

Ανάλυση διακύμανσης για ανεξάρτητες μετρήσεις ως προς δύο παράγοντες

Γούργουλης Βασίλης, Ph.D.
Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ.

1

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

- ☒ **δύο** ανεξάρτητες μεταβλητές (παράγοντες)
- ☒ άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων
- ☒ μέσο άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων
- ☒ **F - τιμή**
- ☒ **κύρια επίδραση** του κάθε παράγοντα
- ☒ **αλληλεπίδραση** μεταξύ των δύο παραγόντων
- ☒ ανάλυση στατιστικά σημαντικής αλληλεπίδρασης
- ☒ **τεστ πολλαπλών συγκρίσεων**

2

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Εφαρμόζεται όταν
τα δεδομένα ομαδοποιούνται με βάση
δύο ποιοτικές (ανεξάρτητες) μεταβλητές (παράγοντες)

Π.χ. εξαρτημένη μεταβλητή: επίδοση στα 30 m sprint
ανεξάρτητες μεταβλητές (παράγοντες):

Βαθμίδες (επίπεδα)

1^{ος} παράγοντας: Τάξη



1. Α' τάξη
2. Β' τάξη
3. Γ' τάξη

2^{ος} παράγοντας: Φύλο



1. αγόρια
2. κορίτσια

3

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$3 \times 2 = 6$ (δυνατοί συνδυασμοί - κελιά)

1^{ος} παράγοντας
Τάξη

2^{ος} παράγοντας
Φύλο

	1. Α' τάξη	2. Β' τάξη	3. Γ' τάξη
1. Αγόρια	1.1.	1.2.	1.3.
2. Κορίτσια	2.1.	2.2.	2.3.

4

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

		1 ^{ος} παράγοντας Τάξη				
		1. Α' τάξη	2. Β' τάξη	3. Γ' τάξη	C	$\bar{X}_{\bullet R \bullet}$
2 ^{ος} παράγοντας Φύλο	1. Αγόρια	$X_{123}=6$ $X_{211}=6$ $X_{311}=8$ $X_{411}=8$ $X_{511}=7$	$X_{112}=5$ $X_{212}=6$ $X_{312}=5$ $X_{412}=5$ $X_{512}=7$	$X_{113}=5$ $X_{213}=4$ $X_{313}=5$ $X_{413}=6$ $X_{513}=7$	$X_{\bullet 1C}$	$\bar{X}_{\bullet 1 \bullet}=6$
	2. Κορίτσια	$X_{121}=7$ $X_{221}=6$ $X_{321}=5$ $X_{421}=7$ $X_{521}=4$	$X_{122}=9$ $X_{222}=7$ $X_{322}=9$ $X_{422}=8$ $X_{522}=6$	$X_{123}=5$ $X_{223}=4$ $X_{323}=3$ $X_{423}=8$ $X_{523}=5$	$X_{\bullet 2C}$	$\bar{X}_{\bullet 2 \bullet}=6,2$
	R	$X_{\bullet R1}$	$X_{\bullet R2}$	$X_{\bullet R3}$	X_{iRC}	
	$X_{\bullet \bullet C}$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 1}=6.4$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 2}=6.7$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 3}=5.2$		$\bar{X}_{\bullet \bullet \bullet}=6.1$

i = άτομο R = παράγοντας γραμμών C = παράγοντας στηλών⁵

		1 ^{ος} παράγοντας Τάξη				
		1. Α' τάξη	2. Β' τάξη	3. Γ' τάξη	C	$\bar{X}_{\bullet R \bullet}$
2 ^{ος} παράγοντας Φύλο	1. Αγόρια	$\bar{X}_{\bullet 11}=7$	$\bar{X}_{\bullet 12}=5.6$	$\bar{X}_{\bullet 13}=5.4$		$\bar{X}_{\bullet 1 \bullet}=6$
	2. Κορίτσια	$\bar{X}_{\bullet 21}=5.8$	$\bar{X}_{\bullet 22}=7.8$	$\bar{X}_{\bullet 23}=5$		$\bar{X}_{\bullet 2 \bullet}=6,2$
	R				X_{iRC}	
	$X_{\bullet \bullet C}$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 1}=6.4$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 2}=6.7$	$\bar{X}_{\bullet \bullet 3}=5.2$		$\bar{X}_{\bullet \bullet \bullet}=6.1$

i = άτομο R = παράγοντας γραμμών C = παράγοντας στηλών

Ερωτήματα

1. Υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ του παράγοντα των στηλών (C) και του παράγοντα των γραμμών (R) ;
δηλαδή είναι ίδια η εξέλιξη των μέσων όρων όλων των βαθμίδων του ενός παράγοντα (παράγοντα στηλών C) για όλες τις βαθμίδες του άλλου παράγοντα (παράγοντα γραμμών R), δηλαδή η εξέλιξη των μέσων όρων των αγοριών της Α', Β' και Γ' τάξης είναι ίδια με την εξέλιξη των κοριτσιών στις αντίστοιχες τάξεις
2. Υπάρχει σημαντική επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R) ;
δηλαδή υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων (Αγόρια, Κορίτσια) του παράγοντα των γραμμών (φύλο)
3. Υπάρχει σημαντική επίδραση του παράγοντα των στηλών (C) ;
δηλαδή υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων (Α', Β', Γ' Τάξη) του παράγοντα των στηλών (τάξη)
4. Εφόσον υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των επιμέρους βαθμίδων κάποιου παράγοντα, μεταξύ ποιών μέσων όρων, δηλαδή μεταξύ ποιών βαθμίδων του παράγοντα, υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ;

7

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}...$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}...$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$\begin{aligned} X_{iRC} - \bar{\bar{X}}... &= (\quad - \bar{\bar{X}}...) + \\ & (\quad) + \\ & (\quad) + \\ & (X_{iRC} \quad) \end{aligned}$$

8

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}_{...}$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$\begin{aligned} X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...} &= (\bar{X}_{..R.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &\quad (\bar{X}_{..C.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &\quad (X_{iRC} - \bar{X}_{..R.} - \bar{X}_{..C.} + \bar{\bar{X}}_{...}) \end{aligned}$$

9

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}_{...}$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$\begin{aligned} X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...} &= (\bar{X}_{..R.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &\quad (\bar{X}_{..C.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &\quad (X_{iRC} - \bar{X}_{..R.} - \bar{X}_{..C.} + \bar{\bar{X}}_{...}) \end{aligned}$$

10

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}_{...}$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$\begin{aligned} X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...} &= (\bar{X}_{..R.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{..R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(X_{iRC} - \bar{X}_{.RC}) \end{aligned}$$

11

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης (X_{iRC}) από το μεγάλο μέσο $\bar{\bar{X}}_{...}$

είναι

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...}$$

Με προσθαφαιρέσεις πετυχαίνουμε

$$\begin{aligned} X_{iRC} - \bar{\bar{X}}_{...} &= (\bar{X}_{..R.} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{..R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...}) + \\ &(X_{iRC} - \bar{X}_{.RC}) \end{aligned}$$

12

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Η απόκλιση της κάθε παρατήρησης από το μεγάλο μέσο

$$X_{iRC} - \bar{\bar{X}}...$$

μπορεί να αναλυθεί

1. στην απόκλιση του μέσου όρου της γραμμής $\longrightarrow (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}...)$
(στην οποία ανήκει η παρατήρηση)
από το μεγάλο μέσο όρο
2. στην απόκλιση του μέσου όρου της στήλης $\longrightarrow (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}...)$
(στην οποία ανήκει η παρατήρηση)
από το μεγάλο μέσο όρο
3. στην αλληλεπίδραση $\longrightarrow (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}...)$
μεταξύ γραμμών και στηλών
4. στην απόκλιση εντός των κελιών $\longrightarrow (X_{iRC} - \bar{X}_{.RC})$
(απόκλιση της κάθε παρατήρησης
από το μέσο όρο του κελιού
στην οποία ανήκει η παρατήρηση)

13

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν **τετραγωνίσουμε**
και **αθροίσουμε**

- ως προς τις **γραμμές R**
- ως προς τις **στήλες C** και
- ως προς τα **άτομα N** (εντός των κελιών)

προκύπτει

$$\begin{aligned} \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{\bar{X}}...)^2 &= N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}...)^2 + \\ &N \cdot R \cdot \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}...)^2 + \\ &N \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}...)^2 + \\ &\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{.RC})^2 \end{aligned}$$

14

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{\bar{X}})^2$$

Συνολικό
 άθροισμα τετραγώνων
 (Total)

$$N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}})^2$$

Άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των γραμμών
 (R)

$$N \cdot R \cdot \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}})^2$$

Άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των στηλών
 (C)

$$N \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}})^2$$

Άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης
 (R*C)

$$\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{.RC})^2$$

Άθροισμα τετραγώνων
εντός των κελιών
 (Error)

15

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Το κάθε άθροισμα τετραγώνων
 έχει τους δικούς του **βαθμούς ελευθερίας**

βαθμοί ελευθερίας

Άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των γραμμών
 (R)

R - 1

Άθροισμα τετραγώνων
μεταξύ των στηλών
 (C)

C - 1

Άθροισμα τετραγώνων
αλληλεπίδρασης
 (R*C)

(R - 1) • (C - 1)

Άθροισμα τετραγώνων
εντός των κελιών
 (Error)

R • C • (N - 1)

16

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Διαιρώντας τα

αθροίσματα τετραγώνων (Sum of Squares)

- του παράγοντα των γραμμών (R)
- του παράγοντα των στηλών (C)
- της αλληλεπίδρασης των δύο παραγόντων (R*C)
- του εντός των κελιών (Error)

με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας

προκύπτουν τα

μέσα αθροίσματα τετραγώνων (Mean Squares)

(τα οποία αποτελούν έκφραση διακύμανσης)

17

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

	Άθροισμα τετραγώνων	βαθμοί ελευθερίας	Μέσα τετράγωνα
Μεταξύ των γραμμών (R)	$N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{\bar{X}}_{...})^2$	R - 1	S_R^2
Μεταξύ των στηλών (C)	$N \cdot R \cdot \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{\bar{X}}_{...})^2$	C - 1	S_C^2
Αλληλεπίδρασης (R*C)	$N \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{.RC} - \bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{..C} + \bar{\bar{X}}_{...})^2$	(R - 1) • (C - 1)	S_{RC}^2
Εντός των κελιών (Error)	$\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{.RC})^2$	R • C • (N - 1)	S_w^2

18

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων μεταξύ των γραμμών (R)

$$S_R^2 = \frac{N \cdot C \cdot \sum_{R=1}^R (\bar{X}_{.R.} - \bar{X}_{...})^2}{R - 1}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R)

19

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων μεταξύ των στηλών (C)

$$S_C^2 = \frac{N \cdot R \cdot \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{..C} - \bar{X}_{...})^2}{C - 1}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην επίδραση του παράγοντα των στηλών (C)

20

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων **αλληλεπίδρασης** γραμμών και στηλών (R * C)

$$S_{RC}^2 = \frac{N \cdot \sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C (\bar{X}_{\cdot RC} - \bar{X}_{\cdot R\cdot} - \bar{X}_{\cdot \cdot C} + \bar{\bar{X}}_{\cdot \cdot \cdot})^2}{(R - 1) \cdot (C - 1)}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην **αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραγόντων** (R * C)

21

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μέσο άθροισμα τετραγώνων **εντός των κελιών** (Error)

$$S_w^2 = \frac{\sum_{R=1}^R \sum_{C=1}^C \sum_{N=1}^N (X_{iRC} - \bar{X}_{\cdot RC})^2}{R \cdot C \cdot (N - 1)}$$

εκφράζει τη διακύμανση που οφείλεται

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες

22

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν
υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R)
τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων των **γραμμών** **>** μέσο άθροισμα τετραγώνων **εντός των κελιών**

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην επίδραση του παράγοντα των γραμμών
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες

$$S_R^2 > S_w^2$$

23

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$$

διαφορές
μεταξύ των
ατόμων

τυχαίοι
παράγοντες

επίδραση
του
παράγοντα

διαφορές
μεταξύ των
ατόμων

τυχαίοι
παράγοντες

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$$

επίδραση
του
παράγοντα

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$$



Μικρή επίδραση του παράγοντα – μικρή F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$$



Μεγάλη επίδραση του παράγοντα – μεγάλη F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.}$

(ΔΕΝ υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών)

Εναλλακτική υπόθεση: $H_A : \mu_{1.} \neq \mu_{2.}$

(υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών)

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2}$

Αν

η F_R - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)

απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση

οπότε

υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των γραμμών (R)

29

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Αν

υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών (C)

τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων
των στηλών

>

μέσο άθροισμα τετραγώνων
εντός των κελιών

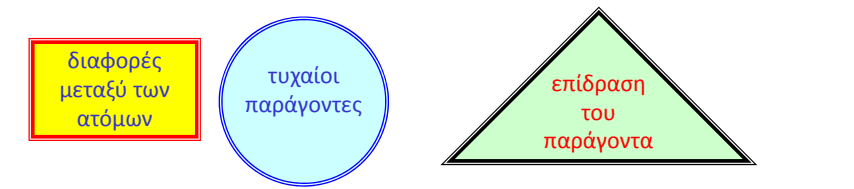
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην επίδραση του παράγοντα των στηλών
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες

$$S_C^2 > S_w^2$$

30

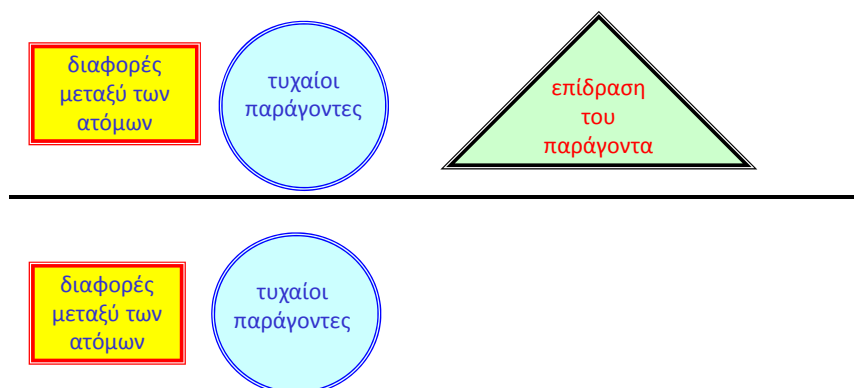
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_c = \frac{S_c^2}{S_w^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_c = \frac{S_c^2}{S_w^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_c = \frac{S_c^2}{S_w^2}$$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_c = \frac{S_c^2}{S_w^2}$$



Μικρή επίδραση του παράγοντα – μικρή F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

$$F_C = \frac{S_C^2}{S_W^2}$$



Μεγάλη επίδραση του παράγοντα – μεγάλη F τιμή

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: $H_0 : \mu_{..1} = \mu_{..2} = \mu_{..3}$

(ΔΕΝ υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών)

Εναλλακτική υπόθεση: $H_A : \mu_{..1} \neq \mu_{..2} \neq \mu_{..3}$

(υπάρχει κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών)

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_C = \frac{S_C^2}{S_W^2}$

Αν

η F_C - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)

απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση

οπότε

υπάρχει σημαντική κύρια επίδραση του παράγοντα των στηλών (C)

Αν
υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων (R * C)
τότε

μέσο άθροισμα τετραγώνων **αλληλεπίδρασης** **>** μέσο άθροισμα τετραγώνων **εντός των κελιών**

- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες και
- στην αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων
- σε διαφορές μεταξύ των ατόμων
- σε τυχαίους παράγοντες

$$S_{RC}^2 > S_w^2$$

37

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Μηδενική υπόθεση: **ΔΕΝ υπάρχει αλληλεπίδραση**

Εναλλακτική υπόθεση: **υπάρχει αλληλεπίδραση**

Έλεγχος μηδενικής υπόθεσης: $F_{RC} = \frac{S_{RC}^2}{S_w^2}$

Αν
η F_{RC} - τιμή είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τη μονάδα (1)

απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση

και αποδεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση

οπότε

υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραγόντων (R * C)

38

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Εξαρτημένη μεταβλητή

Ανεξάρτητες μεταβλητές (παράγοντες)

	score	r	c
1	6	1	1
2	6	1	1
3	8	1	1
4	8	1	1
5	7	1	1
6	5	1	2
7	6	1	2
8	5	1	2
9	5	1	2
10	7	1	2
11	5	1	3
12	4	1	3
13	5	1	3
14	6	1	3
15	7	1	3
16	7	2	1
17	6	2	1
18	5	2	1

39

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

N802_D03_01_Two Way ANOVA_data

File Edit View Data Transform **Analyze** Direct Marketing Graphs Utilities Add-ons Window

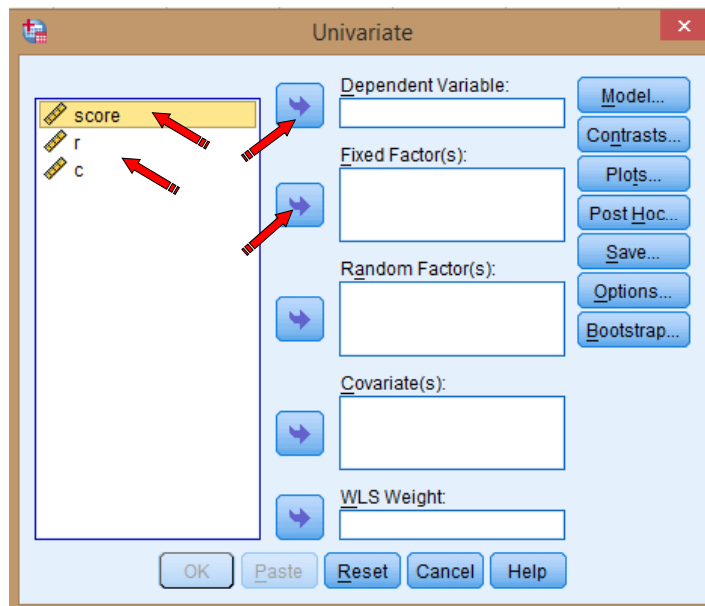
Reports
Descriptive Statistics
Tables
Compare Means
General Linear Model
Generalized Linear Models
Mixed Models
Correlate
Regression
Loglinear
Neural Networks
Classify
Dimension Reduction
Scale
Nonparametric Tests
Forecasting
Survival
Multiple Response
Missing Value Analysis...
Multiple Imputation
Complex Samples

Univariate...
Multivariate...
Repeated Measures...
Variance Components...

	score	r
1	6	
2	6	
3	8	
4	8	
5	7	
6	5	
7	6	
8	5	
9	5	
10	7	
11	5	
12	4	
13	5	
14	6	
15	7	
16	7	
17	6	
18	5	

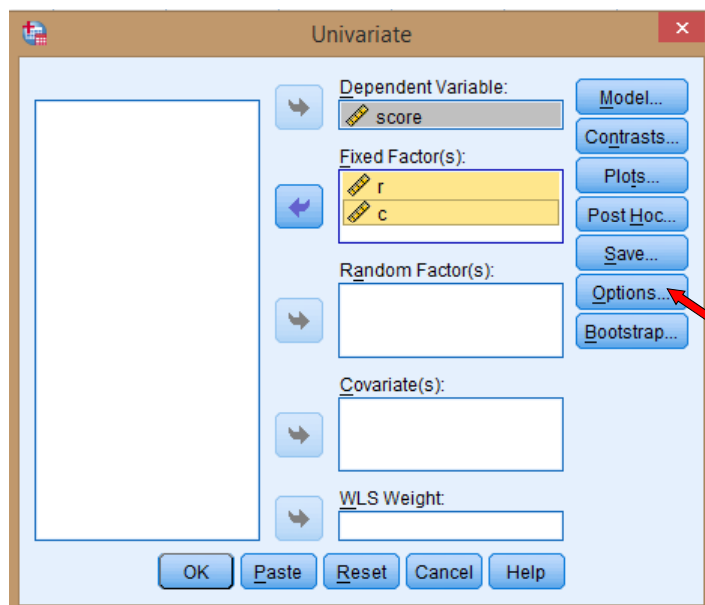
40

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



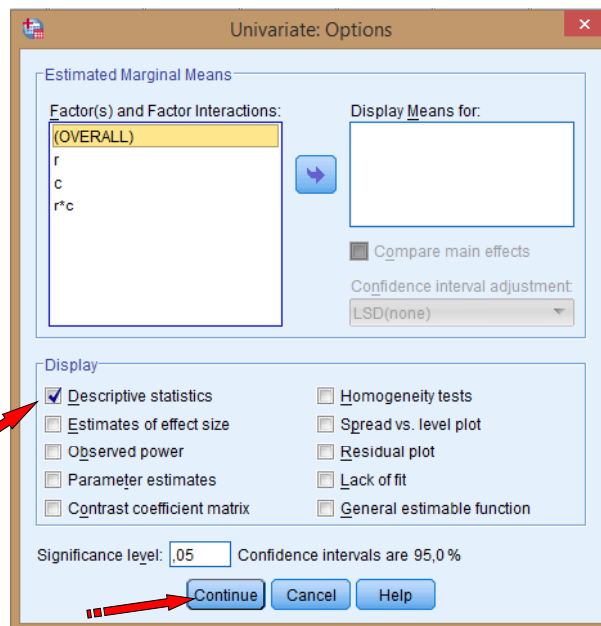
41

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



42

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



43

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Descriptive Statistics

Dependent Variable: SCORE

R	C	Mean	Std. Deviation	N
R1	C1	7.00	1.00	5
	C2	5.60	.89	5
	C3	5.40	1.14	5
	Total	6.00	1.20	15
R2	C1	5.80	1.30	5
	C2	7.80	1.30	5
	C3	5.00	1.87	5
	Total	6.20	1.86	15
Total	C1	6.40	1.26	10
	C2	6.70	1.57	10
	C3	5.20	1.48	10
	Total	6.10	1.54	30

44

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: SCORE

Source	Type II Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	28.700 ^a	5	5.740	3.444	.017
Intercept	1116.300	1	1116.300	669.780	.000
R	.300	1	.300	.180	.675
C	12.600	2	6.300	3.780	.037
R * C	15.800	2	7.900	4.740	.018
Error	40.000	24	1.667		
Total	1185.000	30			
Corrected Total	68.700	29			

a. R Squared = .418 (Adjusted R Squared = .296)

Αλληλεπίδραση
(R * C)

$$F_{RC} = \frac{S_{RC}^2}{S_w^2} = \frac{7.900}{1.667} = 4.740 \quad \text{Sig.} = 0.018 < 0.05$$

Κύρια επίδραση
γραμμών (R)

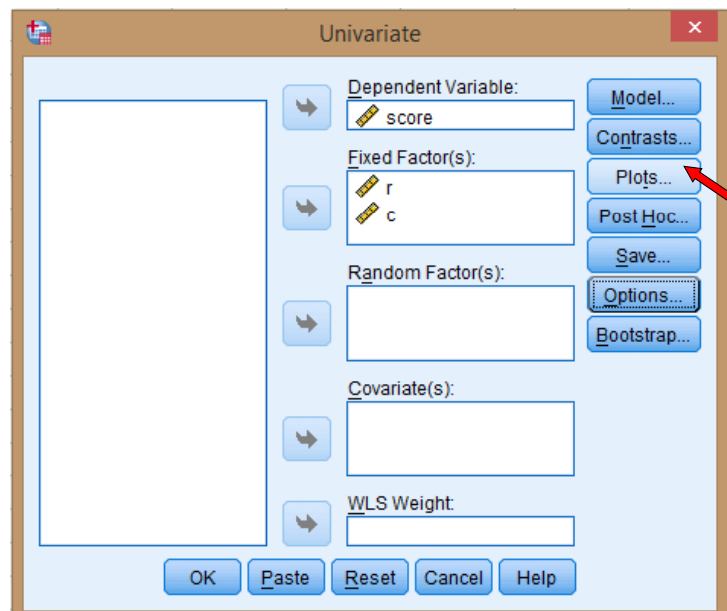
$$F_R = \frac{S_R^2}{S_w^2} = \frac{0.300}{1.667} = 0.180 \quad \text{Sig.} = 0.675 > 0.05$$

Κύρια επίδραση
στηλών (C)

$$F_C = \frac{S_C^2}{S_w^2} = \frac{6.300}{1.667} = 3.780 \quad \text{Sig.} = 0.037 < 0.05$$

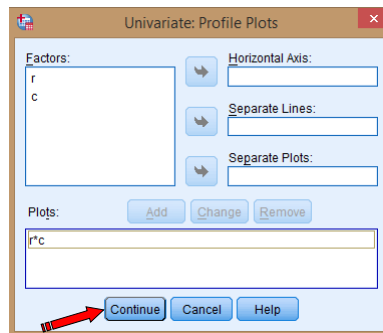
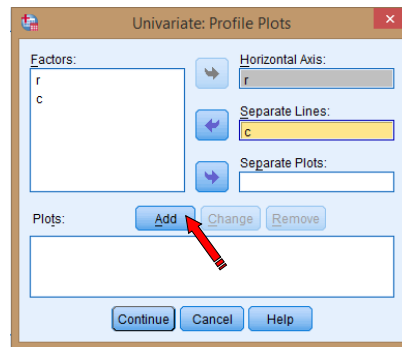
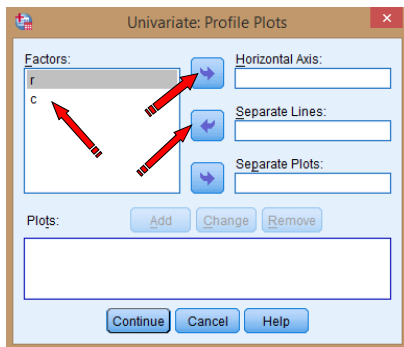
45

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



46

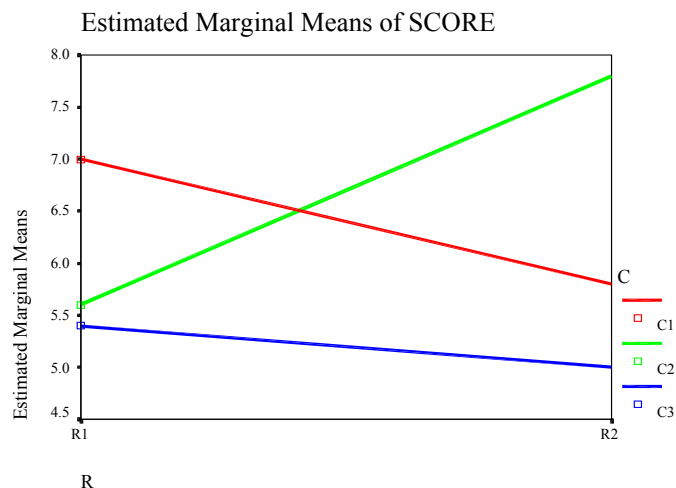
Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



47

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Dependent Variable	
R	C
R1	C1
	C2
	C3
	Total
R2	C1
	C2
	C3
	Total
Total	C1
	C2
	C3
	Total



Εφόσον υπάρχει στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση,
 η επίδραση του ενός παράγοντα (π.χ. του παράγοντα των στηλών C)
δεν είναι σταθερή για όλες τις βαθμίδες του άλλου παράγοντα
 (π.χ. του παράγοντα των γραμμών R)

48

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Θα πρέπει
να αναλυθεί η επίδραση (simple main effect) του παράγοντα των **στηλών** (C)
σε κάθε μία από τις βαθμίδες του παράγοντα των **γραμμών** (R_1 και R_2)

Estimates

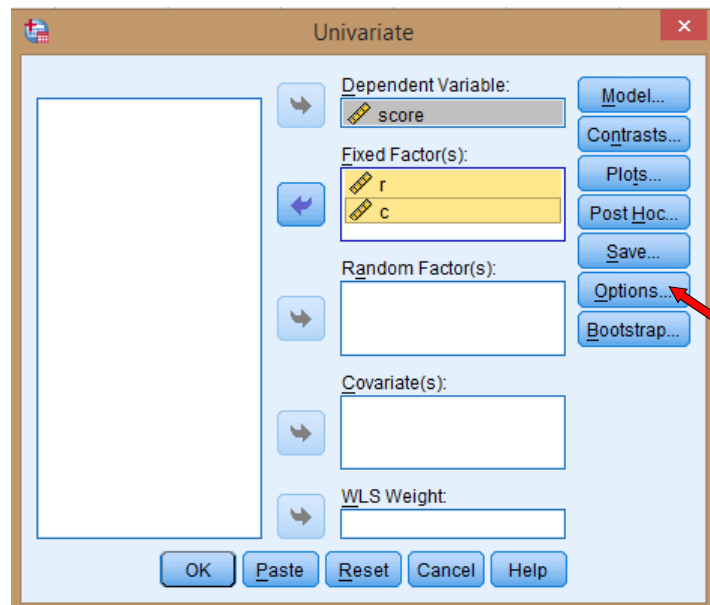
Dependent Variable: SCORE

R	C	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
R1	C1	7.000	.577	5.808	8.192
	C2	5.600	.577	4.408	6.792
	C3	5.400	.577	4.208	6.592
R2	C1	5.800	.577	4.608	6.992
	C2	7.800	.577	6.608	8.992
	C3	5.000	.577	3.808	6.192

Δηλαδή αν
υπάρχουν διαφορές μεταξύ των μέσων όρων των βαθμίδων C_1 , C_2 και C_3
σε κάθε μία από τις βαθμίδες του παράγοντα των γραμμών (R_1 και R_2)

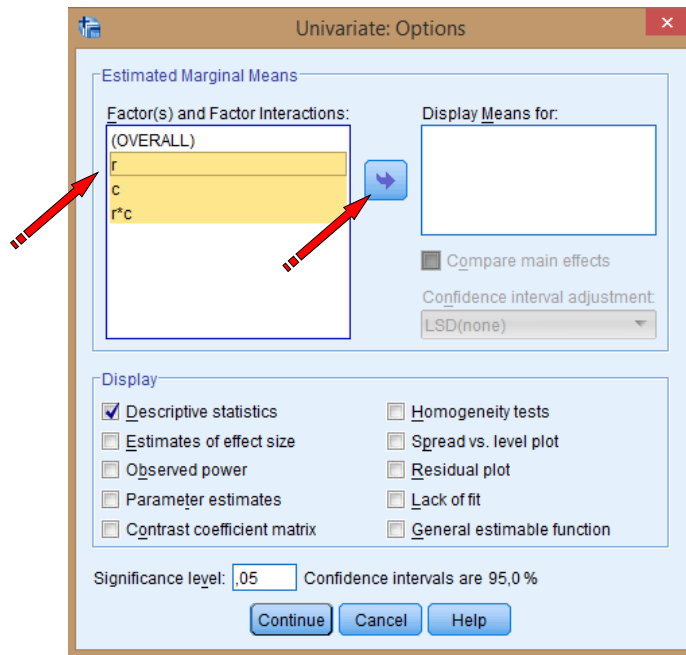
49

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



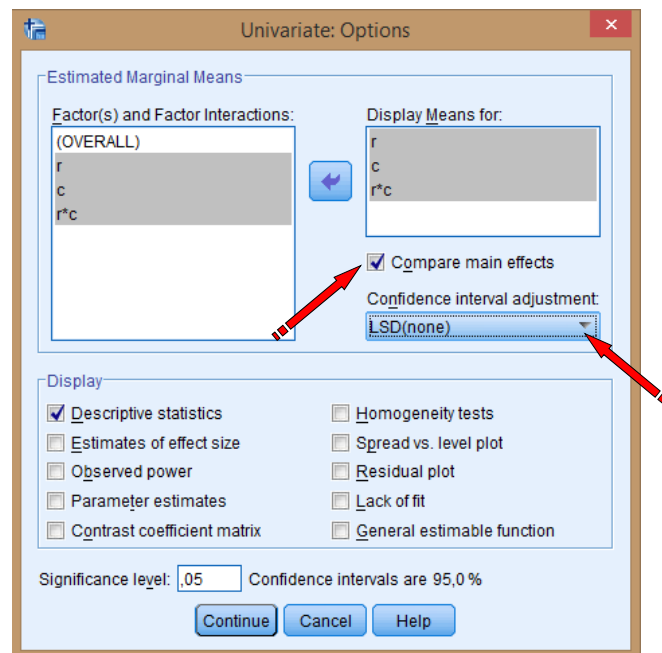
50

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



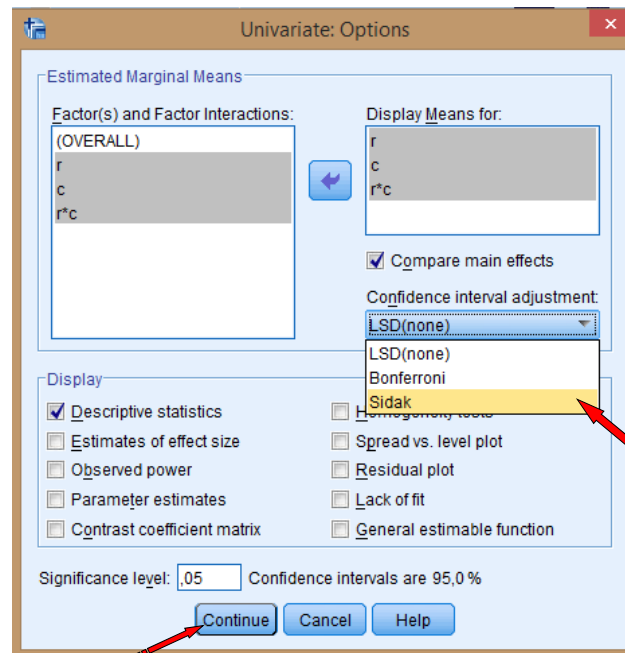
51

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



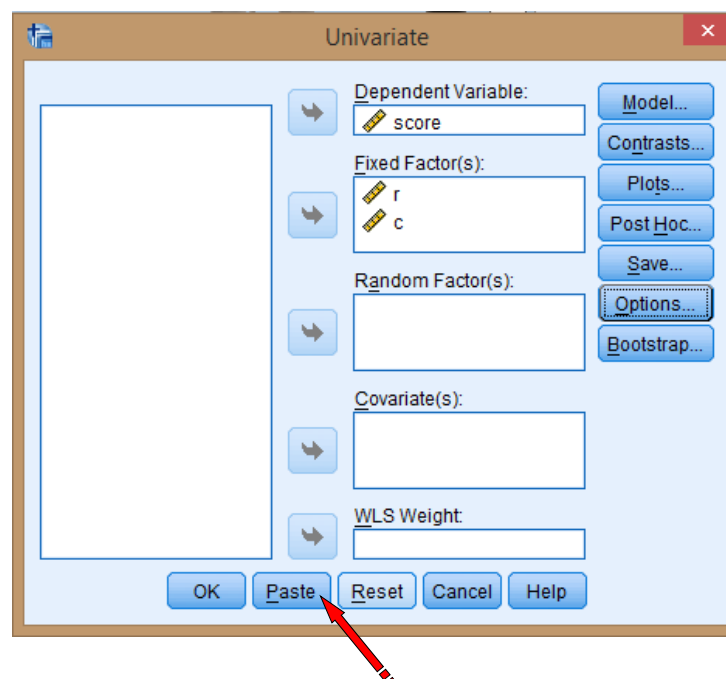
52

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



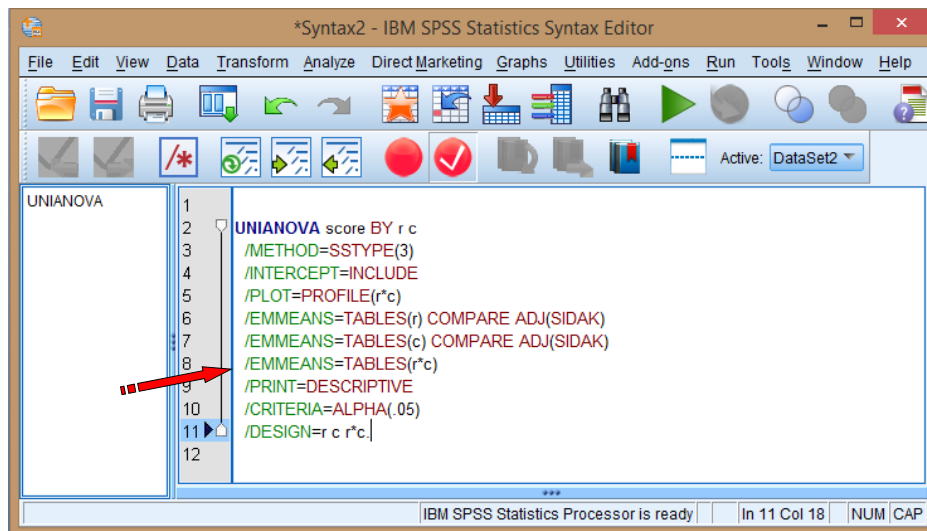
53

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



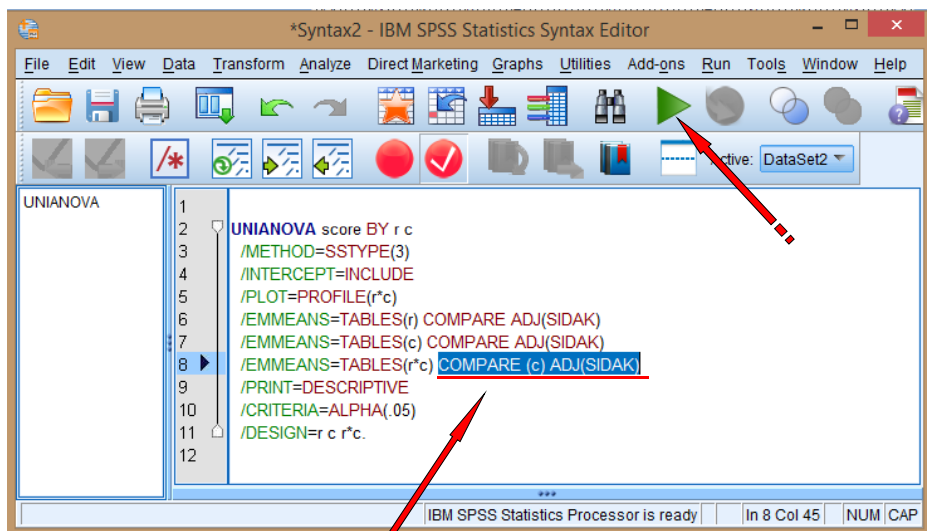
54

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



55

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ



πληκτρολογούμε την εντολή **COMPARE (c) ADJ (SIDAK)**
για να αναλυθεί η επίδραση (simple main effect) του παράγοντα των **στηλών (C)**
σε κάθε μία από τις βαθμίδες του παράγοντα των **γραμμών (R_1 και R_2)**

56

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Univariate Tests

Dependent Variable: SCORE

	R		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
R1	R1	Contrast	7.600	2	3.800	2.280	.124
		Error	40.000	24	1.667		
R2	R2	Contrast	20.800	2	10.400	6.240	.007
		Error	40.000	24	1.667		

Each F tests the simple effects of C within each level combination of the other effects shown. These tests are based on the linearly independent pairwise comparisons among the estimated marginal means.

**Δεν υπάρχει
επίδραση**

του παράγοντα των στηλών (C)
στην 1^η βαθμίδα
του παράγοντα των γραμμών (R1)

Sig. = 0.124 > 0.05

**Υπάρχει
επίδραση**

του παράγοντα των στηλών (C)
στην 2^η βαθμίδα
του παράγοντα των γραμμών (R2)

Sig. = 0.007 < 0.05

57

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Για τον εντοπισμό των στατιστικά σημαντικών διαφορών
χρησιμοποιείται

το **τεστ πολλαπλών συγκρίσεων Sidak**

(Multiple Pairwise Comparisons)

58

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Pairwise Comparisons

Dependent Variable: SCORE

R	(I) C	(J) C	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig. ^a	95% Confidence Interval for Difference ^a	
						Lower Bound	Upper Bound
R1	C1	C2	1.400	.816	.269	-.695	3.495
		C3	1.600	.816	.174	-.495	3.695
	C2	C1	-1.400	.816	.269	-3.495	.695
		C3	.200	.816	.993	-1.895	2.295
	C3	C1	-1.600	.816	.174	-3.695	.495
		C2	-.200	.816	.993	-2.295	1.895
R2	C1	C2	-2.000	.816	.065	-4.095	9.520E-02
		C3	.800	.816	.709	-1.295	2.895
	C2	C1	2.000	.816	.065	-9.520E-02	4.095
		C3	2.800*	.816	.007	.705	4.895
	C3	C1	-2.800*	.816	.007	-4.895	1.295
		C2	-2.800*	.816	.007	-4.895	1.295

Based on estimated marginal means

*. The mean difference is significant at the .05 level.

a. Adjustment for multiple comparisons: Sidak.

Υπάρχει
στατιστικά σημαντική διαφορά
μόνο μεταξύ της C2 και C3

59

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Από

την ανάλυση διακύμανσης ως προς δύο παράγοντες
διαπιστώθηκε

στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων R και C

$$F_{(2,24)} = 4.740 ; p < 0.05$$

Αναλύοντας την αλληλεπίδραση

για την κάθε μία βαθμίδα του παράγοντα R (R1 και R2)

διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική επίδραση του παράγοντα C

μόνο στην βαθμίδα R2

$$R1: F_{(2,24)} = 2.280 ; p = 0.124 > 0.05$$

$$R2: F_{(2,24)} = 6.240 ; p = 0.007 < 0.05$$

Για τον εντοπισμό των στατιστικά σημαντικών διαφορών

εφαρμόστηκε το τεστ πολλαπλών συγκρίσεων Sidak

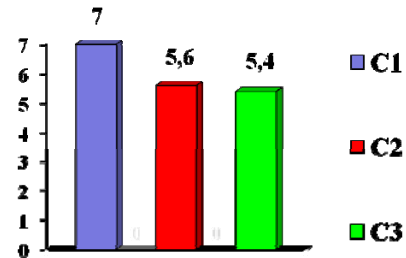
και διαπιστώθηκε στατιστικά σημαντική διαφορά

μόνο μεταξύ της C2 και C3 βαθμίδας, του R2

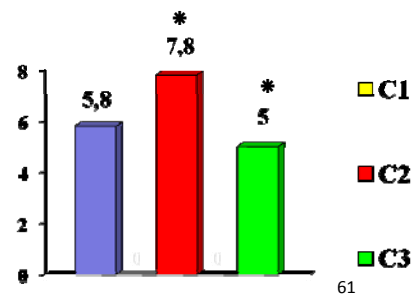
60

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

R1
 $F_{(2,24)} = 2.280 ; p = 0.124 > 0.05$



R2
 $F_{(2,24)} = 6.240 ; p = 0.007 < 0.05$



Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

61

Βιβλιογραφία

- **Μαυρομάτης Γ. (1999).**
Στατιστικά μοντέλα και μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων.
 UNIVERSITY STUDIO PRESS. Θεσσαλονίκη.
 Κεφ. 3: Ανάλυση διακύμανσης με δύο παράγοντες ομαδοποίησης (Two-Way)
 (Σελ. 59 - 79)
- **Ferguson A. G., Takane Y. (1989).**
Statistical Analysis in Psychology and Education. McGraw-Hill Book Company. New York.
 Chapter 16: Analysis of Variance: Two-Way classification (Σελ. 272 - 296)

62

Γούργουλης Βασίλειος, Ph.D., Καθηγητής Τ.Ε.Φ.Α.Α. – Σ.Ε.Φ.Α.Α. – Δ.Π.Θ

Ερωτήσεις ;

