

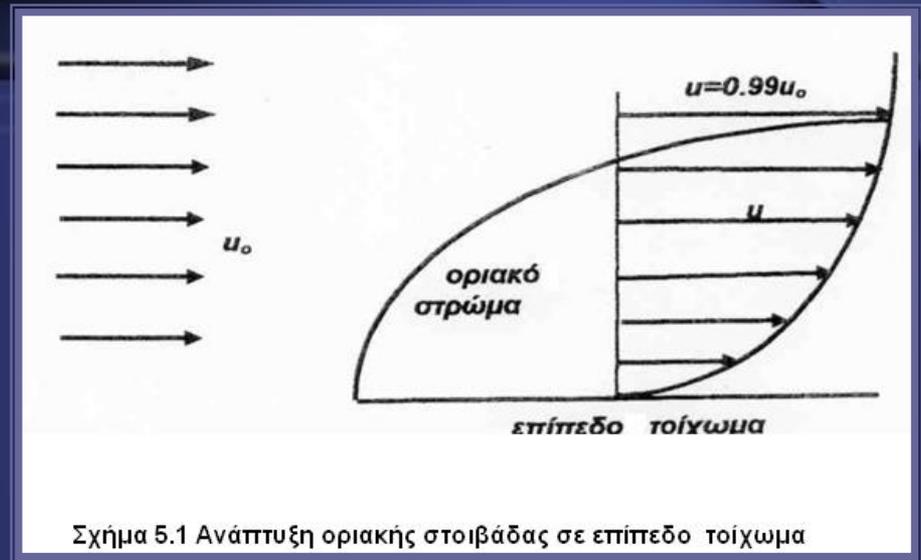
Μάθημα: ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ

5^ο Κεφάλαιο : Το οριακό στρώμα στους ανοικτούς αγωγούς

Καθηγητής Φώτιος Π. Μάρης

5.1 Περιγραφή του οριακού στρώματος

Για την κατανόηση του γνωστικού αντικειμένου της θεωρίας του οριακού στρώματος (boundary layer theory) είναι σκόπιμο η ανάλυση να περιλαμβάνει ροή η οποία περιορίζεται σε μια μόνο στερεή επιφάνεια, βλέπε Σχήμα 5.1.



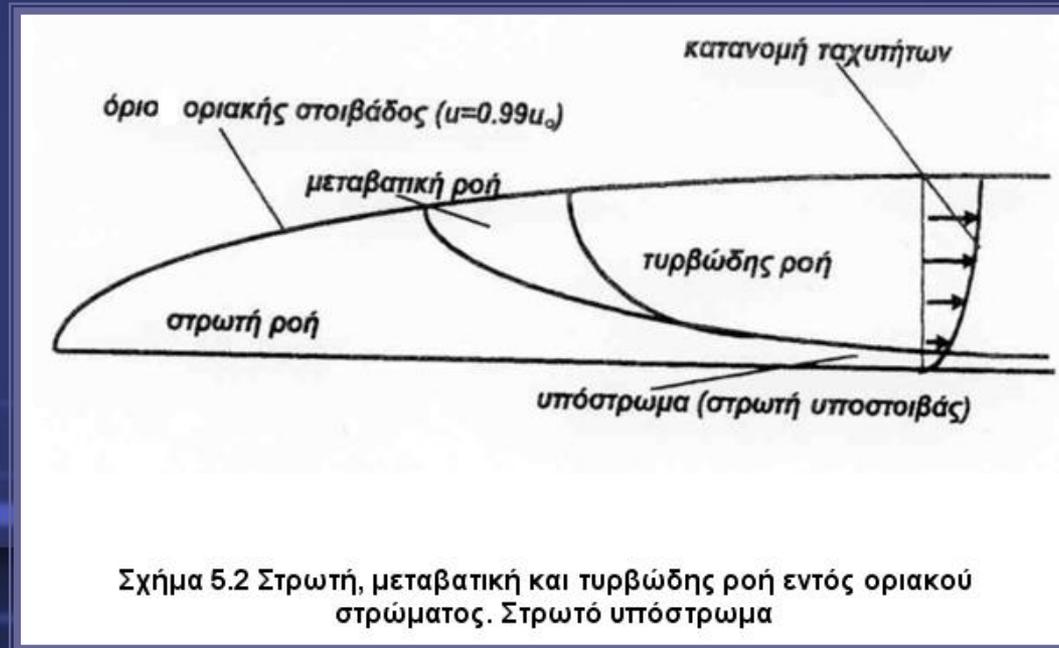
Η ροή πηγαίνει παράλληλα προς το στερεό όριο (τοίχωμα) και η αδιατάρακτη τιμή της ομοιόμορφης ταχύτητας στον ανάντη χώρο είναι u_0 . Καθώς το ρευστό έρχεται σε επαφή προς το στερεό όριο η ταχύτητα του στρώματος του ρευστού το οποίο βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα επιβραδύνεται λόγω της τριβής μεταξύ ρευστού-στερεού και όταν βρίσκεται πάνω στο τοίχωμα η ταχύτητα αυτή μηδενίζεται.

Συνεπεία των παραπάνω αναπτύσσεται λοιπόν σημαντική διατμητική τάση μεταξύ των στρωμάτων του ρευστού που βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα και του αμέσως επόμενου στρώματος ροής. Η περιοχή αυτή των έντονων διατμητικών τάσεων επεκτείνεται εντός του χώρου της ροής και ονομάζεται **οριακό στρώμα**.

Η ροή εντός του οριακού στρώματος είναι δυνατόν να είναι στρωτή ή τυρβώδης. Στο Σχήμα 5.2 φαίνεται μία πιθανή κατανομή του είδους της αναπτυσσόμενης ροής μέσα σε οριακό στρώμα.

Η αρχική στρωτή ροή που εμφανίζεται στην είσοδο μετατρέπεται (μεταβατική περιοχή) σε τυρβώδη ροή. Σε άμεση επαφή με το στερεό τοίχωμα βρίσκεται πάντα το **οριακό υπόστρωμα** μέσα στο οποίο η ροή είναι στρωτή.

Η μεταβολή της ταχύτητας που έχει διεύθυνση κάθετη προς αυτή στο τυρβώδες οριακό στρώμα και κοντά στο χώρο των τοιχωμάτων ροής είναι απότομη. Αντίθετα, στην περίπτωση στρωτής ροής η μεταβολή αυτή της ταχύτητας είναι ομαλά.



5.2 Εξίσωση οριακού στρώματος

Το πάχος του οριακού στρώματος δ (m), πολλές φορές ονομαζόμενο και πάχος της οριακής στοιβάδας, θεωρείται ως το μήκος από το στερεό όριο ως το εξωτερικό τμήμα του οριακού στρώματος κατά μήκος της διεύθυνσης- y που είναι κάθετο προς το τοίχωμα. Το εξωτερικό όριο του οριακού στρώματος καθορίζεται ως εκεί όπου η ταχύτητα u δίνει,

$$\frac{u}{u_0} = 0.99 \quad (5.1)$$

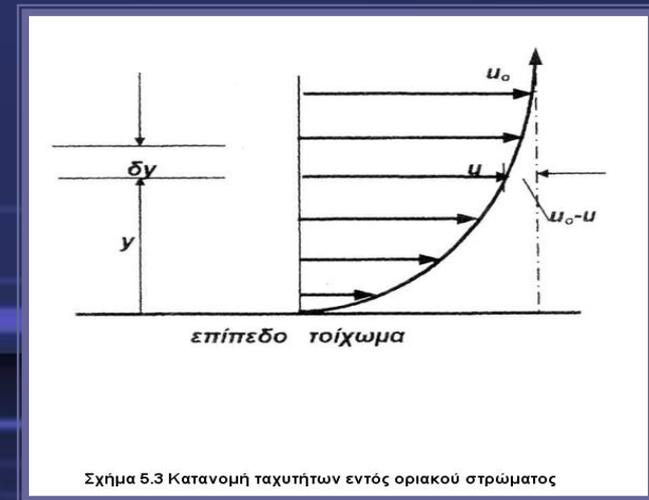
Το πάχος μετατόπισης $\delta^*(m)$ ορίζεται ως το ολοκλήρωμα,

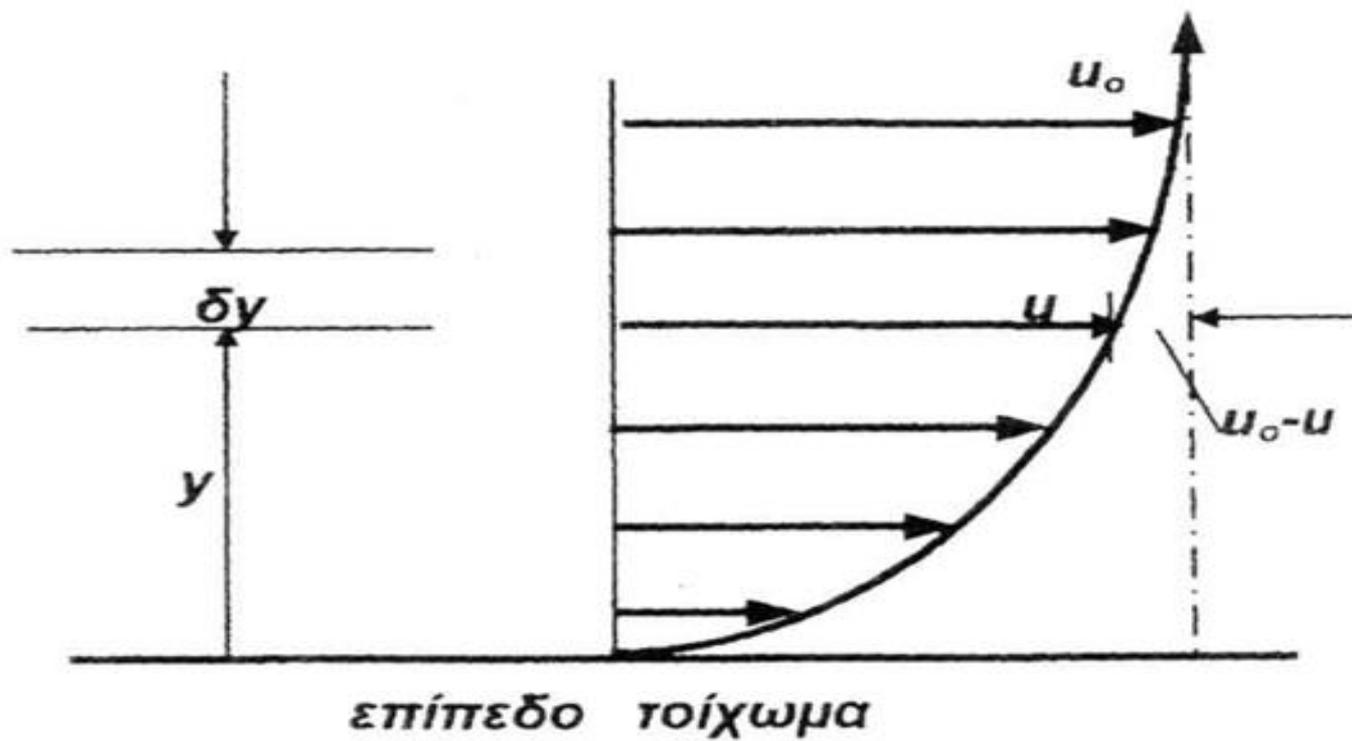
$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy \quad (5.2)$$

και εκφράζει την "μετατόπιση" του στερεού τοιχώματος κατά απόσταση δ^* . Η παροχή, βλέπε Σχήμα 5.3, για το οριακό στρώμα είναι μικρότερη της παροχής της κυρίως ροής (έξω από το οριακό στρώμα) διά μέσω του ίδιου εμβαδού διατομής. Αυτό συμβαίνει διότι η ταχύτητα u εντός του οριακού στρώματος είναι μικρότερη της u_0 , ταχύτητας της κυρίως ροής. Η ελάττωση της παροχής λόγω της ανάπτυξης του οριακού στρώματος είναι,

$$u_0 \delta^* = \text{παροχή ανά μονάδα πλάτους} = \int_0^\delta (u_0 - u) dy \quad (5.3)$$

Είναι δηλαδή η εξίσωση (5.2).





Σχήμα 5.3 Κατανομή ταχυτήτων εντός οριακού στρώματος

Το πάχος της ορμής θ^* (m) δίνεται από μια ανάλογη εξίσωση της (5.2) και εκφράζει την ελάττωση της ορμής λόγω μείωσης της ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα. Είναι:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy \quad (5.4)$$

Είναι, βλέπε εξισώσεις (3.20) και (10.4),

$$\begin{aligned} (\rho u_0 \theta) u_0 &= (\text{μάζα μονάδα χρόνου}) \text{ ταχύτητα} = \\ \text{ορμή} &= \int_0^{\delta} \rho u (u_0 - u) dy \end{aligned} \quad (5.5)$$

Είναι δηλαδή η εξίσωση (5.4). Η ποσότητα $\rho u_0^2 \theta$ (N) ονομάζεται **διατμητική δύναμη** και εκφράζει την αντίσταση της ροής λόγω των στερεών ορίων. Είναι προφανές ότι εάν L (m) είναι το μήκος του οριακού στρώματος τότε:

$$\rho u_0^2 \theta = \int_0^L \tau_0 dx \quad (5.6)$$

$$\rho u_0^2 \theta = \int_0^L \tau_0 dx$$

όπου x (m) η κατά μήκος απόσταση από το τοίχωμα και τ_0 (N/m²) η **διατμητική τάση** στα τοιχώματα.

Παρακάτω δίνονται οι περιπτώσεις όπου η ροή εντός του οριακού στρώματος είναι κατά πρώτον στρωτή και κατά δεύτερον τυρβώδης.

5.2.1 Στρωτή ροή εντός οριακού στρώματος

Η κατανομή της ταχύτητας εντός στρωτού οριακού στρώματος μπορεί, σε μία γενική μορφή, να είναι της μορφής,

$$\frac{u}{u_0} = \left[A \frac{y}{\delta} - B \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (5.7)$$

εάν οι τιμές των σταθερών A , B είναι γνωστές τότε η εξίσωση του υπολογισμού του πάχους της ορμής, εξίσωση (5.4) γράφεται:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy = \int_0^{\delta} \left[A \frac{y}{\delta} - B \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \left\{ 1 - \left[A \frac{y}{\delta} - B \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \right\} dy \quad (5.8)$$

και είναι ολοκληρώσιμη. Με τον ίδιον τρόπον η εξίσωση υπολογισμού του πάχους μετατόπισης δ , εξίσωση (5.2), μπορεί να υπολογισθεί:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy = \int_0^{\delta} \left\{1 - \left[A \frac{y}{\delta} - B \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]\right\} dy \quad (5.9)$$

Η διατμητική τάση τ_0 στο τοίχωμα (δηλαδή στη θέση $y=0.0 \text{ m}$) υπολογίζεται από την εξίσωση (1.4),

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} = \mu u_0 \frac{d}{dy} \left[A \frac{y}{\delta} - B \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]_{y=0} = \quad (5.10)$$

$$\mu u_0 \left[\frac{A}{\delta} - \frac{2By}{\delta} \right]_{y=0} = \frac{\mu u_0 A}{\delta}$$

5.2.2 Τυρβώδης ροή εντός οριακού στρώματος

Έξω από το στρωτό οριακό υπόστρωμα και εντός του χώρου ανάπτυξης της τυρβώδους οριακής στοιβάδας έχει επιβεβαιωθεί πειραματικός ο νόμος της κατανομής του $1/7$ (*Prandtl*). Ισχύει δηλαδή:

$$\frac{u}{u_o} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (5.11)$$

Η αντικατάσταση της παραπάνω κατανομής των ταχυτήτων στην εξίσωση (5.2) δίνει την τιμήν της δ^* . Ομοίως, από την εξίσωση (5.4) υπολογίζεται η τιμή του θ . Πρόβλημα προκύπτει κατά τον υπολογισμό της διατμητικής τάσεως τ_0 όπου στην θέση $y=0.0$ m η τιμή du/dy μηδενίζεται. Μετρήσεις δείχνουν ότι:

$$\tau_0 = \frac{0.023 \rho u_o^2}{\text{Re}_\delta^{1/4}} \quad (5.12)$$

όπου,

$$\text{Re} = \frac{\rho u_o \delta}{\mu} = \frac{u_o \delta}{\nu} \quad (5.13)$$

5.3 Το οριακό στρώμα στους ανοικτούς αγωγούς

Όπως αποδεικνύεται από τη θεωρία στους κλειστούς αγωγούς, ο συντελεστής τριβής της ροής είναι στενά συνδεδεμένος με την k της σχετικής τραχύτητας k/D των τοιχωμάτων του αγωγού, όπου k (m) είναι η τραχύτητα της επιφανείας και D είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού. Είναι φυσικό λοιπόν να αναμένεται ότι στους ανοικτούς αγωγούς ο συντελεστής τριβής κατά Chezy C να είναι και αυτός συνδεδεμένος με την τραχύτητα των ορίων του ανοικτού αγωγού.

Όπως στους υπό πίεση αγωγούς κυκλικής διατομής η διάμετρος θεωρείται ως βασικό χαρακτηριστικό της γεωμετρίας έτσι και στους ανοικτούς αγωγούς η υδραυλική ακτίνα R εξυπηρετεί ως χαρακτηριστικό μέγεθος στις μετρήσεις στους ανοικτούς αγωγούς. Η θεώρηση της διατμητικής τάσεως στα όρια του ανοικτού αγωγού φαίνεται, βλέπε εξίσωση (4.13), ότι ο συντελεστής κατά Chezy C συνδέεται με το συντελεστή τριβής f με την εξίσωση:

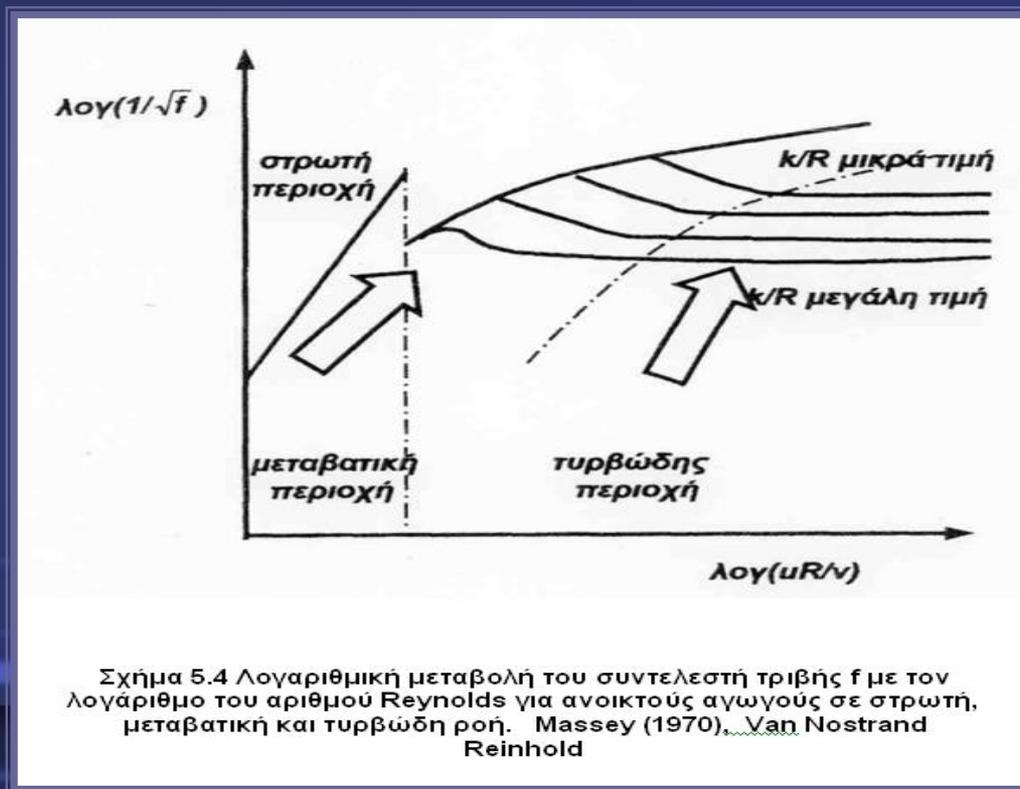
$$C = \left(\frac{2g}{f} \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

Τα σχετικά λοιπόν διαγράμματα τα οποία συνδέονται με την υδραυλική μελέτη των κλειστών αγωγών, διαγράμματα τριβής κατά *Moody*, είναι δυνατόν να επαναχρησιμοποιηθούν αν βεβαίως πραγματοποιηθεί η αντικατάσταση της διαμέτρου D των κλειστών αγωγών με την τιμήν $4R$ διότι στους κλειστούς αγωγούς (κυκλικής διατομής) ισχύει ότι:

$$R = \frac{A}{P} = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi D} = \frac{D}{4} \quad (5.15)$$

Το Σχήμα 5.4 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αναμένεται να εξαρτάται ο συντελεστής C με τον αριθμό Reynolds.

Στην τραχεία ζώνη της γραφικής παράστασης ο συντελεστής C είναι σταθερός για μία επί μέρους τιμή του λόγου τραχύτητας k/R και επομένως είναι προφανές ότι η εξίσωση κατά Manning μπορεί να εφαρμοσθεί με σχετικά μεγάλη ακρίβεια.

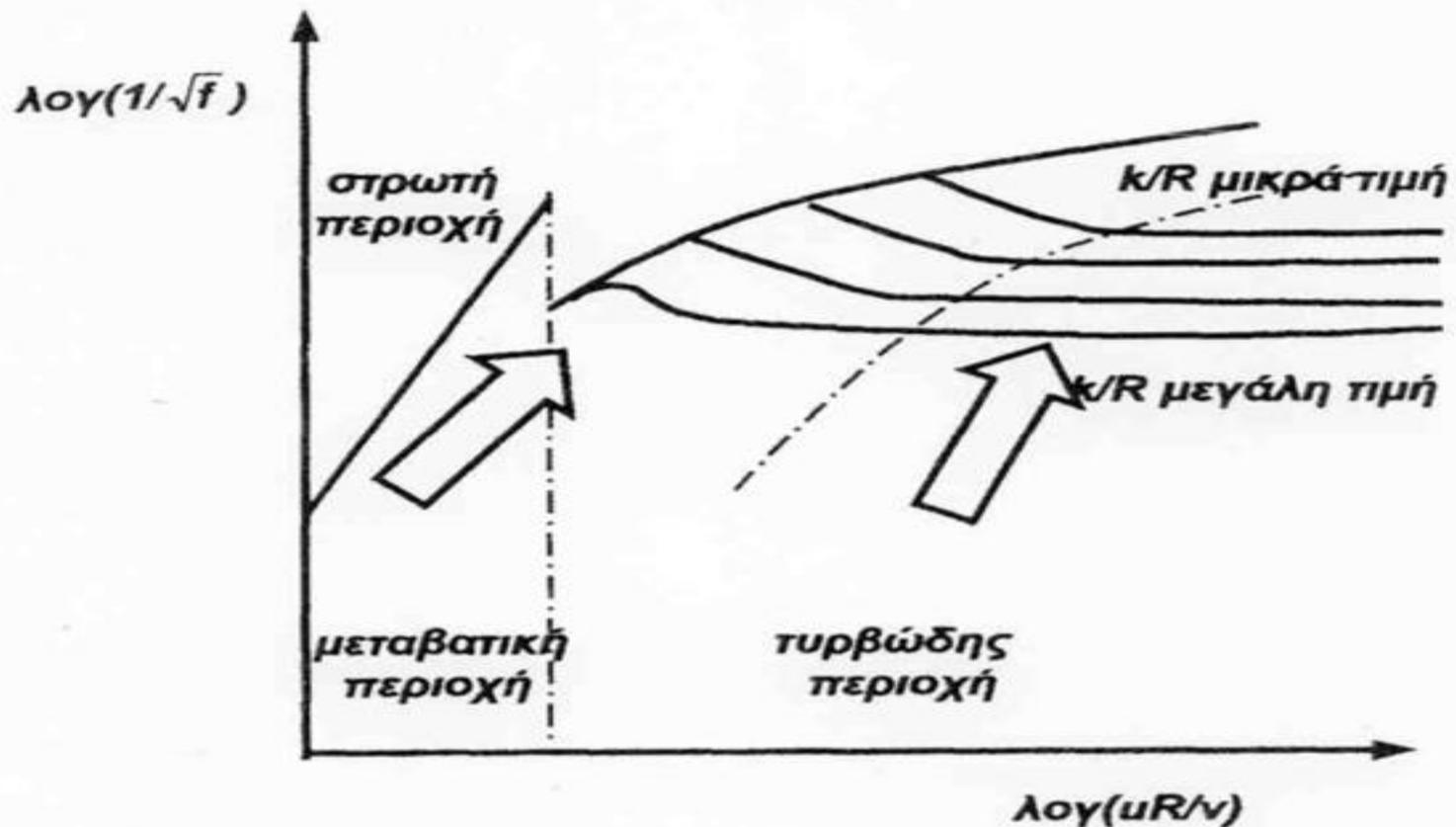


Για την τραχεία ζώνη η παρακάτω εξίσωση δίνει τον τρόπον της μεταβολής του συντελεστή τραχύτητας f σε τυρβώδη ροή και μέσα σε τραχείς κλειστούς αγωγούς κυκλικής διατομής:

$$f^{-1/2} = 4.0 \log \left(\frac{D}{k} \right) + 2.28 \quad (5.16)$$

$$\frac{C}{(2g)^{1/2}} = 4.0 \log \left(\frac{D}{k} \right) + 2.28 \quad (5.17)$$

Με αντικατάσταση του D με $4R$ από την εξίσωση (5.15) και επίσης με αντικατάσταση του συντελεστή C με $\frac{R^{1/6}}{n}$ από την εξίσωση (4.19) είναι:



Σχήμα 5.4 Λογαριθμική μεταβολή του συντελεστή τριβής f με τον λογάριθμο του αριθμού Reynolds για ανοικτούς αγωγούς σε στρωτή, μεταβατική και τουρβώδη ροή. Massey (1970), Van Nostrand Reinhold

$$\frac{R^{1/6}}{n19.62^{1/2}} = 4.0 \lambda \operatorname{og} \left(\frac{4R}{k} \right) + 2.28 \quad (5.18)$$

ΕΠΟΜΕΝΩΣ:

$$n = \frac{0.0564 R^{1/6}}{\lambda \operatorname{og} \left(14.86 \frac{R}{k} \right)} \quad (5.19)$$

Επειδή όμως η ροή στους ανοικτούς αγωγούς είναι κάθε τι άλλο παρά συμμετρικά διευθετημένη, οι αριθμητικοί συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης έχουν μεγάλη ασάφεια.

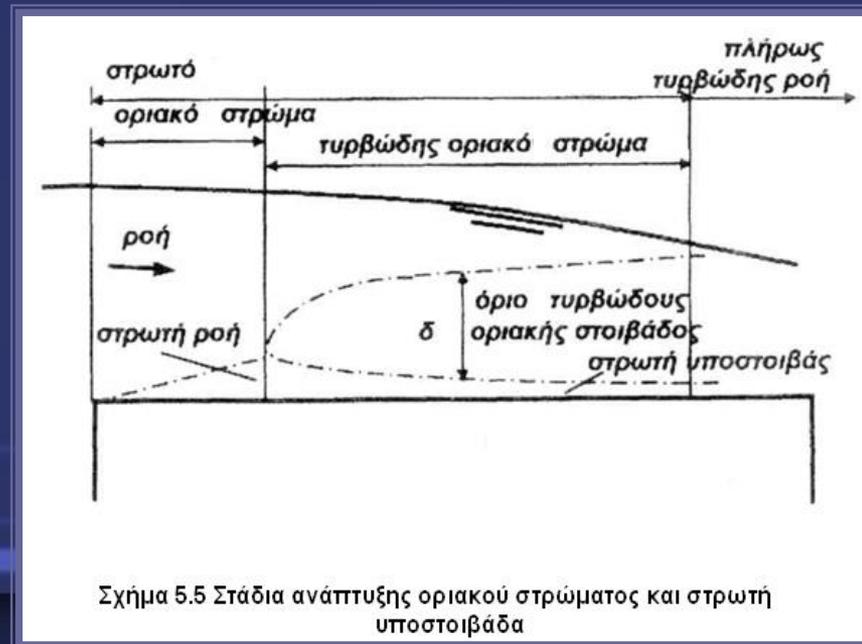
Παρόλα αυτά η εξίσωση (5.19) δείχνει ότι με λογαριθμική κατανομή της τραχύτητας στους ανοικτούς αγωγούς σε τυρβώδη ροή, ο συντελεστής κατά Manning n έχει μικρότερο βαθμό εξαρτήσεως από το συντελεστή τραχύτητας k και ακόμη μικρότερη από την υδραυλική ακτίνα R .

Προφανώς τα παραπάνω ισχύουν για ροή εντός ανοικτών αγωγών με σταθερά γεωμετρικά όρια.

Στην περίπτωση όπου υπάρχει και μετακίνηση ύλης και κατά συνέπεια διαμόρφωση νέων θέσεων των γεωμετρικών ορίων του πυθμένα και των πρανών τότε τα αποτελέσματα είναι πολύπλοκα και η θεωρητική μελέτη της κατανομής της ταχύτητας δυσκολότατη.

5.4 Υδραυλικός ήπια και τραχέα στερεά όρια

Οι στερεές επιφάνειες οι οποίες περιβάλλουν την ροή των ανοικτών αγωγών μπορούν να χαρακτηρισθούν ως υδραυλικός ήπιες ή τραχείς λαμβάνοντας ως κριτήριο το πάχος της στρωτής οριακής υποστοιβάδας (υποστρώματος), βλέπε Σχήμα 5.5, και του μεγέθους του συντελεστή της τραχύτητας της επιφανείας k .



Εάν το μέγεθος της τραχύτητας είναι τέτοιο ώστε να καλύπτεται πλήρως από τη στρωτή υποστοιβάδα τότε εξ ορισμού το στερεό όριο είναι **υδραυλικός ήπιος**. Σε αυτήν την περίπτωση η τραχύτητα δεν επιδρά στην ροή παρά μόνο εντός της οριακής υποστοιβάδας.

Αντιθέτως εάν τα μεγέθη της τραχύτητας είναι τόσο μεγάλα ώστε να προβάλλουν στην οριακή στοιβάδα, τότε εξ ορισμού το στερεό όριο είναι **υδραυλικώς τραχύ** και η ροή έξω από τη στρωτή οριακή υποστοιβάδα εξαρτάται από τη τραχύτητα.

Ισχύουν τα παρακάτω όρια, French (1986),

υδραυλικός ήπιο στερεό όριο,

$$0 \leq \frac{ku^*}{\nu} \leq 5.0 \quad (5.20)$$

Μεταβατικό στερεό όριο,

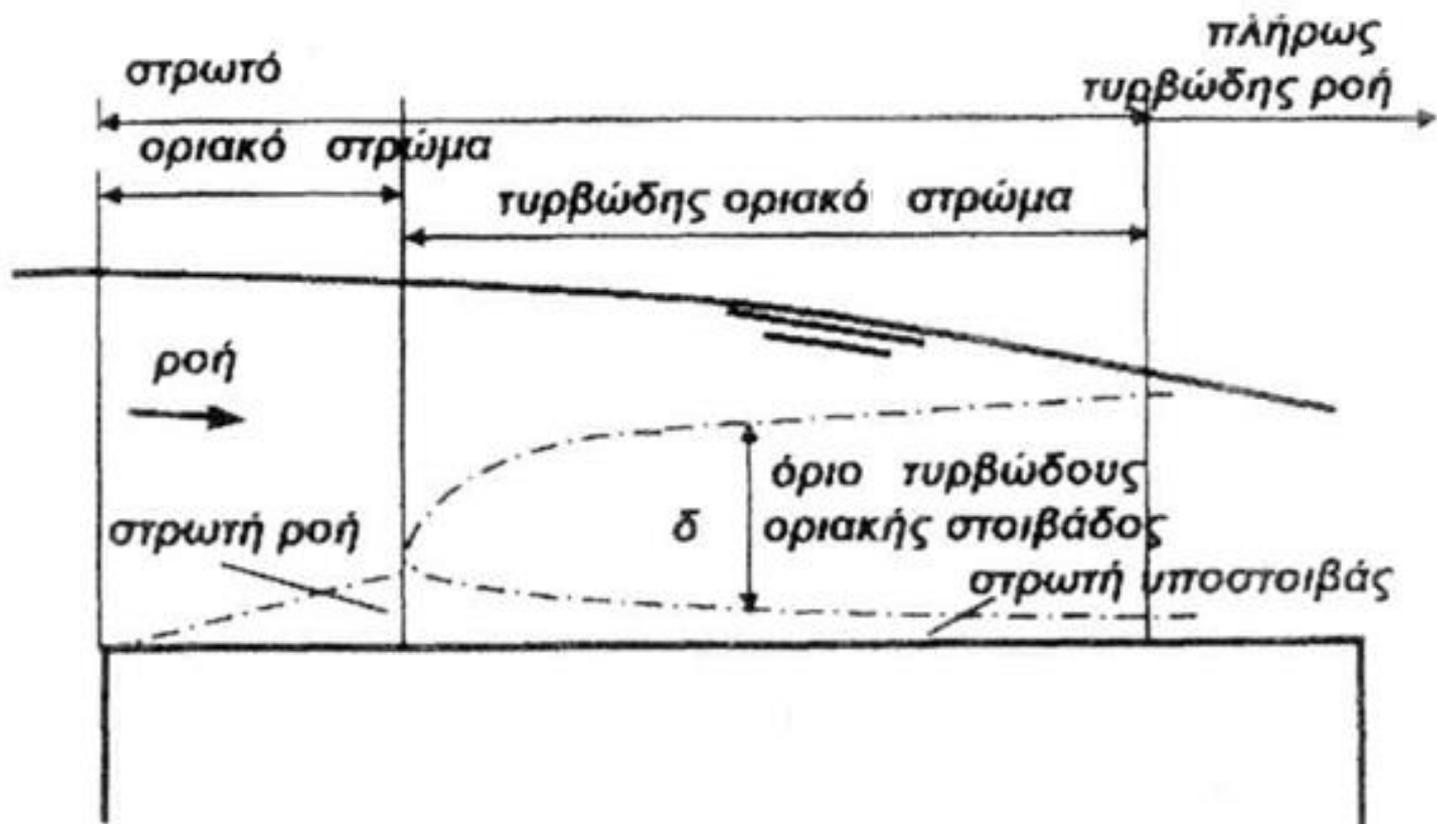
$$5.0 \leq \frac{ku^*}{\nu} \leq 70.0 \quad (5.21)$$

υδραυλικός τραχύ στερεό όριο,

$$70.0 \leq \frac{ku^*}{\nu} \quad (5.22)$$

Όπου u^* η διατμητική ταχύτητα,

$$u^* = \sqrt{gRS} \quad (5.23)$$



Σχήμα 5.5 Στάδια ανάπτυξης οριακού στρώματος και στρωτή υποστοιβάδα