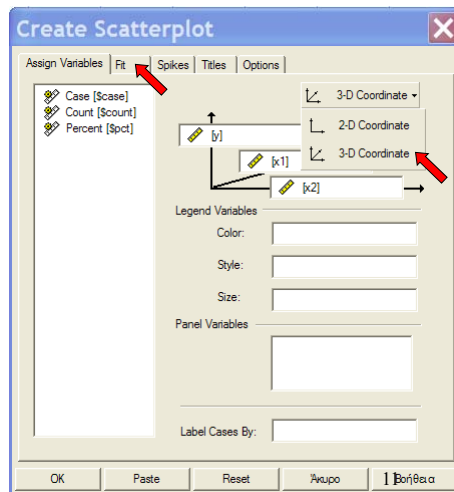
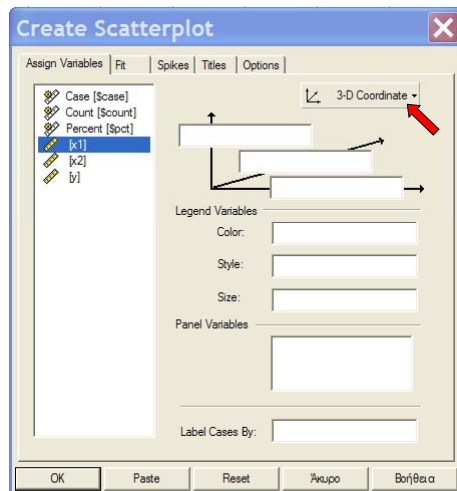
Παλαιότερη έκδοση SPSS

9

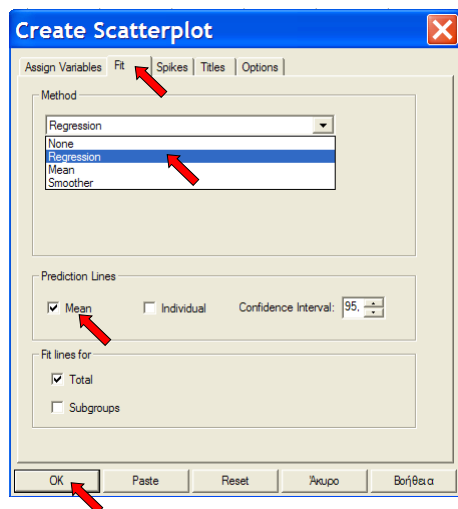


10

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

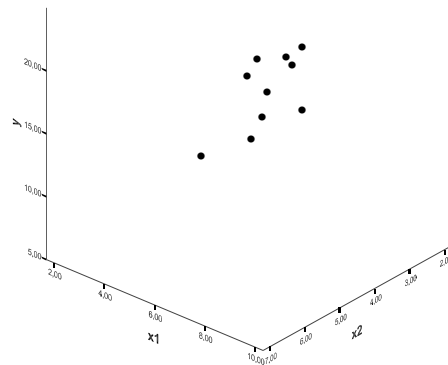


Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



12

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



Από αυτό το «νέφος» σημείων
μπορούν να διέλθουν **άπειρα**
επίπεδα παλινδρόμησης

13

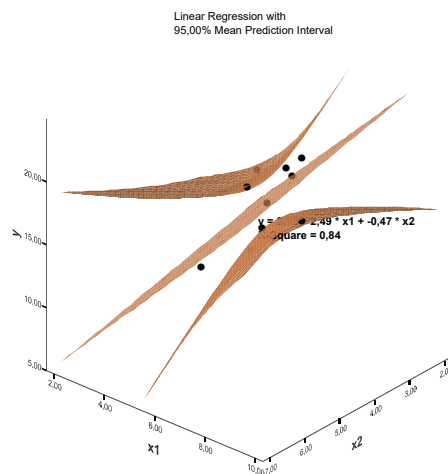
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Ποιο επίπεδο παλινδρόμησης
εκφράζει καλύτερα (με μεγαλύτερη ακρίβεια) τα δεδομένα;

Πώς καθορίζεται η διεύθυνση
αυτού του επιπέδου παλινδρόμησης;

14

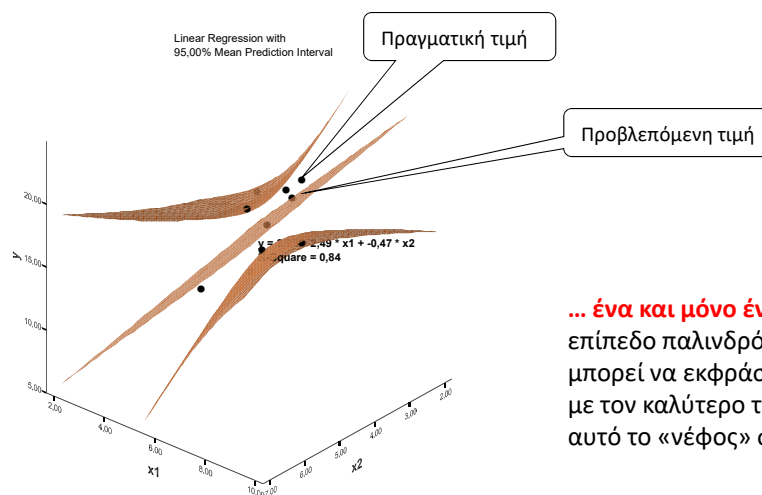
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



... ένα και μόνο ένα
επίπεδο παλινδρόμησης
μπορεί να εκφράσει
με τον καλύτερο τρόπο
αυτό το «νέφος» σημείων.

15

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



... ένα και μόνο ένα
επίπεδο παλινδρόμησης
μπορεί να εκφράσει
με τον καλύτερο τρόπο
αυτό το «νέφος» σημείων.

16

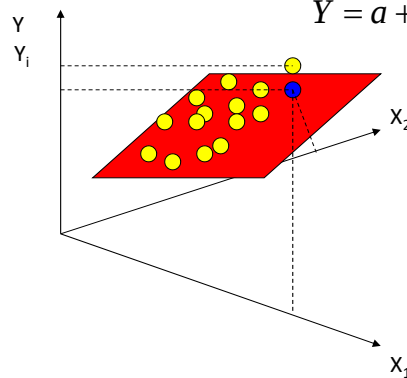
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Το **επίπεδο παλινδρόμησης** που μπορεί να εκφράσει με τον καλύτερο τρόπο (με την μεγαλύτερη ακρίβεια) αυτό το «νέφος» σημείων, είναι το επίπεδο βάσει του οποίου το **άθροισμα των τετραγώνων** της **διαφοράς** των **πραγματικών** από τις **προβλεπόμενες** τιμές είναι το **ελάχιστο** δυνατό.

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \text{ελάχιστο}$$

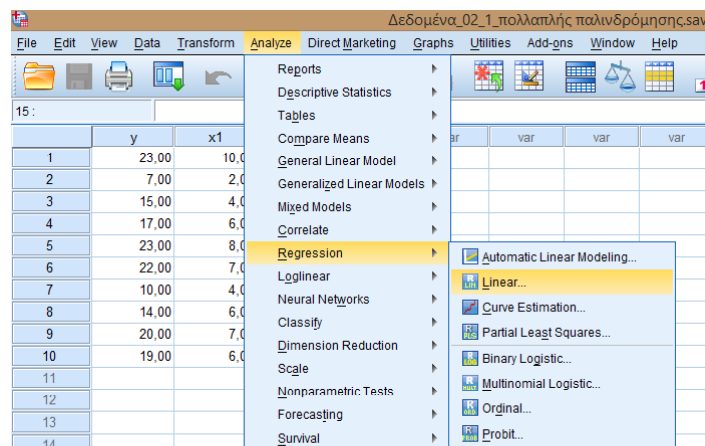
$$Y = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + e$$

$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$



17

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

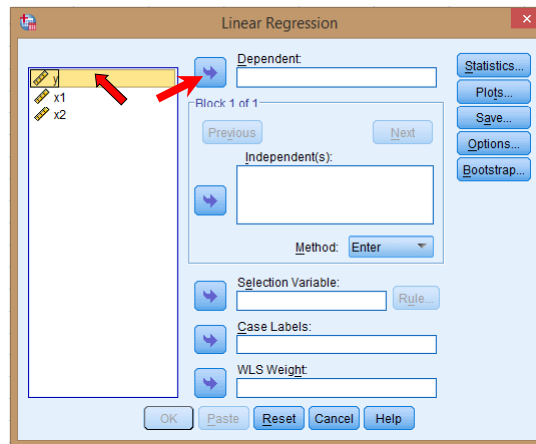


Analyze
Regression
Linear ...

18

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

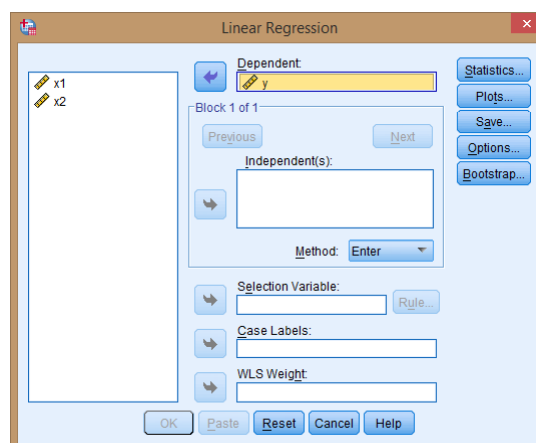
... καθορισμός εξαρτημένης (**Dependent**) μεταβλητής ...



19

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

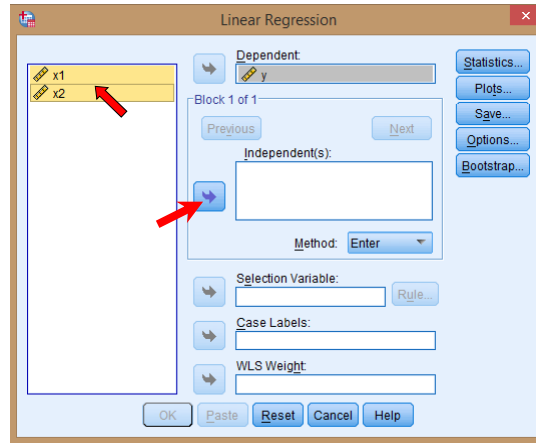
... καθορισμός εξαρτημένης (**Dependent**) μεταβλητής ...



20

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

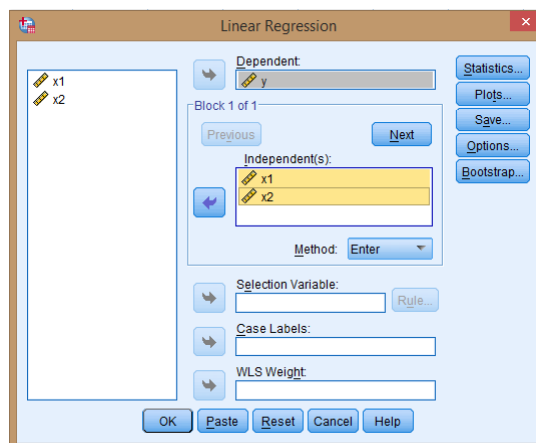
... καθορισμός ανεξάρτητων (**Independents**) μεταβλητών ...



21

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

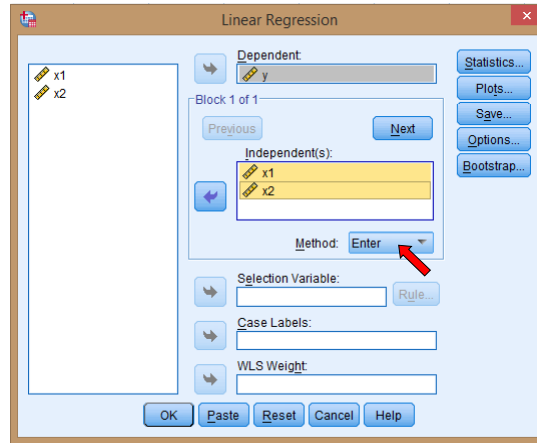
... καθορισμός ανεξάρτητων (**Independents**) μεταβλητών ...



22

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

... επιλογή μεθόδου εισαγωγής των **ανεξάρτητων (Independents)** μεταβλητών στο μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης...

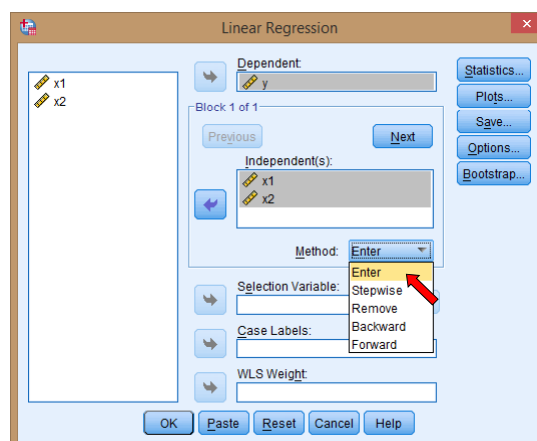


23

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

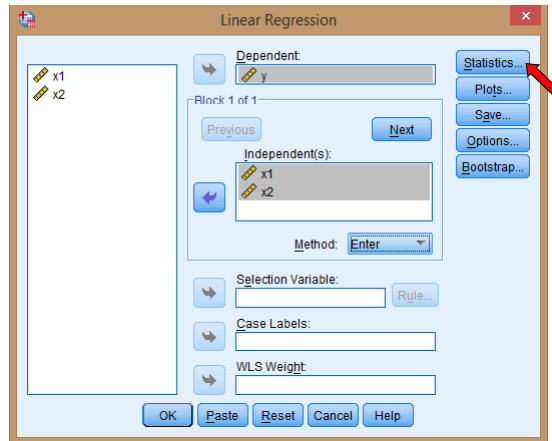
... επιλογή μεθόδου εισαγωγής των **ανεξάρτητων (Independents)** μεταβλητών στο μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης...

Επιλέγοντας
Method Enter
εισέρχονται
στο μοντέλο της παλινδρόμησης
όλες οι **ανεξάρτητες** μεταβλητές
(ανεξάρτητα από το
αν συμβάλλουν ή όχι σημαντικά
στην πρόβλεψη
της εξαρτημένης μεταβλητής)



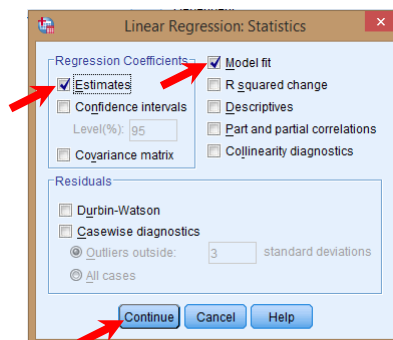
24

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



25

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



26

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Regression

Variables Entered/Removed^a

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	x2, x1 ^b	.	Enter

a. Dependent Variable: y

b. All requested variables entered.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099

a. Predictors: (Constant), x2, x1

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^b
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x2, x1

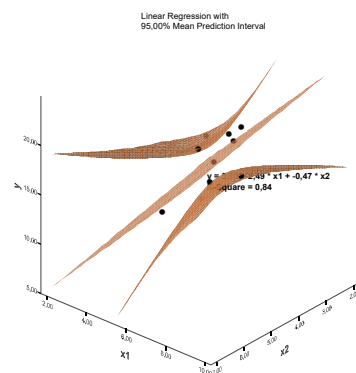
Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660

a. Dependent Variable: y

27

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

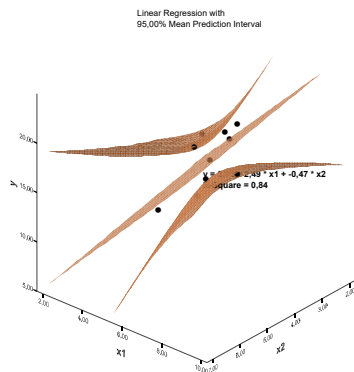


**Πώς καθορίζεται
η διεύθυνση
του επιπέδου παλινδρόμησης;**



28

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



Από τους συντελεστές παλινδρόμησης

(α, b_1, b_2)

$$\hat{Y} = \alpha + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660

a. Dependent Variable: y

29

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Καθορισμός συντελεστών παλινδρόμησης

$$\sum (Y - \hat{Y})^2 = \sum (Y - a - b_1 \cdot X_1 - b_2 \cdot X_2)^2 = \text{ελάχιστο}$$

όταν

$$\begin{aligned} \sum Y &= na + b_1 \sum X_1 + b_2 \sum X_2 \\ \sum X_1 Y &= a \sum X_1 + b_1 \sum X_1^2 + b_2 \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 Y &= a \sum X_2 + b_1 \sum X_1 X_2 + b_2 \sum X_2^2 \end{aligned}$$

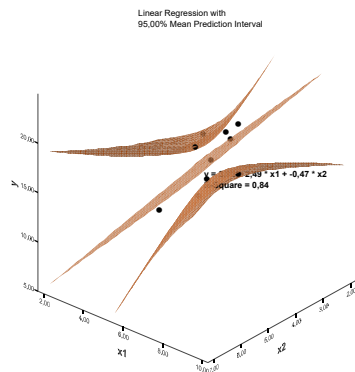


$$\begin{aligned} \alpha &= \\ b_1 &= \\ b_2 &= \end{aligned}$$

30

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Καθορισμός συντελεστών παλινδρόμησης



$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

$$\hat{Y} = 3.919 + 2.491 \cdot X_1 - 0.466 \cdot X_2$$

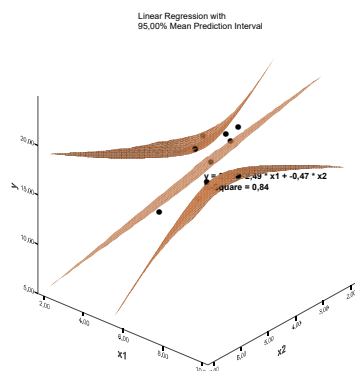
Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1					
	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459

a. Dependent Variable: y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

31



$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

$$\hat{Y} = 3.919 + 2.491 \cdot X_1 - 0.466 \cdot X_2$$

Ερμηνεία συντελεστών παλινδρόμησης

a = η τιμή του Y, όταν οι τιμές των μεταβλητών X_1 και X_2 είναι 0

b₁ = μετράει την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής Y ανά μονάδα μεταβολής της X_1 , όταν η X_2 είναι σταθερή

b₂ = μετράει την αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής Y ανά μονάδα μεταβολής της X_2 , όταν η X_1 είναι σταθερή

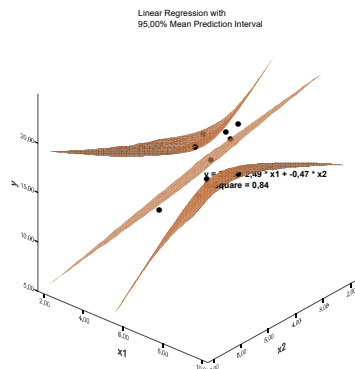
Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1					
	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459

a. Dependent Variable: y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

32



$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

Είναι αναγκαίες ΟΛΕΣ
οι ανεξάρτητες μεταβλητές
για την πρόβλεψη της εξαρτημένης;

Συμβάλλουν ΟΛΕΣ
οι ανεξάρτητες μεταβλητές
στην πρόβλεψη της εξαρτημένης;

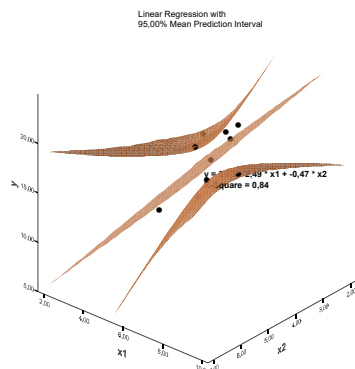


Coefficients ^a					
Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	,459

a. Dependent Variable: y

33

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

Είναι αναγκαίες ΟΛΕΣ
οι ανεξάρτητες μεταβλητές
για την πρόβλεψη της εξαρτημένης;

Συμβάλλουν ΟΛΕΣ
οι ανεξάρτητες μεταβλητές
στην πρόβλεψη της εξαρτημένης;

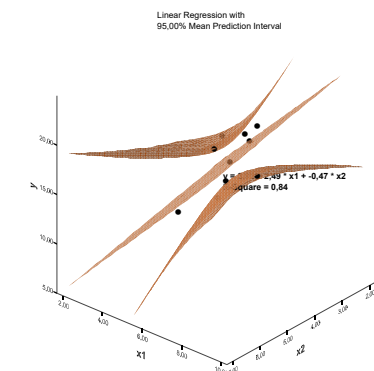
Coefficients ^a					
Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	,459

a. Dependent Variable: y

Για να υπάρχει πραγματικά σχέση
μεταξύ της εξαρτημένης Y
και της κάθε ανεξάρτητης X μεταβλητής
θα πρέπει ο αντίστοιχος συντελεστής B
(Unstandardized Coefficient)
να είναι
στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0.

34

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459

a. Dependent Variable: y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

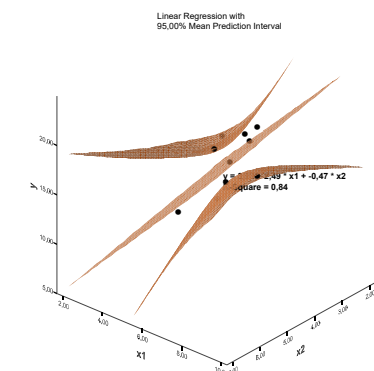
Είναι αναγκαίες ΟΛΕΣ οι ανεξάρτητες μεταβλητές για την πρόβλεψη της εξαρτημένης;

Συμβάλλουν ΟΛΕΣ οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην πρόβλεψη της εξαρτημένης;

?

Αν ο συντελεστής παλινδρόμησης B
(Unstandardized Coefficient)
μιας ανεξάρτητης μεταβλητής
ΔΕΝ είναι
στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0
τότε
ΔΕΝ υπάρχει πραγματικά **σχέση**
μεταξύ
της εξαρτημένης Y και
της συγκεκριμένης ανεξάρτητης μεταβλητής X,
οπότε
ΔΕΝ θα πρέπει
να συμπεριλαμβάνεται
στο μοντέλο παλινδρόμησης.

35



Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418	1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459

a. Dependent Variable: y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

$$\hat{Y} = a + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$$

Είναι αναγκαίες ΟΛΕΣ οι ανεξάρτητες μεταβλητές για την πρόβλεψη της εξαρτημένης;

Συμβάλλουν ΟΛΕΣ οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην πρόβλεψη της εξαρτημένης;

?

Αυτός η έλεγχος επιτυγχάνεται μέσω της
t – τιμής
από τον πίνακα Coefficients.

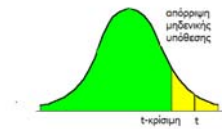
$$t = \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

b_i = ο συντελεστής παλινδρόμησης της συγκεκριμένης μεταβλητής X_i
 S_{b_i} = το τυπικό σφάλμα του συγκεκριμένου συντελεστή παλινδρόμησης

$$t_{x_1} = \frac{2.491}{0.703} = 3.544 \quad t_{x_2} = \frac{-0.466}{1.016} = -0.459$$

36

$$t_{x_1} = \frac{b_{x_1}}{S_{x_1}} = \frac{2.491}{0.703} = 3.544$$

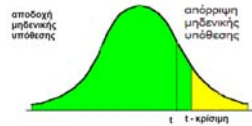


Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3.919	2.418		1.621	.149
	x1	2.491	.703	1.024	3.544	.009
	x2	-.466	1.016	-.133	-.459	.660

a. Dependent Variable: y

$$t_{x_2} = \frac{b_{x_2}}{S_{x_2}} = \frac{-0.466}{1.016} = -0.459$$

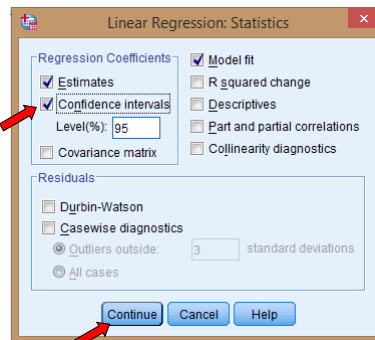


Εφόσον το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην **t – τιμή** είναι **μικρότερο από 0.05** ο συντελεστής B_{x_1} είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0, άρα οι δύο μεταβλητές **έχουν σχέση** μεταξύ τους και **η μεταβλητή x1 θα πρέπει να συμπεριληφθεί στο μοντέλο παλινδρόμησης.**

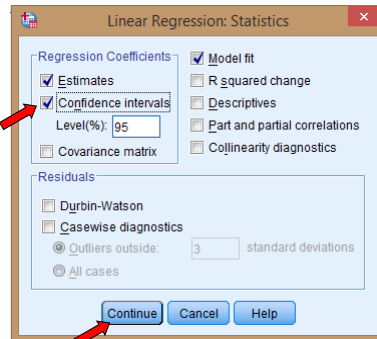
Εφόσον το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην **t – τιμή** είναι **μεγαλύτερο από 0.05** ο συντελεστής B_{x_2} ΔΕΝ είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0, άρα οι δύο μεταβλητές **ΔΕΝ έχουν σχέση** μεταξύ τους και **η μεταβλητή x2 ΔΕΝ θα πρέπει να συμπεριληφθεί στο μοντέλο παλινδρόμησης.**

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης (confidence intervals) των συντελεστών παλινδρόμησης



Διαστήματα εμπιστοσύνης (confidence intervals) των συντελεστών παλινδρόμησης



Coefficients^a

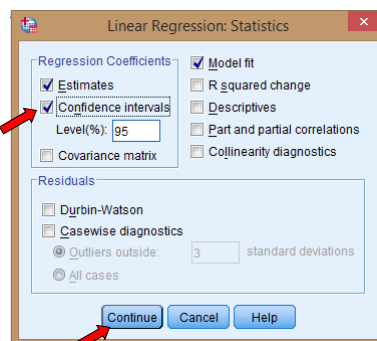
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149	-1,798	9,636
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009	,829	4,153
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660	-2,870	1,937

a. Dependent Variable: y

39

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης (confidence intervals) των συντελεστών παλινδρόμησης



Τα διαστήματα εμπιστοσύνης δηλώνουν μεταξύ ποιών τιμών θα βρίσκονται οι συντελεστές παλινδρόμησης του πληθυσμού.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95,0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149	-1,798	9,636
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009	,829	4,153
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660	-2,870	1,937

a. Dependent Variable: y

40

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης (confidence intervals) των συντελεστών παλινδρόμησης

Όταν το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην t -τιμή είναι **μικρότερο** από 0.05 και ο συντελεστής B είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0,

οπότε η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή **θα πρέπει να συμπεριληφθεί** στο μοντέλο παλινδρόμησης,

το διάστημα εμπιστοσύνης των συντελεστών παλινδρόμησης **ΔΕΝ περιλαμβάνει την τιμή μηδέν (0)**.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149	-1,798	9,636
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009	,829	4,153
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660	-2,870	1,937

a. Dependent Variable: y

41

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Διαστήματα εμπιστοσύνης (confidence intervals) των συντελεστών παλινδρόμησης

Όταν το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην t -τιμή είναι **μεγαλύτερο** από 0.05, και ο συντελεστής B **ΔΕΝ** είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το 0,

οπότε η αντίστοιχη ανεξάρτητη μεταβλητή **ΔΕΝ θα πρέπει να συμπεριληφθεί** στο μοντέλο παλινδρόμησης,

το διάστημα εμπιστοσύνης των συντελεστών παλινδρόμησης **περιλαμβάνει την τιμή μηδέν (0)**.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149	-1,798	9,636
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009	,829	4,153
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660	-2,870	1,937

a. Dependent Variable: y

42

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Κατά πόσο το συγκεκριμένο μοντέλο πολλαπλής παλινδρόμησης
είναι κατάλληλο για να εκφράσει τα αρχικά δεδομένα;

Πόσο ισχυρή είναι η σχέση
μεταξύ
της εξαρτημένης μεταβλητής Y
και των ανεξάρτητων μεταβλητών X_i ;



Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού R^2

43

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού R^2

Εκτιμά
την ισχύ της σχέσης μεταξύ
της εξαρτημένης μεταβλητής Y και των ανεξάρτητων μεταβλητών X_i

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2} = \frac{\text{προβλεπόμενη μεταβολή του } Y}{\text{συνολική μεταβολή του } Y}$$

Εκφράζει
το ποσοστό της διακύμανσης της **εξαρτημένης** μεταβλητής Y,
που ερμηνεύεται από τις **ανεξάρτητες** μεταβλητές X_i

44

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού R^2

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$$

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099

a. Predictors: (Constant), x2, x1

$R^2 = 0.836$

Το **83.6%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, ερμηνεύεται (μπορεί να προβλεφθεί) από όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές X

45

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Όμως !!!

46

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099

a. Predictors: (Constant), x2, x1

Παρόλο που

ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 (coefficient of determination),
ο οποίος εκφράζει
το ποσοστό της διακύμανσης (της μεταβλητότητας) της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
που ερμηνεύεται (που μπορεί να προβλεφθεί) από ΟΛΕΣ τις ανεξάρτητες μεταβλητές X,
είναι ιδιαίτερα υψηλός (0.836) ...

47

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^b
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x2, x1

... και μάλιστα **στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το μηδέν (0)**,
καθώς ...

48

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

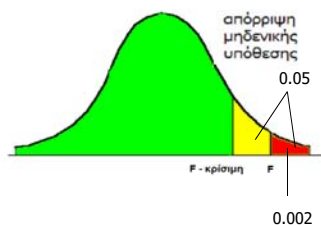
ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^b
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x2, x1

... και μάλιστα **στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το μηδέν (0)**,
καθώς ...



...το επίπεδο σημαντικότητας
που αντιστοιχεί στην F – τιμή
(κόκκινη περιοχή)
είναι μικρότερο
από το επίπεδο σημαντικότητας 0.05
(κίτρινη + κόκκινη περιοχή).

49

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

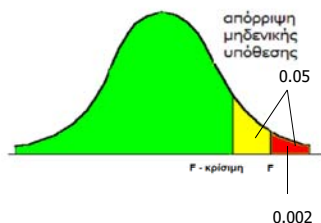
ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^b
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x2, x1

... και μάλιστα **στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το μηδέν (0)**,
καθώς ...



...το επίπεδο σημαντικότητας
που αντιστοιχεί στην F – τιμή
(κόκκινη περιοχή)
είναι μικρότερο
από το επίπεδο σημαντικότητας 0.05
(κίτρινη + κόκκινη περιοχή).

... όταν η **F – τιμή είναι μεγαλύτερη** από την F – κρίσιμη
(βρίσκεται δεξιά της)
σημαίνει ότι το **Mean Square Regression (113.756)**
ΕΙΝΑΙ πολύ μεγαλύτερο από το **Mean Square Residual (6.355)**,

οπότε
το ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
που ερμηνεύεται από ΟΛΕΣ τις ανεξάρτητες μεταβλητές X
(Mean Square Regression)
είναι στατιστικά σημαντικά κατά πολύ μεγαλύτερο
από το ποσό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,
που δεν ερμηνεύεται από ΟΛΕΣ τις ανεξάρτητες μεταβλητές X
(Mean Square Residual) και

κατά συνέπεια το **R-square**
είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0)...

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

... **ΔΕΝ** θα πρέπει να συμπεριληφθούν
στο μοντέλο παλινδρόμησης
και οι δύο **ανεξάρτητες μεταβλητές** ...

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660

a. Dependent Variable: y

Η **X1** έχει, όμως
η **X2 ΔΕΝ** έχει
στατιστικά σημαντική σχέση
με την εξαρτημένης μεταβλητής Y

51

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

... συνεπώς **ΔΕΝ** θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί
η μέθοδος **Enter**

(όπου εισέρχονται στο μοντέλο παλινδρόμησης ΟΛΕΣ οι ανεξάρτητες μεταβλητές ταυτόχρονα),

αλλά

η μέθοδος **Forward**

(όπου ελέγχεται βάσει ενός κριτηρίου ποια είναι η καλύτερη μεταβλητή
που θα πρέπει να εισέλθει πρώτη στο μοντέλο, κ.ο.κ.),

η μέθοδος **Backward**

(που κάνει την αντίστροφη διαδικασία,
δηλαδή ξεκινά με το μοντέλο που περιέχει ΟΛΕΣ τις ανεξάρτητες μεταβλητές
και αρχίζει να βγάζει τις μεταβλητές που ΔΕΝ ικανοποιούν συγκεκριμένα κριτήρια, κ.ο.κ.),

Και οι δυο αυτές μέθοδοι έχουν το ίδιο **μειονέκτημα**:

Αν μια μεταβλητή μπει στο μοντέλο ή βγει από το μοντέλο ΔΕΝ γυρίζει πίσω.

Δηλαδή μια μεταβλητή που μπήκε δεύτερη ή τρίτη μπορεί αν κάνει μια μεταβλητή που μπήκε προηγούμενα στο μοντέλο άχρηστη,
αλλά επειδή μπήκε πιο νωρίς στο μοντέλο ΔΕΝ μπορεί να βγει.

η stepwise (ακόμη καλύτερα)

κάνει ένα συνδυασμό των δύο προηγούμενων μεθόδων.

Βρίσκει την καλύτερη μεταβλητή για να εισέλθει στο μοντέλο και στη συνέχεια ελέγχει αν θα πρέπει να βγει από το μοντέλο,
συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για όλες τις μεταβλητές).

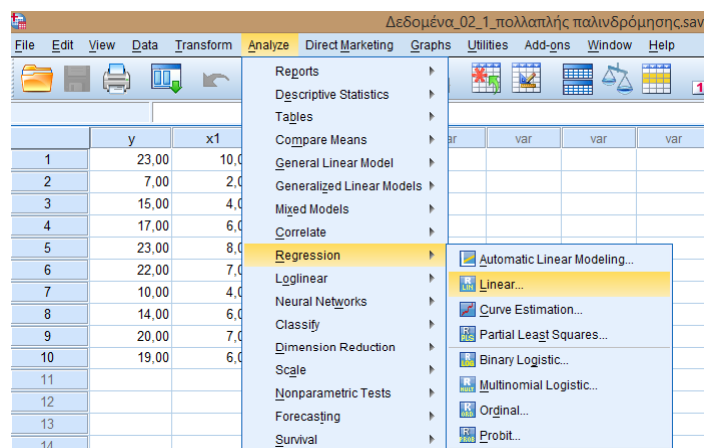
52

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

stepwise

53

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



54

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

stepwise

55

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Variables Entered/Removed ^a			
Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	x1		Stepwise (Criteria: Probability of F-to-enter ≤ .050, Probability of F-to-remove ≥ .100).

a. Dependent Variable: y

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	.912 ^a	.832	.810	2.39338	.832	39.484	1	8	.000

a. Predictors: (Constant), x1

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	226,174	1	226,174	39,484	.000 ^b
	Residual	45,826	8	5,728		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x1

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,696	2,249		1,644	.139	-1,489	8,881
	x1	2,217	,353	.912	6,284	.000	1,404	3,031

a. Dependent Variable: y

Excluded Variables^a

Model	Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
1	x2	-.133 ^b	.459	.660	.171
					.280

a. Dependent Variable: y

b. Predictors in the Model: (Constant), x1

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

56

Variables Entered/Removed ^a			
Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	x1		Stepwise (Criteria: Probability-of- F-to-enter <= . 050, Probability-of- F-to-remove >= .100).

stepwise

a. Dependent Variable: y

57

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Coefficients ^a								
		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95.0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	3,696	2,249		1,644	,139	-1,489	8,881
	x1	2,217	,353	,912	6,284	,000	1,404	3,031

a. Dependent Variable: y

Η ανεξάρτητη μεταβλητή **X1**

συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης (**t= 6.284; p< 0.05**)

Excluded Variables ^a						
Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
						Tolerance
1	x2	-,133 ^b	-,459	,660	-,171	,280

a. Dependent Variable: y

b. Predictors in the Model: (Constant), x1

Η ανεξάρτητη μεταβλητή **X2**

ΔΕΝ συμπεριλαμβάνεται στο μοντέλο της πολλαπλής παλινδρόμησης (**t= 0.459; P= 0.660 > 0.05**)

58

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,912 ^a	,832	,810	2,39338	,832	39,484	1	8	,000

a. Predictors: (Constant), x1

$R^2 = 0.832$

Το **83.2%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, ερμηνεύεται (μπορεί να προβλεφθεί) **ΜΟΝΟ από την ανεξάρτητη μεταβλητή X1 ...**

ANOVA ^a						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	226,174	1	226,174	39,484	,000 ^b
	Residual	45,826	8	5,728		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x1

... και μάλιστα είναι **στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν (0)**,

59

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

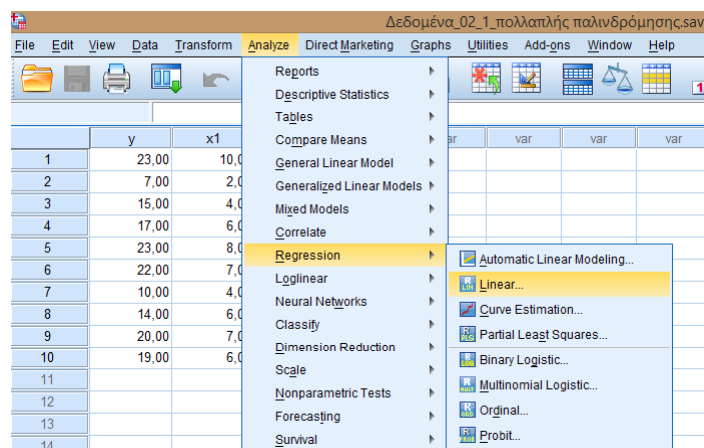
Πόσο συμβάλει
η **ΚΑΘΕ ανεξάρτητη** μεταβλητή
στην πρόβλεψη της εξαρτημένης

60

backward

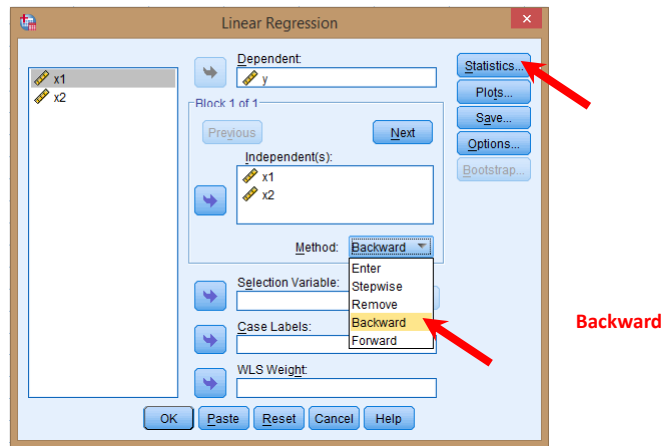
61

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



62

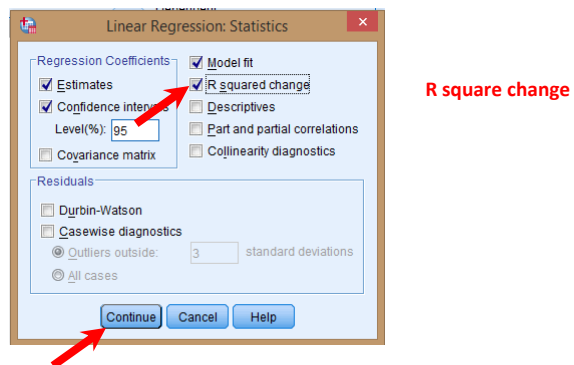
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.



63

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Το ΕΠΙΠΛΕΟΝ ποσοστό της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, που ερμηνεύεται από την ΚΑΘΕ ανεξάρτητη μεταβλητή X ...



64

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Variables Entered/Removed ^a			
Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	x2, x1 ^b	.	Enter Backward (criterion: Probability of F-to-remove >= ,100).
2	.	x2	

a. Dependent Variable: y

b. All requested variables entered.

Model Summary								
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics			
					R Square Change	F Change	df1	Sig. F Change
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099	,836	17,899	2	,002
2	,912 ^b	,832	,810	2,39338	-,005	,211	1	,660

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Predictors: (Constant), x1

ANOVA ^a					
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	Sig.
1	Regression	227,512	2	113,756	17,899
	Residual	44,488	7	6,355	,002 ^b
	Total	272,000	9		
2	Regression	226,174	1	226,174	39,484
	Residual	45,826	8	5,728	,000 ^c
	Total	272,000	9		

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x2, x1

c. Predictors: (Constant), x1

Coefficients ^a					
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	Sig.
		B	Std. Error	Beta	
1	(Constant)	3,919	2,418		,149
	x1	2,491	,703	1,024	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	,660
2	(Constant)	3,696	2,249		,139
	x1	2,217	,353	,912	,000

a. Dependent Variable: y

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Excluded Variables ^a					
Model		Beta In	t	Sig.	Partial Correlation
2	x2	-,133 ^b	-,459	,660	-,171

a. Dependent Variable: y

b. Predictors in the Model: (Constant), x1

65

Variables Entered/Removed ^a			
Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	x2, x1 ^b	.	Enter Backward (criterion: Probability of F-to-remove >= ,100).
2	.	x2	

a. Dependent Variable: y

b. All requested variables entered.

backward

66

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099	,836	17,899	2	7	,002
2	,912 ^b	,832	,810	2,39338	-,005	,211	1	7	,660

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Predictors: (Constant), x1

Όταν συμπεριλαμβάνονται **και οι δύο ανεξάρτητες** μεταβλητές (X1 και X2) στο μοντέλο παλινδρόμησης, **ερμηνεύουν το 83.6%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής (Y)

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	226,174	1	226,174	39,484	,000 ^b
	Residual	45,826	8	5,728		
	Total	272,000	9			
2	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^c
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x1

c. Predictors: (Constant), x1, x2

Το οποίο μάλιστα είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν

$$F_{2,7} = 17.899;$$

$$p = 0.002 < 0.05$$

67

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...Όμως ...

68

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660
2	(Constant)	3,696	2,249		1,644	,139
	x1	2,217	,353	,912	6,284	,000

a. Dependent Variable: y

Η ανεξάρτητη μεταβλητή **X2 ΔΕΝ έχει**
στατιστικά σημαντική σχέση με την εξαρτημένη μεταβλητή
 $t_{x2} = 0.459$; $p = 0.660 > 0.05$



Ο συντελεστής παλινδρόμησης B_{x2} της ανεξάρτητης μεταβλητής **X2 ΔΕΝ είναι** στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το μηδέν (0)

$H_0: b_{x2} = 0$



$H_A: b_{x2} \neq 0$



69

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Coefficients ^a						
Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660
2	(Constant)	3,696	2,249		1,644	,139
	x1	2,217	,353	,912	6,284	,000

a. Dependent Variable: y

ΜΟΝΟ η ανεξάρτητη μεταβλητή **X1 έχει**
στατιστικά σημαντική σχέση με την εξαρτημένη μεταβλητή
 $t_{x1} = 6.284$; $p < 0.05$



Ο συντελεστής παλινδρόμησης B_{x1} της ανεξάρτητης μεταβλητής **X1 είναι** στατιστικά σημαντικά διαφορετικός από το μηδέν (0)

$H_0: b_{x1} = 0$



$H_A: b_{x1} \neq 0$



70

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099	,836	17,899	2	7	,002
2	,912 ^b	,832	,810	2,39338	-,005	,211	1	7	,660

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Predictors: (Constant), x1

R Square	R Square	R Square Change
0,831522	,832	,832
0,836443		0,004921

Από την ανεξάρτητη μεταβλητή X1
ερμηνεύεται το **83.2%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y

Από την ανεξάρτητη μεταβλητή X2
ερμηνεύεται επιπλέον το **0.5%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y
το οποίο ΔΕΝ είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν

F Change_{1,7} = 0.211; p = 0.660 > 0.05

$H_0: R^2_{\text{Change}} = 0$  $H_A: R^2_{\text{Change}} \neq 0$ 

71

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...ΣΥΝΕΠΩΣ ...

72

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099	,836	17,899	2	7	,002
2	,912 ^b	,832	,810	2,39338	-,005	,211	1	7	,660

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Predictors: (Constant), x1

... στο μοντέλο παλινδρόμησης

θα πρέπει να συμπεριληφθεί **ΜΟΝΟ η ανεξάρτητη** μεταβλητή (**X1**) (και όχι και η X2), η οποία ερμηνεύει το **83.2%** της διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής (Y)

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	226,174	1	226,174	39,484	,000 ^b
	Residual	45,826	8	5,728		
	Total	272,000	9			
2	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^c
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x1

c. Predictors: (Constant), x1, x2

... και το οποίο μάλιστα είναι στατιστικά σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν

$$F_{1,8} = 39.484;$$

$$p = 0.002 < 0.05$$

73

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...συνοψίζοντας ...

Η ανεξάρτητη μεταβλητή **X1** έχει στατιστικά σημαντική σχέση

($t_{X1} = 6.284$; $p < 0.05$) με την εξαρτημένη μεταβλητή Y,

ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή **X2** δεν έχει στατιστικά σημαντική σχέση

($t_{X2} = 0.459$; $p = 0.660 > 0.05$) με την εξαρτημένη μεταβλητή Y.

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660
2	(Constant)	3,696	2,249		1,644	,139
	x1	2,217	,353	,912	6,284	,000

a. Dependent Variable: y

74

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...συνοψίζοντας ...

Η εξίσωση για την πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής Y, από την ανεξάρτητη μεταβλητή X₁, είναι

$$\hat{Y} = 3.696 + 2.217 \cdot X_1$$

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	3,919	2,418		1,621	,149
	x1	2,491	,703	1,024	3,544	,009
	x2	-,466	1,016	-,133	-,459	,660
2	(Constant)	3,696	2,249		1,644	,139
	x1	2,217	,353	,912	6,284	,000

a. Dependent Variable: y

75

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...συνοψίζοντας ...

και ερμηνεύει το 83.2% της συνολικής διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y,....

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	,915 ^a	,836	,790	2,52099	,836	17,899	2	7	,002
2	,912 ^b	,832	,810	2,39338	-,005	,211	1	7	,660

a. Predictors: (Constant), x2, x1

b. Predictors: (Constant), x1

...το οποίο είναι στατιστικά σημαντικό διάφορο του μηδενός

($F_{1,8} = 39.484$; $p = 0.002 < 0.05$)

ANOVA^a

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	226,174	1	226,174	39,484	,000 ^b
	Residual	45,826	8	5,728		
	Total	272,000	9			
2	Regression	227,512	2	113,756	17,899	,002 ^c
	Residual	44,488	7	6,355		
	Total	272,000	9			

a. Dependent Variable: y

b. Predictors: (Constant), x1

c. Predictors: (Constant), x1, x2

76

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

...συνοψίζοντας ...

Αν συμπεριλαμβανόταν και η ανεξάρτητη μεταβλητή X2, θα ερμηνευόταν το **83.6%** της συνολικής διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y. Ωστόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή X2 συμβάλει για την πρόβλεψη μόνο ενός επιπλέον 0.5% της συνολικής διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής Y, το οποίο δεν είναι στατιστικά σημαντικό ($F_{\text{Change } 1,7} = 0.211$; $p = 0.660 > 0.05$).

Model Summary									
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Change Statistics				
					R Square Change	F Change	df1	df2	Sig. F Change
1	.915 ^a	.836	.790	2,52099	.836	17.899	2	7	.002
2	.912 ^b	.832	.810	2,39338	-.005	.211	1	7	.660

a. Predictors: (Constant), x2, x1
b. Predictors: (Constant), x1

77

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Συγγραφή αποτελεσμάτων ...

Από την εφαρμογή της **πολλαπλής παλινδρόμησης**, για την **πρόβλεψη** των τιμών της ποσοτικής **εξαρτημένης** μεταβλητής (Y) **βάσει** των **ανεξάρτητων** μεταβλητών (X1 και X2),

διαπιστώθηκε μέσω της μεθόδου **backward** ότι

συμβάλει στατιστικά σημαντικά στην πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής Y μόνο η ανεξάρτητη μεταβλητή X1 ($t = 3.544$; $p < 0.05$), ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή X2 δεν συμβάλει στατιστικά σημαντικά ($t = 0.459$; $p = 0.660$), καθώς συνεισφέρει στην αύξηση του ποσοστού διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής που ερμηνεύεται από το μοντέλο πρόβλεψης μόνο κατά 0.5% ($F_{\text{Change } 1,7} = 0.211$; $p = 0.660$).

Η συμμετοχή και μόνο της ανεξάρτητης μεταβλητής X1 ερμηνεύει το 83.2% ($R^2 = 0.832$) της συνολικής διακύμανσης της εξαρτημένης μεταβλητής, το οποίο είναι στατιστικά σημαντικό ($F_{1,8} = 39.484$; $p < 0.05$) και η εξίσωση πρόβλεψης είναι:

$$Y = 3.696 + 2.217 \cdot X1$$

78

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Ερωτήσεις;



79

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

Youtube video_ Multiple Regression

Multiple Regression - SPSS(brief): <https://www.youtube.com/watch?v=JXRyCiuL46A>

Multiple Regression - SPSS (part 1): <https://www.youtube.com/watch?v=IWYENu0kCYE>

Multiple Regression - SPSS (part 2): https://www.youtube.com/watch?v=oi_oWh_4d78

Multiple Regression - SPSS (part 3): <https://www.youtube.com/watch?v=IUtYadNLV3s>

Multiple Regression - SPSS (part 4): <https://www.youtube.com/watch?v=plgUOIHwRKk>

Multiple Regression - SPSS (part 5): <https://www.youtube.com/watch?v=Uj4G3rLIXA>

Hierarchical multiple regression – SPSS (part 1):

<https://www.youtube.com/watch?v=pkM4nXvP5Bo>

Hierarchical multiple regression – SPSS (part 2):

<https://www.youtube.com/watch?v=VHOLF6tyMVc>

Hierarchical multiple regression – SPSS (part 3):

https://www.youtube.com/watch?v=_usDTIlr9cQ

Hierarchical multiple regression – SPSS (part 4):

<https://www.youtube.com/watch?v=YxPRN4nGO7w>

80

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.