

Ανάλυση διακύμανσης για εξαρτημένες μετρήσεις
ως προς δύο παράγοντες
εκ των οποίων μόνο ο ένας είναι επαναλαμβανόμενος

Γούργουλης Βασίλης, Ph.D.
Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

1

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

- ☒ εξαρτημένα δείγματα
- ☒ **δύο παράγοντες** (ένας εξαρτημένος και ένας ανεξάρτητος)
- ☒ ένας επαναλαμβανόμενος παράγοντας (εξαρτημένος)
- ☒ ένας μη επαναλαμβανόμενος παράγοντας (ανεξάρτητος)
- ☒ άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων
- ☒ μέσο άθροισμα τετραγώνων των αποκλίσεων
- ☒ F - τιμή
- ☒ **κύρια επίδραση** του επαναλαμβανόμενου παράγοντα
- ☒ κύρια επίδραση του μη επαναλαμβανόμενου παράγοντα
- ☒ **αλληλεπίδραση** μεταξύ των δύο παραγόντων
- ☒ **τεστ πολλαπλών συγκρίσεων**

2

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Εφαρμόζεται όταν
τα δεδομένα ομαδοποιούνται με βάση
δύο ποιοτικές (ανεξάρτητες) μεταβλητές (παράγοντες)
εκ των οποίων μόνο ο ένας είναι επαναλαμβανόμενος

Π.χ. εξαρτημένη μεταβλητή: επίδοση σε ένα τεστ στόχου

παράγοντες:	Βαθμίδες (επίπεδα)
1 ^{ος} ανεξάρτητος παράγοντας (μη επαναλαμβανόμενος): Φύλο	{ Αγόρια Κορίτσια
2 ^{ος} εξαρτημένος παράγοντας (επαναλαμβανόμενος): Μέτρηση	{ 1 ^η μέτρηση 2 ^η μέτρηση 3 ^η μέτρηση 4 ^η μέτρηση 5 ^η μέτρηση ₃

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Επαναλαμβανόμενος παράγοντας «χρονική στιγμή μέτρησης»

		1. 1 ^η μέτρ	2. 2 ^η μέτρ	3. 3 ^η μέτρ	4. 4 ^η μέτρ	5. 5 ^η μέτρ	$\bar{X}_{\bullet R \bullet}$
Μη επαναλαμβανόμενος παράγοντας: Φύλο	1. Αγόρια	$X_{111}=2$	$X_{112}=7$	$X_{113}=6$	$X_{114}=7$	$X_{115}=9$	$\bar{X}_{1R \bullet}=6.2$
		$X_{211}=4$	$X_{212}=3$	$X_{213}=7$	$X_{214}=12$	$X_{215}=7$	$\bar{X}_{21 \bullet}=8$
		$X_{311}=7$	$X_{312}=6$	$X_{313}=4$	$X_{314}=12$	$X_{315}=7$	$\bar{X}_{31 \bullet}=7.8$
		$X_{411}=1$	$X_{412}=3$	$X_{413}=6$	$X_{414}=6$	$X_{415}=6$	$\bar{X}_{41 \bullet}=3.8$
		$\bar{X}_{\bullet 11}=3.5$	$\bar{X}_{\bullet 12}=4.75$	$\bar{X}_{\bullet 13}=5.75$	$\bar{X}_{\bullet 14}=9.25$	$\bar{X}_{\bullet 15}=7.25$	$\bar{X}_{\bullet 1 \bullet}=6.1$
	2. Κορίτσια	$X_{121}=4$	$X_{122}=4$	$X_{123}=7$	$X_{124}=9$	$X_{125}=1$	$\bar{X}_{1R \bullet}=5$
		$X_{221}=10$	$X_{222}=12$	$X_{223}=12$	$X_{224}=12$	$X_{225}=16$	$\bar{X}_{22 \bullet}=12.4$
		$X_{321}=8$	$X_{322}=7$	$X_{323}=8$	$X_{324}=12$	$X_{325}=10$	$\bar{X}_{32 \bullet}=9$
		$X_{421}=5$	$X_{422}=7$	$X_{423}=6$	$X_{424}=6$	$X_{425}=8$	$\bar{X}_{42 \bullet}=6.6$
		$\bar{X}_{\bullet 11}=6.75$	$\bar{X}_{\bullet 12}=7.5$	$\bar{X}_{\bullet 13}=8.25$	$\bar{X}_{\bullet 14}=10$	$\bar{X}_{\bullet 15}=8.75$	$\bar{X}_{\bullet 1 \bullet}=8.25$
							$\bar{X}_{\bullet \bullet 1}=5.125$
							$\bar{X}_{\bullet \bullet 2}=6.125$
							$\bar{X}_{\bullet \bullet 3}=7$
							$\bar{X}_{\bullet \bullet 4}=9.625$
							$\bar{X}_{\bullet \bullet 5}=8$

i = άτομα R = παράγοντας γραμμών C = παράγοντας στηλών $\bar{X}_{\bullet \bullet \bullet}=7.175$

4

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Ερωτήματα

1. Υπάρχει (;) σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ του παράγοντα των στηλών (C) και του παράγοντα των γραμμών (R) δηλαδή είναι ίδια η εξέλιξη των μέσων όρων όλων των βαθμίδων του ενός παράγοντα (παράγοντα στηλών C) για όλες τις βαθμίδες του άλλου παράγοντα (παράγοντα γραμμών R), δηλαδή η εξέλιξη των μέσων όρων των αγοριών κατά την 1^η, 2^η, 3^η, 4^η, 5^η μέτρηση είναι ίδια με την εξέλιξη των κοριτσιών στις αντίστοιχες μετρήσεις
2. Υπάρχει (;) σημαντική επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R) δηλαδή υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων (Αγόρια, Κορίτσια) του μη επαναλαμβανόμενου παράγοντα των γραμμών (φύλο)
3. Υπάρχει (;) σημαντική επίδραση του παράγοντα των στηλών (C) δηλαδή υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων (1^η, 2^η, 3^η, 4^η, 5^η) του επαναλαμβανόμενου παράγοντα των στηλών (χρονική στιγμή μέτρησης)
4. Εφόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων κάποιου παράγοντα, μεταξύ ποιών μέσων όρων, δηλαδή μεταξύ ποιών βαθμίδων του παράγοντα, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

5

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}_{...}$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...} = X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{iR.} + \bar{\bar{X}}_{iR.} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

6

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της **κάθε παρατήρησης** από το μεγάλο μέσο

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}...$$

μπορεί να αναλυθεί

1. στην απόκλιση **της κάθε παρατήρησης**
από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση) $(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$
2. στην απόκλιση **του μέσου όρου του κάθε ατόμου**
από το μεγάλο μέσο όρο $(\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}...)$

7

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν **τετραγωνίσουμε**
και **αθροίσουμε**

- ως προς τις **γραμμές R**
- ως προς τις **στήλες C** και
- ως προς τα **άτομα N**

προκύπτει

$$\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{\bar{X}}...) ^2 =$$

Συνολικό
άθροισμα
τετραγώνων

$$C \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}...) ^2 + \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR.}) ^2$$

Μεταξύ των ατόμων
άθροισμα
τετραγώνων

Εντός των ατόμων
άθροισμα
τετραγώνων

8

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση του μέσου όρου του κάθε ατόμου από το μεγάλο μέσο όρο

$$\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}...$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}... = \bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.R.} + \bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}...$$

9

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Οπότε

αν τετραγωνίσουμε
και αθροίσουμε

- ως προς τις γραμμές R
- ως προς τις στήλες C και
- ως προς τα άτομα N

για το άθροισμα τετραγώνων μεταξύ των ατόμων

προκύπτει

$$C \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}...) ^2 =$$

$$C \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.R.}) ^2 + N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}...) ^2$$

10

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$C \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{\bar{X}}_{...})^2 =$$

άθροισμα τετραγώνων **μεταξύ των ατόμων**

$$N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}_{...})^2 + C \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.R.})^2$$

άθροισμα τετραγώνων **μεταξύ των γραμμών**

άθροισμα τετραγώνων **μεταξύ των ατόμων εντός των γραμμών**

11

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση **της κάθε παρατήρησης** από **το μέσο όρο του κάθε ατόμου**
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

12

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

$$\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.RC} +$$

Μέσος όρος
ατόμων
σε γραμμές (R) και στήλες (C)

13

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

$$\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.RC} +$$

$$\bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{.R.} +$$

Μέσος όρος
γραμμών (R)

14

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

$$\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.RC} +$$

$$\bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{.R.} +$$

$$\bar{X}_{..C} - \bar{X}_{..C} +$$

Μέσος όρος
στηλών (C)

15

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

$$\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.RC} +$$

$$\bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{.R.} +$$

$$\bar{X}_{..C} - \bar{X}_{..C} +$$

$$\bar{\bar{X}}_{...} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Μεγάλος
μέσος όρος

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μέσο όρο του κάθε ατόμου
(στο οποίο ανήκει η παρατήρηση)

$$(X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})$$

με προσθαφαιρέσεις μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} =$$

$$X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} +$$

$$\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.RC} +$$

$$\bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{.R.} +$$

$$\bar{X}_{..C} - \bar{X}_{..C} +$$

$$\bar{\bar{X}}_{...} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

17

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Οπότε

αν **τετραγωνίσουμε**
και **αθροίσουμε**

- ως προς τις **γραμμές** R
- ως προς τις **στήλες** C και
- ως προς τα **άτομα** N

για το άθροισμα τετραγώνων **εντός των ατόμων**

προκύπτει

$$\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})^2 =$$

$$N \cdot R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...})^2 +$$

$$N \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...})^2 +$$

$$\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.RC} + \bar{X}_{.R.})^2$$

18

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR.})^2 =$$

άθροισμα τετραγώνων
εντός των ατόμων

$$N \cdot R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...})^2 +$$

άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των στηλών

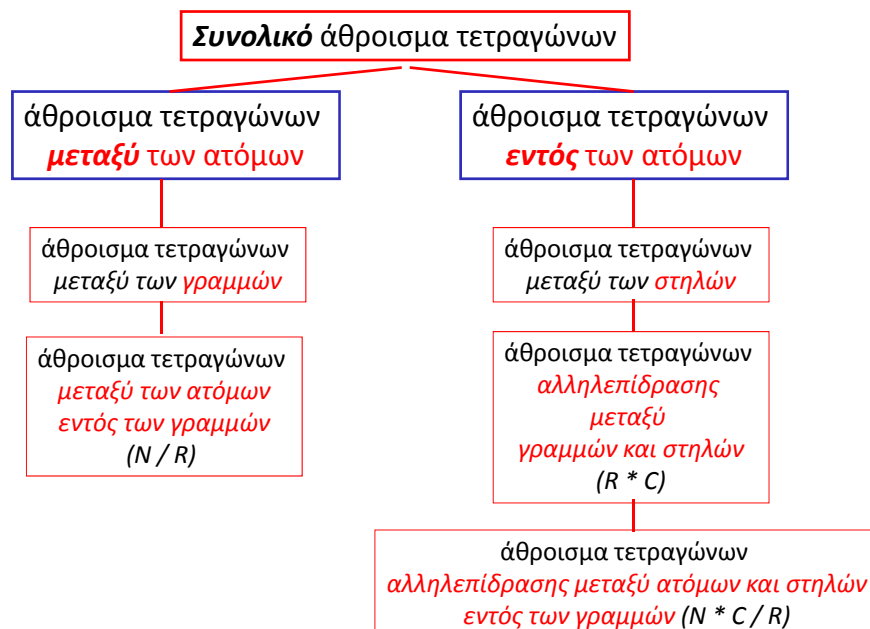
$$N \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...})^2 +$$

άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης
μεταξύ
γραμμών και στηλών
(R * C)

$$\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.RC} + \bar{X}_{.R.})^2$$

άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης
μεταξύ
ατόμων και στηλών
εντός των γραμμών
(N * C / R)

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



20

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Το κάθε άθροισμα τετραγώνων
έχει τους δικούς του **βαθμούς ελευθερίας**

άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των γραμμών

R - 1

άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των στηλών

C - 1

άθροισμα τετραγώνων
**μεταξύ των ατόμων
εντός των γραμμών**
(N / R)

R (N-1)

άθροισμα τετραγώνων
**αλληλεπίδρασης
μεταξύ
γραμμών και στηλών**
(R * C)

(R-1) (C-1)

άθροισμα τετραγώνων
**αλληλεπίδρασης
μεταξύ ατόμων και στηλών εντός των γραμμών**
(N * C / R)

R (N-1) (C-1)

21

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Διαιρώντας τα

αθροίσματα τετραγώνων (Sum of Squares)

με τους αντίστοιχους **βαθμούς ελευθερίας**

προκύπτουν τα

μέσα αθροίσματα τετραγώνων (Mean Squares)

(τα οποία αποτελούν **έκφραση διακύμανσης**)

22

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσα αθροίσματα τετραγώνων

Μέσο τετράγωνο **γραμμών**

$$S_R^2 = \frac{N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{\cdot R} - \bar{\bar{X}} \dots)^2}{R - 1}$$

Μέσο τετράγωνο **στηλών**

$$S_C^2 = \frac{N \cdot R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{\cdot \cdot C} - \bar{\bar{X}} \dots)^2}{C - 1}$$

Μέσο τετράγωνο **αλληλεπίδρασης
γραμμών και στηλών
(R * C)**

$$S_{RC}^2 = \frac{N \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{\cdot RC} - \bar{X}_{\cdot R} - \bar{X}_{\cdot \cdot C} + \bar{\bar{X}} \dots)^2}{(R - 1) \cdot (C - 1)}$$

Μέσο τετράγωνο
**ατόμων εντός των γραμμών
(N / R)**

$$S_{NR}^2 = \frac{C \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR} - \bar{X}_{\cdot R})^2}{R \cdot (N - 1)}$$

Μέσο τετράγωνο **αλληλεπίδρασης
ατόμων και στηλών εντός των γραμμών
(N * C / R)**

$$S_{NRC}^2 = \frac{\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR} - \bar{X}_{\cdot RC} + \bar{X}_{\cdot R})^2}{R \cdot (N - 1) \cdot (C - 1)}$$

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων μεταξύ των **γραμμών** (R)

$$S_R^2 = \frac{N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{\cdot R} - \bar{\bar{X}} \dots)^2}{R - 1}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων (μέσα σε κάθε ομάδα R) και
- στην **επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R)**

Μέσο άθροισμα τετραγώνων ατόμων εντός των γραμμών (N/R)

$$S_{NR}^2 = \frac{C \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (\bar{X}_{iR.} - \bar{X}_{.R.})^2}{R \cdot (N - 1)}$$

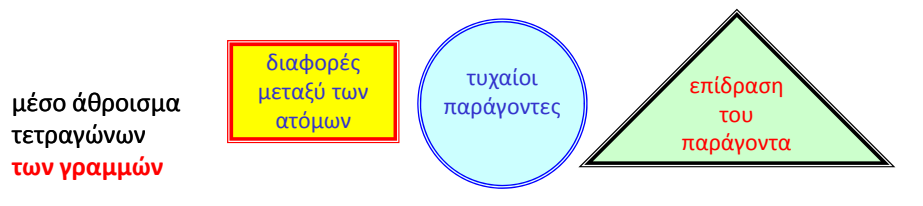
εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων (μέσα σε κάθε ομάδα R)

25

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$$



Μικρή επίδραση του παράγοντα – μικρή F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$$



Μεγάλη επίδραση του παράγοντα – μεγάλη F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν
υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των **γραμμών** (R)
τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων των **γραμμών** **>** μέσο άθροισμα τετραγώνων **ατόμων εντός των γραμμών**

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- στην επίδραση του παράγοντα των γραμμών
- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων

$$S_R^2 > S_{NR}^2$$

31

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \mu_{.1.} = \mu_{.2.}$

(**ΔΕΝ** υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών)

Εναλλακτική υπόθεση: $H_A : \mu_{.1.} \neq \mu_{.2.}$

(**υπάρχει** κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών)

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2}$

Αν
η F_R - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)
απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση
και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση
οπότε
υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των **γραμμών** (R)

32

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων μεταξύ των στηλών (C)

$$S_C^2 = \frac{N \cdot R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...})^2}{C - 1}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων (μέσα σε κάθε ομάδα R) και
- στην επίδραση του παράγοντα των στηλών (C)

33

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης μεταξύ γραμμών και στηλών (R*C)

$$S_{RC}^2 = \frac{N \cdot \sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...})^2}{(R - 1) \cdot (C - 1)}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων (μέσα σε κάθε ομάδα R) και
- στην αλληλεπίδραση μεταξύ του παράγοντα των γραμμών (R) και του παράγοντα των στηλών (C)

34

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης μεταξύ ατόμων και στηλών εντός των γραμμών ($N \cdot C / R$)

$$S_{NRC}^2 = \frac{\sum_{C=1}^C \sum_{R=1}^R \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{iR\cdot} - \bar{X}_{\cdot RC} + \bar{X}_{\cdot R\cdot})^2}{R \cdot (N - 1) \cdot (C - 1)}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων (μέσα σε κάθε ομάδα R)

35

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν
 υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των **στηλών** (C)
 τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων
 των **στηλών**



μέσο άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης
μεταξύ ατόμων και στηλών
εντός των γραμμών

- | | |
|---|---------------------------------|
| • σε τυχαίους παράγοντες | • σε τυχαίους παράγοντες |
| • σε διαφορές μεταξύ των ατόμων | • σε διαφορές μεταξύ των ατόμων |
| • στην <u>επίδραση του παράγοντα των στηλών</u> | |

$$S_C^2 > S_{NRC}^2$$

36

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \mu_{..1} = \mu_{..2} = \mu_{..3}$

(ΔΕΝ υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών)

Εναλλακτική υπόθεση: $H_A : \mu_{..1} \neq \mu_{..2} \neq \mu_{..3}$

(υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών)

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_C = \frac{S_C^2}{S_{NRC}^2}$

Αν

η F_C - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)

απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση

οπότε

υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών (C)

37

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν

υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων

τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων
**αλληλεπίδρασης μεταξύ
γραμμών και στηλών**



μέσο άθροισμα τετραγώνων
**αλληλεπίδρασης μεταξύ
ατόμων και στηλών
εντός των γραμμών**

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- στην αλληλεπίδραση
μεταξύ των παραγόντων

- σε τυχαίους παράγοντες
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων

$$S_{RC}^2 > S_{NRC}^2$$

38

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: **ΔΕΝ υπάρχει αλληλεπίδραση**
μεταξύ των δύο παραγόντων

Εναλλακτική υπόθεση: **υπάρχει αλληλεπίδραση**
μεταξύ των δύο παραγόντων

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_{RC} = \frac{S_{RC}^2}{S_{NRC}^2}$

Αν

η F_{RC} - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)

απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση

οπότε

υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραγόντων ($R \times C$)

39

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

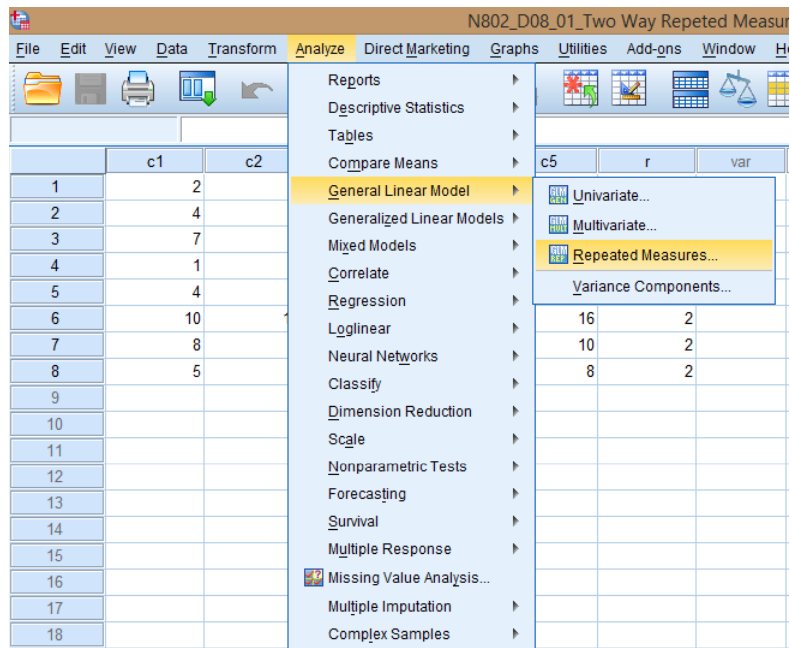
Μη επαναλαμβανόμενος παράγοντας

Βαθμίδες επαναλαμβανόμενου παράγοντα (C)

	c1	c2	c3	c4	c5	r
1	2	7	6	7	9	1
2	4	3	7	12	7	1
3	7	6	4	12	7	1
4	1	3	6	6	6	1
5	4	4	7	9	1	2
6	10	12	12	12	16	2
7	8	7	8	12	10	2
8	5	7	6	7	8	2

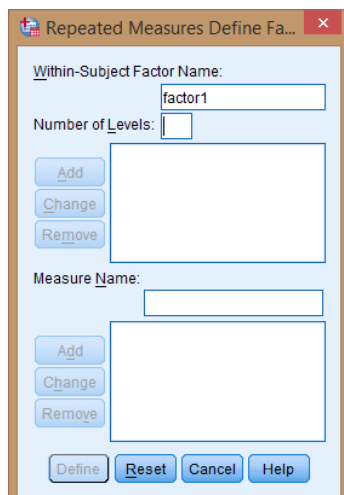
40

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



41

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

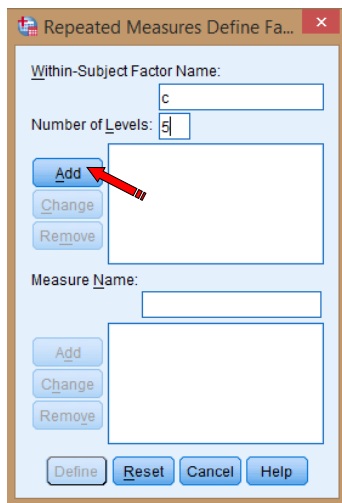


Καθορισμός

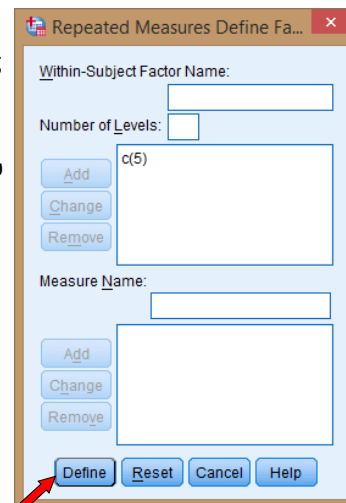
- επαναλαμβανόμενου παράγοντα και
- του αριθμού των βαθμίδων του

42

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

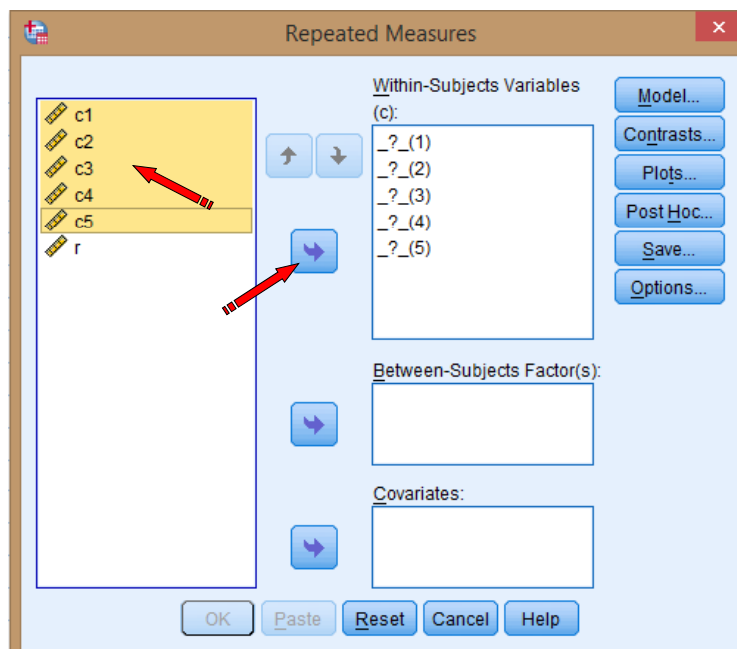


Επαναλαμβανόμενος
παράγοντας: **C**
Βαθμίδες
επαναλαμβανόμενου
παράγοντα: **5**



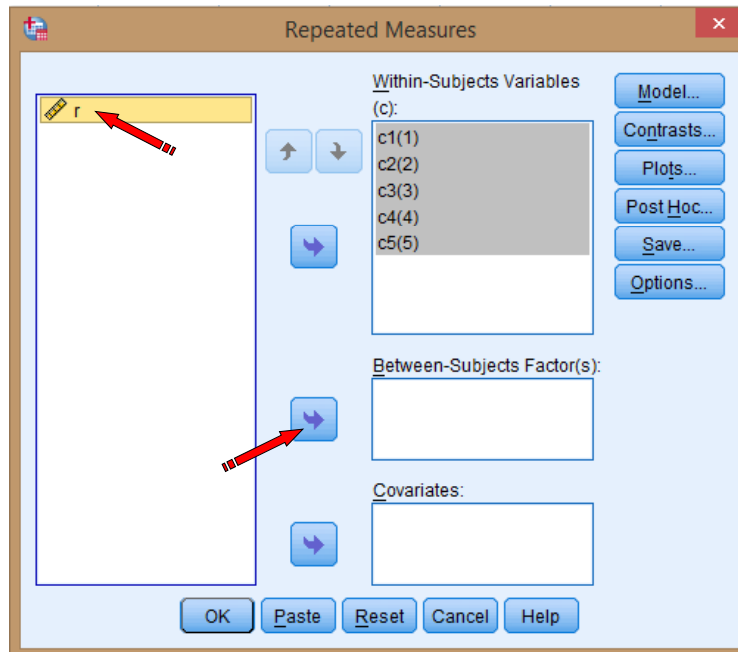
43

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



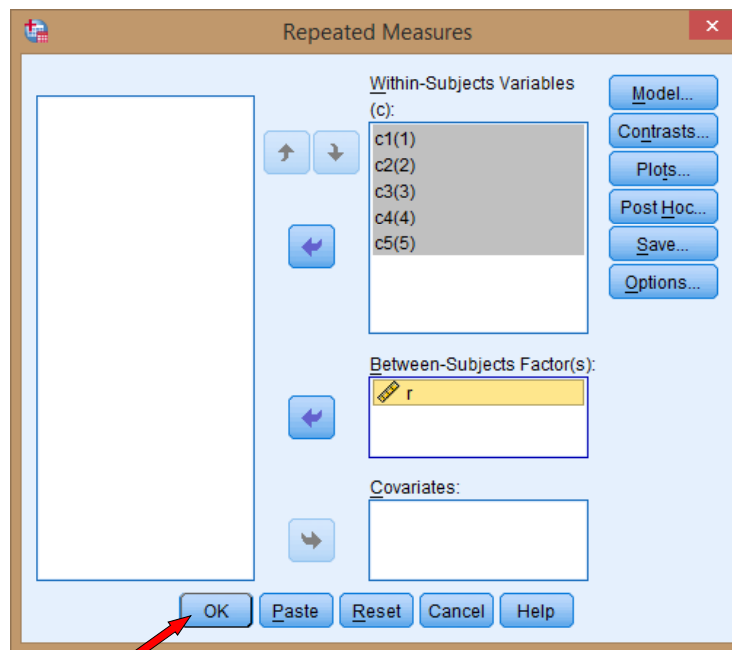
44

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



45

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



46

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

μέσο άθροισμα τετραγώνων
επαναλαμβανόμενου παράγοντα (στηλών)

μέσο άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης γραμμών και στηλών

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
C	Sphericity Assumed	96.150	4	24.037	5.437	.003
	Greenhouse-Geisser	96.150	2.073	46.375	5.437	.019
	Huynh-Feldt	96.150	3.715	25.884	5.437	.004
	Lower-bound	96.150	1.000	96.150	5.437	.058
C * R	Sphericity Assumed	8.150	4	2.038	.461	.764
	Greenhouse-Geisser	8.150	2.073	3.931	.461	.648
	Huynh-Feldt	8.150	3.715	2.194	.461	.751
	Lower-bound	8.150	1.000	8.150	.461	.523
Error(C)	Sphericity Assumed	106.100	24	4.421		
	Greenhouse-Geisser	106.100	12.440	8.529		
	Huynh-Feldt	106.100	22.288	4.760		
	Lower-bound	106.100	6.000	17.683		

μέσο άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης ατόμων και στηλών εντός των γραμμών

47

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Tests of Within-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Source		Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
C	Sphericity Assumed	96.150	4	24.037	5.437	.003
	Greenhouse-Geisser	96.150	2.073	46.375	5.437	.019
	Huynh-Feldt	96.150	3.715	25.884	5.437	.004
	Lower-bound	96.150	1.000	96.150	5.437	.058
C * R	Sphericity Assumed	8.150	4	2.038	.461	.764
	Greenhouse-Geisser	8.150	2.073	3.931	.461	.648
	Huynh-Feldt	8.150	3.715	2.194	.461	.751
	Lower-bound	8.150	1.000	8.150	.461	.523
Error(C)	Sphericity Assumed	106.100	24	4.421		
	Greenhouse-Geisser	106.100	12.440	8.529		
	Huynh-Feldt	106.100	22.288	4.760		
	Lower-bound	106.100	6.000	17.683		

Αλληλεπίδραση (C * R)
$$F_{RC} = \frac{S_{RC}^2}{S_{NRC}^2} = \frac{2.038}{4.421} = 0.461 \quad \text{Sig.} = 0.764 > 0.05$$

Κύρια επίδραση στηλών (C)
$$F_C = \frac{S_C^2}{S_{NRC}^2} = \frac{24.037}{4.421} = 5.437 \quad \text{Sig.} = 0.003 < 0.05$$

48

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

μέσο άθροισμα τετραγώνων
μη επαναλαμβανόμενου παράγοντα (γραμμών)

Tests of Between-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	2059.225	1	2059.225	69.745	.000
R	46.225	1	46.225	1.566	.257
Error	177.150	6	29.525		

μέσο άθροισμα τετραγώνων
ατόμων εντός των γραμμών

49

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Tests of Between-Subjects Effects

Measure: MEASURE_1

Transformed Variable: Average

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Intercept	2059.225	1	2059.225	69.745	.000
R	46.225	1	46.225	1.566	.257
Error	177.150	6	29.525		

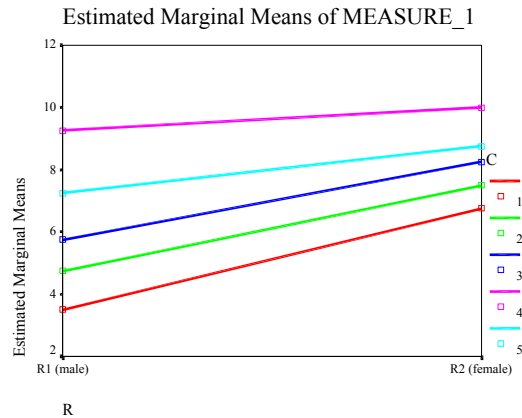
Κύρια επίδραση γραμμών (R) $F_R = \frac{S_R^2}{S_{NR}^2} = \frac{46.225}{29.525} = 1.566$ Sig. = 0.257 > 0.05

50

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Descriptive Statistics

	R	Mean
C1	R1 (male)	3.50
	R2 (female)	6.75
	Total	5.13
C2	R1 (male)	4.75
	R2 (female)	7.50
	Total	6.13
C3	R1 (male)	5.75
	R2 (female)	8.25
	Total	7.00
C4	R1 (male)	9.25
	R2 (female)	10.00
	Total	9.63
C5	R1 (male)	7.25
	R2 (female)	8.75
	Total	8.00



51

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Από
την ανάλυση διακύμανσης ως προς δύο παράγοντες

- **δεν** διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική **αλληλεπίδραση** μεταξύ των παραγόντων R και C
 $F_{(4,24)} = 0.461$; $p = 0.764 > 0.05$

Επίσης

- **δεν** διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική **κύρια επίδραση** του παράγοντα των **γραμμών** (R)
 $F_{(1,6)} = 1.566$; $p = 0.2257 > 0.05$

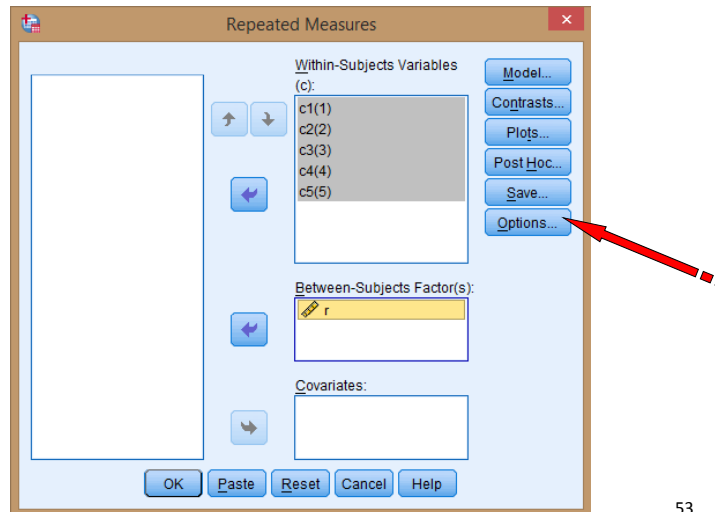
Αντίθετα

- **διαπιστώθηκε** στατιστικά σημαντική **κύρια επίδραση** του παράγοντα των **στηλών** (C)
 $F_{(4,24)} = 5.437$; $p = 0.003 < 0.05$

52

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

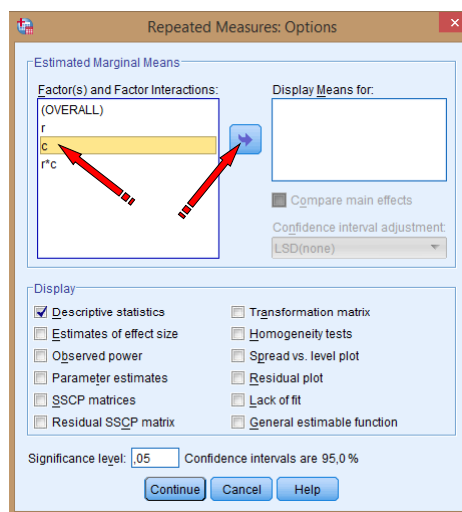
Για τον εντοπισμό των στατιστικά σημαντικών διαφορών
μεταξύ των βαθμίδων του επαναλαμβανόμενου παράγοντα
εφαρμόζεται
κάποιο τεστ πολλαπλών συγκρίσεων



53

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Για τον εντοπισμό των στατιστικά σημαντικών διαφορών
μεταξύ των βαθμίδων του επαναλαμβανόμενου παράγοντα
εφαρμόζεται
κάποιο τεστ πολλαπλών συγκρίσεων



54

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Repeated Measures: Options

Estimated Marginal Means

Factor(s) and Factor Interactions:

(OVERALL)
r
c
r*c

Display Means for:

c

☒ Compare main effects

Confidence interval adjustment:
LSD(none)

Display

☒ Descriptive statistics
☐ Estimates of effect size
☐ Observed power
☐ Parameter estimates
☐ SSCP matrices
☐ Residual SSCP matrix

☐ Transformation matrix
☐ Homogeneity tests
☐ Spread vs. level plot
☐ Residual plot
☐ Lack of fit
☐ General estimable function

Significance level: .05 Confidence intervals are 95,0 %

Continue Cancel Help

55

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Pairwise Comparisons

Measure: MEASURE

C	Mean
1	5.125
2	6.125
3	7.000
4	9.625
5	8.000

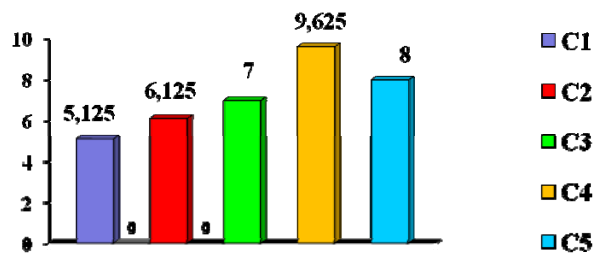
Measure: MEASURE_1

(I) C	(J) C	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig. ^a	95% Confidence Interval for Difference ^a	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-1.000	.810	.263	-2.982	.982
	3	-1.875	.955	.097	-4.211	.461
	4	-4.500*	.530	.000	-5.798	-3.202
	5	-2.875	1.197	.053	-5.803	5.342E-02
2	1	1.000	.810	.263	-.982	2.982
	3	-.875	.851	.343	-2.957	1.207
	4	-3.500*	1.208	.027	-6.455	-.545
	5	-1.875	.839	.067	-3.927	.177
3	1	1.875	.955	.097	-.461	4.211
	2	.875	.851	.343	-1.207	2.957
	4	-2.625*	1.018	.042	-5.116	-.134
	5	-1.000	1.190	.433	-3.912	1.912
4	1	4.500*	.530	.000	3.202	5.798
	2	3.500*	1.208	.027	.545	6.455
	3	2.625*	1.018	.042	.134	5.116
	5	1.625	1.560	.338	-2.191	5.441
5	1	2.875	1.197	.053	-5.342E-02	5.803
	2	1.875	.839	.067	-.177	3.927
	3	1.000	1.190	.433	-1.912	3.912
	4	-1.625	1.560	.338	-5.441	2.191

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Για τον **εντοπισμό**
των στατιστικά σημαντικών διαφορών
μεταξύ των βαθμίδων του επαναλαμβανόμενου παράγοντα των στηλών (C)
εφαρμόστηκε το **τεστ πολλαπλών συγκρίσεων** LSD
και διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά
μεταξύ της βαθμίδας C4
και των βαθμίδων C1, C2 και C3

C
 $F_{(4,24)} = 5.437;$
 $p = 0.003 < 0.05$



57

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Βιβλιογραφία

- **Μαυρομάτης Γ.** (1999).
Στατιστικά μοντέλα και μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων.
UNIVERSITY STUDIO PRESS. Θεσσαλονίκη.
Κεφ. 6: Πειράματα με δύο παράγοντες εκ των οποίων
ο ένας μόνο είναι με επαναλαμβανόμενες μετρήσεις
(Σελ. 108 - 114)
- **Ferguson A. G., Takane Y.** (1989).
Statistical Analysis in Psychology and Education. McGraw-Hill Book Company. New York.
Chapter 19: Repeated Measurement and other experimental designs
19.7. Two-Factor experiments with repeated measurements:
on one factor
19.4. Computation formulas for two-factor experiments
with repeated measurements on one factor
(Σελ. 356 - 363)

58

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Ερωτήσεις ;



59

Γούργουλης Βασίλης, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. - Δ.Π.Θ.