

**Πηνελόπη Καμπάκη Βουγιουκλή**

## **ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ ΣΤΗ ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ**

Abstract

In present paper we propose, at least at research level, the application of mathematical models, arising from the general way of development of any branch of Mathematics, in language teaching. Overall, two ways of complete development of prototypes are suggested; however, for the needs of present investigation, we will focus only on the prototype which consists of two “steps”, or “stages”, namely the cartesian product and the quotient. From these two stages, the cartesian product seems to be quite simple and what is crucial about it is to be recognized. On the other hand, the quotient seems to be rather complex, it is not unique and, moreover, requires special knowledge, practice and experience so that its potential and utility would be revealed.

### 1. Εισαγωγή

Τα μαθηματικά, είτε κατά παραγγελία είτε από την ανάγκη της καθαρής έρευνας, προσφέρουν μοντέλα, *πρότυπα*, σε όλες σχεδόν τις επιστήμες. Η χρήση των προτύπων μπορεί να είναι εμφανής, σε περίπτωση που χρησιμοποιούνται τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθηματικών, ή αφανής, όταν η χρήση των μαθηματικών δεν είναι προφανής. Οι διάφοροι κλάδοι των μαθηματικών προσφέρουν τα ‘οικοδομήματά’ τους, τις *δομές* τους, και η προσφορά τους είναι άλλοτε σε έξαρση και άλλοτε σε ύφεση. Από την άλλη μεριά, η τάση του νου για την εξήγηση καταστάσεων και φαινομένων, βρίσκει την έκφρασή της με τη βοήθεια των ‘εργαλείων’ των μαθηματικών επειδή, κατά κανόνα, είναι ορατά, κατανοητά και εύκολα μεταφέρσιμα. Επιπλέον, περιβάλλονται από μία αυστηρότητα, η οποία δημιουργεί σιγουριά και σεβασμό. Η γλωσσολογία, όπως και οι

άλλες εφαρμοσμένες επιστήμες, αναζητά πρότυπα σε όλα τα πεδία των μαθηματικών και ήδη υπάρχει σχετική βιβλιογραφία, όπως Gross (1972), και Cross and Moscardini (1985). Τα πρότυπα αυτά μπορούν να αφορούν μια ειδική γλώσσα, πχ. τη γραμματική, τη σύνταξη, το λεξιλόγιο, ή να είναι εφαρμόσιμα σε κάθε γλώσσα, όπως η παγκόσμια γραμματική. Έτσι εμφανίζονται κλάδοι των μαθηματικών που προσφέρουν πρότυπα όπως η στατιστική (στη διδακτική της γλώσσας και την ψυχολογία) και η άλγεβρα (με τα δέντρο-διαγράμματα, τις ημιομάδες, κτλ.). Υπάρχει όμως η πιθανότητα να χρησιμοποιηθούν και άλλοι κλάδοι των μαθηματικών επειδή ακόμη και στα ίδια τα μαθηματικά εμφανίστηκαν πρότυπα τα οποία έδωσαν συμπεράσματα και απροσδόκητες λύσεις σε διαφορετικούς χώρους του κλάδου. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της άλγεβρας που 'έλυσε' τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας, όπως, για παράδειγμα, αποδεικνύοντας ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος. Επίσης είναι χαρακτηριστικό ότι οι μαθηματικοί μερικές φορές αναγκάζονται να αναζητούν πολύπλοκα πρότυπα, όπως, για παράδειγμα, στην Κρυπτογραφία όπου χρησιμοποιούνται τέτοια πρότυπα τα οποία είναι μεν σαφή αλλά κωδικοποιημένα έτσι ώστε να μην είναι αναγνωρίσιμα από τους μη-μυημένους. Αυτό στη γλώσσα μπορεί να αντιστοιχεί με τη συνήθεια των παιδιών να χρησιμοποιούν τα λεγόμενα «κορακίστικα». Άλλες φορές, πάλι, οι ερευνητές αναζητούν πρότυπα σε περιπτώσεις που, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι δεν αναφερόμαστε σε μαθηματικά, όπως η θεωρία των ασαφών συνόλων (fuzzy theory), ή η θεωρία του χάους (chaos theory).

Βέβαια, η παρουσίαση οποιουδήποτε μαθηματικού προτύπου δεν συνεπάγεται την υποχρεωτική εφαρμογή του. Επιπλέον τα μαθηματικά πρότυπα μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε κάποια περίπτωση ή σε κάποια χρονική στιγμή. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές φορές ή να περιέλθουν σε αχρηστία. Το χρήσιμο είναι να διατίθενται σε πρώτη ζήτηση και να είναι, κατά το δυνατό, ορατή η ευρύτητα των πιθανών εφαρμογών τους. Ακόμη, η αναζήτηση ενός συνολικού, τέλει, προτύπου-πανάκεια, είναι ουτοπία. Όμως η αναζήτηση των προτύπων περιορίζει την ουτοπία όταν ελαχιστοποιούνται οι απαιτήσεις. Αυτό μπορεί να γίνει δυνατό μέχρι ένα βαθμό με την εξειδίκευση των παραμέτρων και των χώρων έρευνας. Για παράδειγμα, η γλώσσα είναι ένας τεράστιος ερευνητικός χώρος και όλοι γνωρίζουμε ότι η απαίτηση εύρεσης συνολικού προτύπου είναι ματαιοπονία ή, στην αισιόδοξη εκδοχή, την οποία ασπάζομαι, είναι πρόκληση. Επιβάλλεται, επομένως, να αναζητηθούν περιορισμοί όπως, για παράδειγμα, η εκμάθηση μίας ξένης γλώσσας και η κατάκτηση της μητρικής.

Οι μοντέρνοι κλάδοι των μαθηματικών άρχισαν τα τελευταία χρόνια να εισβάλλουν στο χώρο της παροχής προτύπων. Το πλήθος των κλάδων των μαθηματικών που συμμετέχουν οδηγεί στη σκέψη αναζήτησης της σχέσης που έχουν μεταξύ τους τα προτεινόμενα μοντέλα. Προτείνεται λοιπόν, όπου χρησιμοποιούνται μαθηματικά μοντέλα, να διερευνώνται όλα τα κύρια στάδια ανάπτυξης τους. Ο λόγος είναι να δοθεί η δυνατότητα στον ερευνητή να ολοκληρώσει την έρευνά του ανακαλύπτοντας, ενδεχομένως, νέες πτυχές οι οποίες είναι κρυμμένες στη διαδικασία.

## 2. Γενικά Πρότυπα Προτύπων

Στην Vougiouklis et al (2000), προτείνονται δυο γενικοί τρόποι ανάπτυξης-μελέτης που εφαρμόζονται σε κάθε κλάδο των μαθηματικών. Πρόκειται για δυο διαδικασίες οι οποίες ανιχνεύονται σε κάθε μαθηματική έρευνα, ενσυνείδητα ή υποσυνείδητα, αλλά πάντοτε απαρέγκλιτα.

Σε κάθε περίπτωση προτείνεται:

*«Η μελέτη όλων των σταδίων ανάπτυξης των προτύπων, έτσι ώστε η χρήση των μοντέλων να είναι πλήρης.»* (Vougiouklis et al, 2000)

Συγκεκριμένα, οι δυο αυτές διαδικασίες είναι οι ακόλουθες:

### I. Πρώτο Γενικό Πρότυπο

Τα στάδια ανάπτυξης ενός μαθηματικού κλάδου είναι:

1. *Επιλογή του βασικού αντικειμένου - συνόλου μελέτης.*
2. *Επιλογή των βασικών αξιωμάτων – βασικοί δομικοί κανόνες.*
3. *Κατασκευή –οικοδόμηση.*
4. *Μορφισμοί, δηλαδή βασικές απεικονίσεις που μεταφέρουν τις δομές ή τα βασικά δομικά στοιχεία.*
5. *Ενδομορφισμοί, δηλαδή μορφισμοί στην ίδια δομή, που τους ονομάζουμε μετασχηματισμούς στη μετασχηματιστική γραμματική, και τα χαρακτηριστικά τους, δηλαδή τα αναλλοίωτα στοιχεία.*

Στο στάδιο (1), πρέπει να προσδιοριστούν σαφώς τα αρχικά αντικείμενα και το σύνολο μελέτης.

Στο (2), πρέπει να καθοριστούν τα αξιώματα, τα οποία είναι τα στοιχεία δόμησης και να τεθούν οι κανόνες κατασκευής. Πρέπει να τονισθεί ότι οι βασικοί κανόνες που τίθενται πρέπει να είναι λίγοι, εύχρηστοι και να μην οδηγούν σε αντιφάσεις .

Το στάδιο (3) της κατασκευής είναι το κυριότερο, το ογκωδέστερο και αυτό το οποίο υπερκαλύπτει την ανάπτυξη του αντικειμένου, με συνέπεια πολλές φορές τα άλλα στάδια να γίνονται δυσδιάκριτα πράγμα που αποτελεί τεράστιο μειονέκτημα στην έρευνα και τη διδασκαλία.

Στο (4), γίνεται ο ορισμός των μορφισμών, δηλ. των απεικονίσεων που μεταφέρουν τα στοιχεία δόμησης, κυρίως από τη μια δομή στην άλλη· αυτό σημαίνει *κίνηση*, σημαίνει δυνατότητα σύγκρισης. Το βασικό αντικείμενο των *παραμέτρων* εμφανίζεται σε αυτό το στάδιο.

Τέλος, το στάδιο (5) μελετά τους μετασχηματισμούς. Τα *αναλλοίωτα* στοιχεία είναι τα αμετάβλητα των απεικονίσεων

## II. Δεύτερο Γενικό Πρότυπο

Στα μαθηματικά υπάρχουν δυο αντίστροφες διαδικασίες:

(α) το **γινόμενο**, το οποίο ονομάζεται *καρτεσιανό*, αποτελεί απλούστατη διαδικασία και βασίζεται στη 'διάταξη' με το γινόμενο γίνεται μια 'έκρηξη' δυνατοτήτων αναπαράστασης, και

(β) το **πηλίκο**, το οποίο είναι πολύπλοκη και *μη μοναδική* διαδικασία, η οποία αντίθετα με το γινόμενο, επιδιώκει το 'συμμάζεμα' της δομής, την κατανόησή της και προπαντός τη μεταφορά της.

Στην Vougiouklis et all (2000), προτείνονται τα παραπάνω μοντέλα στα πλαίσια της παγκοσμιοποίησης των επιστημών. Επισημαίνονται τα αναλλοίωτα στοιχεία διότι, πέρα από τη χρησιμότητά τους, ο σεβασμός στα ειδικά χαρακτηριστικά προάγει την επιστήμη και τον πολιτισμό.

Ο Chomsky (1986), θέτει τα βασικά του ερωτήματα που είναι τα *αξιώματα* και οι *παράμετροι*. Αυτά είναι τα στάδια (1) και τμήμα του (4) του παραπάνω Πρώτου Γενικού Προτύπου. Η *γλώσσα - πυρήνας*, είναι τα βασικά στοιχεία που μένουν αμετάβλητα σε όλες τις φυσικές γλώσσες. Είναι, δηλαδή το χαρακτηριστικό ή αναλλοίωτο στοιχείο και συνεπώς, αποτελεί τμήμα του σταδίου (5).

Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε μόνο με την ανάπτυξη του Δεύτερου Γενικού Προτύπου, δηλαδή του δίπολου γινόμενο-πηλίκο με έμφαση στο πηλίκο. Ακόμη, θα γίνει προσπάθεια να καταδειχτεί το τι πιθανόν σημαίνει το δίπολο γινόμενο-πηλίκο και όχι να επιβληθεί η εφαρμογή του προτύπου. Όμως, οι κύριες παράμετροι είναι απαραίτητο να καθοριστούν από την αρχή καθώς και οι πιθανές διαδικασίες πηλίκου.

### 3. Το καρτεσιανό γινόμενο

Το *καρτεσιανό* γινόμενο, από το όνομα του Γάλλου ορθολογιστή φιλοσόφου Καρτέσιου ( Rene Des Cartes, 1596-1650) ο οποίος το εισήγαγε και, κυρίως, το ανέδειξε, είναι μία απλή διαδικασία κατασκευής η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορες παραλλαγές και σε διαφορετικές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, στη γραφή της γλώσσας απαιτείται η επιλογή των συμβόλων-γραμμάτων, δηλαδή η αλφαβήτα, η οποία επιλογή είναι αυθαίρετη αλλά απαραίτητη προκειμένου να γίνει δυνατή η έκφραση της γλώσσας και του πολιτισμού με ένα τρόπο ορατό και αντιληπτό. Το καρτεσιανό γινόμενο στηρίζεται στη *διάταξη*, δηλαδή στη διαδοχική παράθεση των γραμμάτων, χωρίς τη δυνατότητα ελεύθερης αντιμετάθεσής τους. Το γεγονός αυτό πολλαπλασιάζει τις δυνατότητες αναπαράστασης όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

Με τα 24 γράμματα του αλφαβήτου μας μπορούμε να έχουμε, δυνητικά:

(α) 24 'λέξεις' με ένα μόνο γράμμα, δηλαδή

$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \epsilon, \dots, \eta, \dots, \theta, \dots, \omega.$

Ήδη στη διάταξη αυτή μπορούμε να αναγνωρίσουμε μικρές, πρωταρχικές ελληνικές 'λέξεις' όπως είναι τα άρθρα 'ο' και 'η', καθώς και τα επιφωνήματα 'α!', 'ε!'.

(β)  $24^2 = 576$  λέξεις με δύο γράμματα, δηλαδή

αα, αβ, αγ, ..., αν, ..., βα, ββ, βγ, ..., γα, γβ, ..., δα, ..., θα, ..., μη, ..., να, ..., τα, τη, τι, το, ..., ωά, ..., ωψ, ωω

Εδώ αναγνωρίζουμε λέξεις όπως 'αν', 'θα', 'τα', 'τη', 'τι', 'το'.

(γ)  $24^3 = 13.824$  λέξεις με τρία γράμματα, δηλαδή

ααα, ααβ, ..., αεί, ..., από, ..., αφή, ..., βββ, ..., βία, ..., δεν, ..., διά, ..., δύο, ..., ένα, ..., και, ..., λες, μεν, ..., μου, ..., της, ..., ωαα, ..., ώρα, ..., ωωψ, ωωω

Εδώ, πλέον, έχουμε μία κατηγορία λέξεων της ελληνικής από τις πολυπληθέστερες, πολλές από τις οποίες είναι δυσύλλαβες: 'αεί', 'από', 'βία', 'διά', 'ώρα'.

(δ)  $24^4 = 331.776$  λέξεις με τέσσερα γράμματα, δηλαδή

αααα, αααβ, ..., αέρα, ..., άκου, ..., άνθη, ..., ββββ, ..., βάζω, ..., βαρύ, ..., βέλη, ..., γελώ, ..., δάση, ..., δεις, ..., δίνω, ..., κάτω, ..., λέγε, ..., λίγο, ..., μπλε, ..., ποιο, ..., όριο, ..., τόσο, ..., φέξε, ..., χάρη, ..., ψάρι, ..., ψωμί, ..., ωααα, ..., ώρες, ..., ωωωψ, ωωωω.

Σε αυτό το σημείο θα μπορούσε, δυνητικά, να σταματήσει μία υποτιθέμενη γλώσσα τους περαιτέρω συνδυασμούς γιατί οι πιθανότητες φαίνονται να είναι πολύ μεγάλες. Τουλάχιστον για την ΚΝΕ, μπορούμε, σε συνδυασμό με όλες τις προηγούμενες, πια να κάνουμε ολόκληρες φράσεις: 'Μη μου το λες', 'Φέξε μου λίγο να δω', 'Σιγά τα ωά', 'Κόψε κάτι', 'Άκου να δεις', 'ποιο θες;' 'το μπλε'. Συνεχίζουμε όμως την παραγωγή λέξεων και με περισσότερα γράμματα.

Όλα τα παραπάνω, βεβαίως ισχύουν όταν δεν καταλύονται οι φωνοτακτικοί κανόνες της γλώσσας μας και εφόσον οι ανάγκες της γλώσσας το απαιτούν. Στην ίδια λίστα 'πιθανών λέξεων' ανατρέχουμε και όταν κάνουμε συντμήσεις ή βραχυγραφίες, όταν χρησιμοποιούμε αρκτικόλεξα ή όταν θέτουμε συμβάσεις, πχ. ΟΤΕ, μ.μ., ΜΜΕ, κ.α..

Πέρα από τη χρήση του στα γράμματα ή στα φωνήματα (για τον προφορικό λόγο), έχουμε και τη χρήση του καρτεσιανού γινομένου στην παράθεση μορφημάτων, δηλαδή στη μορφολογία, και λέξεων για τη δημιουργία προτάσεων, δηλαδή στη σύνταξη. Το καρτεσιανό γινόμενο δημιουργεί μία έκρηξη στη δυνατότητα αναπαράστασης λέξεων και νοημάτων. Θα μπορούσε να συγκριθεί με την έκλυση *ενέργειας* από την *ύλη* μετά την έκρηξη μίας ατομικής βόμβας. Τέλος, θα πρέπει να τονισθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο, εκτός από απλή διαδικασία, προπαντός είναι και μοναδική, γίνεται μόνο με παράθεση.

Στη διδασκαλία, η παράθεση εικόνων και συμβόλων (επομένως και γραμμάτων) γίνεται με μία διάταξη, πράγμα που σημαίνει ότι βρισκόμαστε σε διαδικασία καρτεσιανού γινομένου. Η διαδικασία αυτή αυξάνει εκθετικά τα αντικείμενα μελέτης. Για παράδειγμα με τα 24 γράμματα της ελληνικής αλφαβήτας η παράθεση 5 γραμμάτων σημαίνει ότι φτάνουμε σε ένα τεράστιο αριθμό 'λέξεων' (πεντάδων) δηλαδή  $24^5 = 7.962.624$ . Τα μεγέθη αυτά δεν γίνονται κατανοητά από τους διδασκόμενους (μήπως και από τους διδάσκοντες;) και ορθώς γιατί το 'πεπερασμένο' της συσσώρευσης των γνώσεων είναι μάλλον περισσότερο κατανοητό. Αρκεί να λάβει κανείς υπόψη το γεγονός ότι 'ξεχνάμε', εκουσίως ή ακουσίως, πράγματα που μάθαμε και τα αντικαθιστούμε με άλλα, χρησιμότερα ή καινούργια. Κι αυτό γιατί ο εγκέφαλός μας δεν έχει –τουλάχιστον από ότι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε μέχρι σήμερα- την ικανότητα να αποθηκεύει γνώση επ' άπειρον. Από το ξεκίνημα, επομένως, της διατύπωσης του γινομένου πρέπει να αρχίσει η προσπάθεια περιστολής, συμμαζέματος. Αυτό γίνεται με την ομαδοποίηση ή κατηγοριοποίηση έτσι ώστε, αν είναι δυνατό, να δημιουργηθεί αυτό που στα μαθηματικά ονομάζεται *διαμέριση*.

#### 4. Το πηλίκo

Στα μαθηματικά, ανάλογα με τη δομή που πρέπει να μελετηθεί, υπάρχουν τα λεγόμενα *αντίθετα* ή *αντίστροφα* στοιχεία. Ως διαδικασίες οι αντίστροφες δεν είναι απαραίτητες εύκολες, προφανείς και ανάλογες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αντίστροφη διαδικασία του καρτεσιανού γινομένου είναι η διαδικασία του πηλίκου. Με άλλα λόγια είναι η προσπάθεια του «συμμαζέματος», ή, σύμφωνα με το παράδειγμα από τη φυσική, η αντίστροφη διαδικασία της μετατροπής της ενέργειας σε ύλη.

*Πηλίκo στα μαθηματικά σημαίνει μία διαμέριση ή ένα χωρισμό του συνόλου που έχουμε, έτσι ώστε τα ομαδοποιημένα σύνολά μας να συμπεριφέρονται με ανάλογο ομοιόμορφο τρόπο.*

Η ομοιομορφία της συμπεριφοράς τους, φυσικά, αναφέρεται σε κάποιες παραμέτρους, σε κάποιες εκφάνσεις που ενδιαφέρουν τον χρήστη. Ο χωρισμός αυτός σε υποσύνολα θα πρέπει να είναι σαφής, απόλυτος, χωρίς επικαλύψεις για να μην οδηγείται κανείς σε αντιφάσεις των συμπερασμάτων του, ή, όπως λέμε, να μην οδηγείται κανείς σε ασάφειες που ουσιαστικά σημαίνουν τη διάλυση της δομής τους. Το πηλίκo στα μαθηματικά, και, κατά συνέπεια, σε οποιονδήποτε άλλο κλάδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί, δεν είναι απλή διαδικασία, όμως το κυριότερο και πλέον ενδιαφέρον από ερευνητική άποψη, δεν είναι μοναδική διαδικασία. Επομένως, ένας ερευνητής δεν έχει την απαίτηση να βρει ένα μοναδικό πηλίκo το οποίο να του λύνει το πρόβλημα, ή ακόμα δυσκολότερο, όλα τα προβλήματα. Μπορεί να αναζητήσει πολλά πηλίκα και να τα χρησιμοποιήσει ανάλογα, όπως θα δούμε στις εφαρμογές. Με δεδομένο λοιπόν ότι το πρόβλημα του πηλίκου είναι τεράστιο, μόνο προτάσεις για πηλίκα φαίνονται να είναι εφικτές. Ακόμη, όταν ένας ερευνητής προτείνει ένα πηλίκo δεν έχει την απαίτηση υιοθέτησης και εφαρμογής της συγκεκριμένης διαδικασίας. Απλώς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ή όχι, κατά περίπτωση. Η απόρριψη ενός πηλίκου, όπως και κάθε δομής, είναι προσωρινή. Δεν πρέπει, επομένως να είναι οριστική, αλλά, απλώς, ας βρίσκεται στη φαρέτρα των δομών προς χρήση.

Τα παραπάνω παρατέθηκαν για να καταδειχτεί το μέγεθος της δυσκολίας και μάλιστα στη διαδικασία του ηλίικου γιατί εκεί πρέπει να επεμβαίνει ο διδάσκων. Πρέπει, επομένως, να γνωρίζει το μέγεθος της δυσκολίας του αντικειμένου σε κάθε σημείο του ώστε να χρησιμοποιεί ανάλογες μεθόδους.

Συνεπώς, η *Παγκόσμια Γραμματική* του Chomsky ως σύστημα υποθεωριών είναι, στην πραγματικότητα, μία πορεία γινομένου. Ομοίως, όταν ο Eco (1995) θεωρεί τα Λατινικά και τη ‘vulgata’, που εμφανίζονται στο Δάντη, ως ανεξάρτητες γλώσσες, ουσιαστικά υποστηρίζει ότι η τέλεια γλώσσα είναι μία καρτεσιανή διαδικασία.

Στα όρια της *μεταγλώσσας* και επί της θεωρίας των υποθεωριών του Chomsky, τίθεται η ακόλουθη διαδικασία ηλίικου:

*«Χρησιμοποιώντας ένα καρτεσιανό γινόμενο υποθεωριών, να βρεθεί μία επέκταση, και με τη χρήση ενός ηλίικου, να βρεθεί μία νέα θεωρία που θα περιέχει τις αρχικές ως υποπεριπτώσεις.» (Vougiouklis et al, 2000, p 490)*

Για να μπορέσει να εφαρμοστεί η συγκεκριμένη πορεία στη γλωσσολογία, θα πρέπει κανείς να πάρει το καρτεσιανό γινόμενο δυο (ή μιας) υποθεωριών και στη συνέχεια να κάνει ένα ηλίικο καθορίζοντας τι σημαίνει ‘ισοδύναμο’. Επομένως το βασικό ερώτημα είναι: ‘ποια είναι τα ισοδύναμα στοιχεία;’

Εξαιτίας του γεγονότος ότι η διαδικασία ηλίικου δεν είναι μοναδική, αν αφηθεί κανείς ελεύθερος, μπορεί να οδηγηθεί σε ‘βαβυλωνία’. Από την απεριόριστη ελευθερία που μας δίνει το καρτεσιανό γινόμενο, θα πρέπει να προσαρμοσθούμε στους σταδιακούς περιορισμούς. Η τάξη, που έρχεται με το ‘διαχωρισμό’, γίνεται με πολλούς γνωστούς τρόπους, αλλά και με άγνωστους, που θα εμφανιστούν στην πορεία. Έτσι μπορούν να τεθούν περιορισμοί στο μέγεθος των λέξεων (πχ. όχι λέξεις πάνω από 20 γράμματα !), ή κάθε λέξη να περιέχει τουλάχιστο ένα φωνήεν, ποια από τα συμπλέγματα συμφώνων είναι αποδεκτά κλπ. Φυσικά μεγάλος περιορισμός είναι οι *δυνάμει λέξεις* (βλ. γινόμενο παραπάνω), τουλάχιστο σε μια περίοδο ομιλίας-γραφής μιας γλώσσας. Οι γραμματικοί περιορισμοί όπως οι κλίσεις των ρημάτων και ουσιαστικών, οι συντακτικοί περιορισμοί την τυπολογία των γλωσσών, όπως υποκείμενο-ρήμα-αντικείμενο, αποτελούν δεσμεύσεις, επομένως διαχωρισμούς. Ο καταγισμός των δεσμεύσεων (κανόνων) περιορίζει ελάχιστα την ευρύτητα μιας γλώσσας. Διότι, πέρα από το γεγονός ότι βρίσκεται κανείς μπροστά σε τεράστιο, μη αφομοιώσιμο αριθμό λέξεων, προκύπτουν άλλες διαδικασίες γινομένου όπως είναι η αλλαγή της σημασίας των λέξεων λόγω τονισμού (τονικά παρώνυμα *φορά-φόρα, πρόγονος-προγονός κτλ.*), λόγω γραφής (ομόγραφα *λόγια [‘lojia] - [‘loja, έννοια, χρόνια, πίεςτε κτλ.*) και λόγω πολλαπλής σημασίας (πολυσημία και συνωνυμία) που μεταβάλλονται σε διάφορες περιόδους ομιλίας. Η ‘λεξιπλάσια’ αντιμάχεται την ‘επιγραμματική γραφή’, η αύξηση της επιστημονικής ορολογίας αντιμάχεται τις ξενόφερτες λέξεις. Με άλλα λόγια, η προσπάθεια της γλώσσας να ομαδοποιήσει σημασιολογικά τις υπάρχουσες λέξεις ή να μικρύνει το μήκος τους, έρχεται αντιμέτωπη με τις καινούργιες που συνήθως είναι μεταφράσεις από ξένες και έχουν μεγάλο μήκος, τουλάχιστον στη νέα ελληνική, λόγω της μορφολογικής πλαστικότητάς της. Στη διαμάχη αυτή εμφανίζονται ξενικά αρκτικόλεξα τα οποία εκλαμβάνονται και χρησιμοποιούνται ως λέξεις, όπως, για παράδειγμα, ‘έιτζ’ από το αρκτικόλεξο της αγγλικής AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome) και το ελληνικό ισοδύναμό του ‘σύνδρομο επίκτητης ανοσοποιητικής ανεπάρκειας’ (ΣΕΑΑ). Βρίσκεται

λοιπόν κανείς σε μια μάχη γινομένου-πηλίκου και στο μόνο που μπορεί να επέμβει είναι το ηλίκο.

Οι περιορισμοί-δεσμεύσεις μπορεί να είναι από απλές σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων μέχρι την πλήρη απόλειψη ορισμένων από αυτές. Ο καθορισμός του χώρου και του βαθμού ανάπτυξης μιας γλώσσας είναι επίσης πολύ καθοριστικός παράγοντας. Έτσι, για παράδειγμα, μπορεί να είναι αρκετό ένα πενιχρό λεξιλόγιο για να συνεννοηθούν και να εργαστούν κάποιοι μετανάστες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε την περίπτωση 'απεικόνισης προβολής' όπου οι γραμματικοί και οι συντακτικοί κανόνες αγνοούνται ως παράμετροι. Το ίδιο ισχύει και στους περισσότερους επιστημονικούς χώρους όπου μάλιστα το λεξιλόγιο δεν προέρχεται αποκλειστικά από μία μόνο γλώσσα.

Οι κύριες παράμετροι είναι, επομένως, απαραίτητο να καθοριστούν από την αρχή καθώς και οι πιθανές διαδικασίες ηλίκου.

Ας ολοκληρώσουμε αναφερόμενοι σε δύο ευρείες κατηγορίες εκμάθησης της γλώσσας. Η πρώτη είναι η εκμάθηση μίας ξένης γλώσσας. Στην περίπτωση αυτή το υποκείμενο γνωρίζει καλά μια γλώσσα, επομένως γνωρίζει κάποιους κανόνες στους οποίους έμαθε να υπακούει. Επομένως, έμαθε, έστω και ασυνείδητα, να ομαδοποιεί, να δημιουργεί ηλίκα. Γιαντό το σκοπό έμαθε να χρησιμοποιεί μεθόδους, όπως οι *αλγόριθμοι*, πάλι ασυνείδητα. Για παράδειγμα, όταν ψάχνει να βρει κάτι σε ένα λεξικό ή μία εγκυκλοπαίδεια και ξεκινάει πρώτα με το πρώτο γράμμα, ύστερα με το δεύτερο, με το τρίτο κ.ο.κ. ώσπου να βρει τη λέξη που ψάχνει, χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο που ισχύει στη λεξικογραφική διάταξη. Ακόμη και το παιδί της προσχολικής ηλικίας που μαθαίνει το τραγουδάκι ή, καλύτερα, γλωσσικό παιχνίδι 'το ντίλι το ντίλι και πάλι ξαναντίλι' εφαρμόζει τον αλγόριθμο που ισχύει για την παραγωγή αλληλεξαρτημένων αναφορικών προτάσεων που μπορεί να αναδιπλώνονται επάπειρον (βλ. Βελοούδης 2001). Κατά συνέπεια, πρέπει να γίνει εκμετάλλευση αυτών των δεξιοτήτων με κάθε τρόπο. Οι τρόποι αυτοί μπορεί να περιλαμβάνουν το κοινό λεξιλόγιο, τους κοινούς φθόγγους, τους κοινούς γραμματικούς και συντακτικούς κανόνες. Πρέπει, ακόμη, να εντοπιστούν οι ταχύτερα αφομοιώσιμοι κανόνες όπως είναι οι συμπληρωματικοί κανόνες και οι αντίθετοι. Θα πρέπει να διδαχθούν και οι απόλυτοι, σαφείς και κύριοι κανόνες της νέας γλώσσας.

Η δεύτερη είναι η κατάκτηση της πρώτης, της μητρικής, γλώσσας η οποία γίνεται σε μικρή ηλικία. Κι εδώ προέχει, εκτός από την εκμάθηση του αντικειμένου, της παροχής και αποθήκευσης της γνώσης, η σταδιακή εκμάθηση των απλούστερων κανόνων. Κανόνων που θα αφομοιωθούν με την εξάσκηση, σταδιακά και σε συνδυασμό με άλλες ενέργειες όπως το παιχνίδι και το τραγούδι. Οι περιπλοκότεροι κανόνες πρέπει να «διδάσκονται» μόνο όταν έχει μάθει το παιδί να υπακούει σε κανόνες, όταν έχει μάθει να κατηγοριοποιεί και να έχει σαφή αντίληψη για το ηλίκο, και ας μην έχει προσδιορίσει ακόμη -ή και ποτέ -το ύψος του άλματος που έκανε.

Ακολουθούν τρεις εφαρμογές του γινομένου, δύο εκ των οποίων έχουν παρουσιασθεί εν μέρει στις Καμπάκη και Βουγιουκλής, 2002, και Καμπάκη, Π., 2002.



#### 4. Εφαρμογές

##### (α) Περί τονισμού

Με την καθιέρωση του μονοτονικού συστήματος καταργήθηκαν τα πνεύματα και η περισπωμένη αντικαταστάθηκε από την οξεία - η βαρεία είχε ήδη καταργηθεί σε προηγούμενο στάδιο. Αυτό στα μαθηματικά είναι μία απεικόνιση που ονομάζεται *προβολή* και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι αν ξαναπροβάλουμε την εικόνα, αυτή παραμένει η ίδια, δεν αλλάζει. Με την προβολή διατηρούμε ένα εκτεταμένο αναλλοίωτο υποσύνολο, κάτι δηλαδή, που δεν απαλείφεται περαιτέρω. Αυτό το θέμα της προβολής άπτεται του Πρώτου Γενικού Προτύπου (Καμπάκη, 2001). Επιπλέον, από το σκεπτικό μας θα εξαιρέσουμε τις περιπτώσεις των μονοσυλλάβων και εγκλιτικών λέξεων.

Το πηλίκo από άποψη τονισμού, για την ελληνική γλώσσα, είναι ο χωρισμός του συνόλου των λέξεων σε τρία υποσύνολα: οξύτονες, παροξύτονες, προπαροξύτονες. Επειδή το πηλίκo έχει μόνο τρία σύνολα, προφανώς δεν μπορεί να διατηρηθεί η σημασία των λέξεων, διότι έτσι, θα απαιτούσαμε όλες τις οξύτονες λέξεις να σημαίνουν το ίδιο ακριβώς. Από την άποψη του συμβολισμού, έχει καθιερωθεί η σύμβαση το τονικό σημάδι να τοποθετείται πάνω στο τονιζόμενο φωνήεν. Επειδή, λοιπόν, έχουμε τρία σύνολα και πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ τους, είναι απαραίτητο τα δύο να διακρίνονται από το τρίτο. Ας δούμε τι γίνεται στα μαθηματικά σε μία αντίστοιχη περίπτωση με αριθμούς: όλοι ξέρουμε ότι προκειμένου να διακρίνουμε τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς, τοποθετούμε το «πλήν (-)» μπροστά από τους αρνητικούς όχι όμως το «συν (+)» μπροστά από τους θετικούς αριθμούς, επειδή όλοι γνωρίζουμε ότι είναι περιττό. Στον τονισμό παρατηρούμε ότι η τελευταία συλλαβή στην οποία αναζητούμε τόνο είναι η λήγουσα. Όταν, λοιπόν, ψάχνουμε σε μία λέξη τον τόνο και δεν τον βρούμε στην προπαραλήγουσα και στην παραλήγουσα, αυτομάτως τονίζουμε στη λήγουσα. Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε από το να τονίσουμε την τελευταία συλλαβή, εκτός, βέβαια, αν πρόκειται για παρόραμα. Επομένως, ενώ στην παραλήγουσα και στην προπαραλήγουσα είναι απαραίτητο το τονικό σημάδι (πβλ αρνητικοί αριθμοί), στη λήγουσα δεν φαίνεται να είναι απαραίτητο (πβλ θετικοί αριθμοί). Έτσι, οδηγούμαστε στην πρόταση

*‘να μη χρησιμοποιείται το τονικό σημάδι στη λήγουσα’*

Κατά την πληκτρολόγηση, αυτή είναι μία απολύτως οικονομική πρόταση. Όπως φαίνεται ο Ε. Γιανίδης (Τσολάκης, 1995), που είχε προτείνει να μην μπαίνει τονικό σημείο στη λήγουσα, είχε ουσιαστικά αντιληφθεί και εφαρμόσει, συνειδητά ή ασυνειδητά, την έννοια του πηλίκου.

##### (β) Περί αυθαίρετου και μη χωρισμού στη γραφή

Το πηλίκo, όπως προαναφέραμε, είναι ένας τελείως αυθαίρετος χωρισμός, μία τελείως αυθαίρετη διαμέριση. Αν και το γεγονός αυτό γίνεται δύσκολα αποδεκτό από τον πολύ κόσμο, οι εφαρμογές του μερικές φορές θεωρούνται περίπου αυτονόητες. Ας δούμε πώς γίνεται μία τέτοια «αυτονόητη εφαρμογή» στον χωρισμό, στη διαμέριση ενός γραπτού κειμένου. Ο χωρισμός ενός κειμένου σε προτάσεις, παραγράφους και κεφάλαια είναι απόφαση του συγγραφέα, ο οποίος μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δημιουργεί, ασυνείδητα βέβαια, πηλίκα των οποίων το περιεχόμενο, καθενός ξεχωριστά, αναφέρεται σε μία

ευρύτερη νοηματική ενότητα. Προχωρώντας, τώρα, στη δακτυλογράφηση του κειμένου παρατηρούμε την περαιτέρω δημιουργία αυθαίρετων πηλίκων. Έτσι, για παράδειγμα, η αυτόματη αλλαγή της σελίδας καθώς και η αυτόματη αλλαγή των γραμμών αποτελούν ένα σαφές πηλίκιο, όμως, επαναλαμβάνω, αυθαίρετο και, μάλιστα, πρόσκαιρο για τον λόγο ότι μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλονται οι διαστάσεις της σελίδας-πάνω, κάτω, αριστερό, δεξιό περιθώριο και απόσταση γραμμών ή μέγεθος γραμμμάτων. Κάθε σύνολο λέξεων, επομένως, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί - και θα ήταν άσκοπο βέβαια - με το περιεχόμενό του. Εν τούτοις το αποδεχόμαστε και μάλιστα σε τέτοιο βαθμό ώστε να κάνουμε αναφορές στη σελίδα, παράγραφο ή γραμμή τάδε. Δηλαδή, αποδεχόμαστε το αυθαίρετο και το θεωρούμε δεδομένο. Άλλωστε αυτή είναι η γλώσσα: ένα σύνολο αυθαίρετων συμβάσεων όπως παρατήρησε ο Saussure (1916, 1979) αλλά και, πριν από αυτόν, ο Αριστοτέλης. Τέλος, σε αυτή την αυθαίρετη σελιδοποίηση-πηλίκιο βασίζονται και τα ευρετήρια όρων και ονομάτων.

#### (γ) Πρόταση στη διδασκαλία της γλώσσας

Επειδή την έννοια του γινομένου ο κάθε διδάσκων την έχει συνειδητά ή ασυνείδητα πολύ καλά χωνεμένη μέσα του, τη θεωρεί δεδομένη και ορθώς ως ένα σημείο. Έτσι, θα αναγκασθεί να το εφαρμόσει επανειλημμένα και σε πολλά στάδια, όμως χρειάζεται προσοχή μεγάλη επειδή δεν πρέπει να το δώσει με έναν αυστηρό τρόπο, εξ αρχής και «με την πρώτη». Αυτό, γιατί πιστεύω ότι η διαδικασία του γινομένου, παρότι ευκολότατη, πρέπει να γίνει βίωμα βαθμιαία όπως απαιτεί γενικά η διαδικασία της μάθησης. Μεταβαίνοντας στο στάδιο του πηλίκου δεν θα μπορούσε κανείς, σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν, να παρουσιάσει τη διαδικασία του με σαφήνεια και ολοκληρωμένα στις πρώτες βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επομένως, πρέπει να επιλεγούν συγκεκριμένα εύκολα, σαφή και ορατά παραδείγματα πηλίκων και για προφανείς λόγους να παρουσιάζονται όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένα και με σειρά δυσκολίας. Τέλος, προτείνω να είναι ταυτόχρονη η διδασκαλία γινομένου-πηλίκου ή, τουλάχιστον, να γίνεται συνεχής αναφορά του γινομένου σε κάθε διδασκαλία πηλίκου. Δηλαδή όταν συμμαζεύει κανείς κάτι, να γνωρίζει το μέγεθος του συμμαζέματος σε σύγκριση με το σύνολο.

Όσον αφορά τις εφαρμογές στη διδασκαλία, τόσο στο συμπεριφοριστικό όσο και στο γνωστικό μοντέλο διδασκαλίας (Σαλβαράς, 2002), διαπιστώνουμε καταρχήν τα εξής:

*Συμπεριφοριστικό μοντέλο:* Στο συγκεκριμένο μοντέλο η γνώση αποκτάται με την εξάσκηση και σύμφωνα με το σχήμα

ερέθισμα → αντίδραση + εξωτερικές τονώσεις

Η ανάγνωση, η γραμματική, το συντακτικό κτλ διδάσκονται είτε μεμονωμένα είτε συνδυαστικά μέσα από ένα κείμενο. Κατά συνέπεια, είτε δίνουμε τους κανόνες, γενικούς ή ειδικούς οι οποίοι προήλθαν από τη μελέτη της δομής της γλώσσας, είτε χωρίζουμε τις παραμέτρους που συνθέτουν τη γλώσσα και δίνουμε κανόνες στις επιμέρους παραμέτρους (γραμματική, σύνταξη κτλ). Αν οι μαθητές έχουν την ικανότητα να κατηγοριοποιούν τις περιπτώσεις, δηλαδή να δημιουργούν πηλίκια και επομένως να βγάζουν οι ίδιοι τους κανόνες, τότε το μοντέλο είναι εφαρμόσιμο και έχουμε τόσες εξωτερικές τονώσεις στον αλγόριθμο όσες απαιτούνται για να επιτευχθεί το ζητούμενο, δηλαδή να βγει ο κανόνας.

*Γνωστικό μοντέλο:* ερέθισμα → γνωστική διαδικασία & επικοινωνιακή κατάσταση → αντίδραση,

και με τις αλλαγές που αυτή επιφέρει στο περιβάλλον της μάθησης.

Σύμφωνα, επομένως, με τη δική μου ανάγνωση διατίθενται, μέσω της διδασκαλίας, οι γνωστικές διαδικασίες και η επικοινωνιακή κατάσταση κατά δόσεις και με βήματα τέτοια που να αναπτύσσονται οι δομικοί κανόνες, ενώ βρίσκονται σε μία διαλεκτική σχέση σε ανερχόμενης δυσκολίας καταστάσεις, οι οποίες ταυτόχρονα «ανακαλύπτονται», μελετώνται σε βάθος και γίνονται κτήμα του μαθητή. Κατά τη γνώμη μου, ο βαθμός δυσκολίας με τον οποίο ξεκινάει κανείς να διδάξει μία ομάδα φαινομένων, εξαρτάται από την ικανότητα δόμησης που έχουν οι μαθητές, δηλαδή στην ουσία να εφαρμόζουν γινόμενα και πηλικά, συνειδητά ή, κυρίως, ασυνειδητά. Επίσης στη διάρκεια της διδασκαλίας θα πρέπει να γίνει η εξισορρόπηση των γνωστικών αυτών ικανοτήτων και στη συνέχεια η παράλληλη εφαρμογή.

Και στα δύο μοντέλα, δεδομένου ότι η γλώσσα αντιμετωπίζεται ως όλο, οι «εσωτερικές αλλαγές» είναι οι μετασχηματισμοί των οποίων τα αναλλοίωτα στοιχεία είναι το πλαίσιο και ταυτόχρονα ο σκελετός μέσα και επάνω στα οποία κινείται και στηρίζεται μία οποιαδήποτε δομή, και τα οποία διατυπώνονται με κανόνες που πρέπει να είναι λίγοι και χωρίς εξαιρέσεις, αλλά τούτο ανήκει στον χώρο του πρώτου προτύπου. Ουσιαστικά, αν ως γλώσσα εννοούμε το σύνολο της γραπτής και προφορικής παραγωγής και τα εμφανιζόμενα κείμενα είναι εκφράσεις της ίδιας παραγωγής τότε σύμφωνα με το μοντέλο των 5-βημάτων (Καμπάκη, 2001), ένα βασικό σημείο είναι η ύπαρξη των αναλλοίωτων τα οποία συνθέτουν τη δομή, είναι μεταφέρσιμα και επομένως στηρίζουν τα επόμενα κείμενα.

Κατά την άποψή μου, η διαδικασία εύρεσης των κανόνων είναι δύσκολη και επίπονη γιατί και η απόλυτη υιοθέτησή τους πρέπει να γίνεται με περίσκεψη και με μέτρο. Έτσι, εδώ θέλω να διατυπώσω την ακόλουθη πρόταση:

*«οι κανόνες αυτοί δεν πρέπει να είναι πολλοί διότι δεν πρέπει οι 'άζονες στήριξης' να δεσμεύουν τη δομή»*

#### Βιβλιογραφία

- Βελούδης, Γ. 2001. "Η γνωσιακή μαρτυρία της άρνησης". Αδημοσίευτη διάλεξη, στο Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας του ΔΠΘ, άνοιξη 2001.
- Chomsky, N. 1986. *Barriers*. Boston, Mass: MIT Press.
- Comrie, B. 1996. *Language Universals and Linguistic Typology*. Oxford, UK: Blackwell Publishers.
- Cross, M. - Moscardini, A. O. 1985. *Learning the art of mathematical modelling*. J.Wiley.
- Eco, U. 1995. *Η αναζήτηση της Τέλειας Γλώσσας*. Ελληνικά Γράμματα.
- Gross, M. 1972. *Mathematical Models in Linguistics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Καμπάκη, Π. 2002 "Στο πρότυπο των προτύπων της γλώσσας". Εργασία που παρουσιάστηκε στην 22<sup>η</sup> Συνάντηση του Τομέα Γλωσσολογίας του Τμήματος Ελληνικής Φιλολογίας του ΑΠΘ. Θεσσαλονίκη.
- Καμπάκη, Π. – Βουγιουκλής, Θ. 2002. "Γλώσσα και πηλίκιο". Εφημερίδα ΤΟ ΒΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ, 13 Ιανουαρίου, σελ. Α51.
- Καμπάκη, Π. 2002. 'Μαθηματικά μοντέλα στη γλωσσική διδασκαλία' Πρακτικά ημερίδας για τη διδασκαλία της ελληνικής ως μητρικής γλώσσας, επιμ. Π. Καμπάκη. Σπανίδης: Ξάνθη.

Saussure, F de. 1916. *Cours de linguistique general* Ελληνική μετάφραση Φ. Αποστολόπουλος. 1979. Μαθήματα γενικής γλωσσολογίας. Αθήνα: Παπαζήσης.  
Vougiouklis, Th. - P. Kambakis-Vougiouklis. 2000. "On the Mathematics of the language"  
Πρακτικά Β' Πανελληνίου Συνεδρίου 'Οι Νέες Τεχνολογίες για την Κοινωνία και τον Πολιτισμό', σ. 486-491  
Σαλβαράς, Γ. 2002 *Γλωσσική διδασκαλία για όλους τους μαθητές*. Αθήνα: αυτοέκδοση.  
Τσολάκης, Χ. 1995. *Από το λόγο στη συνείδηση του λόγου*. Θεσσαλονίκη: Βάνιας.

Λέξεις-κλειδιά: *πρότυπο, καρτεσιανό γινόμενο, πηλίκο, αναλλοίωτα στοιχεία, μορφισμοί, ενδομορφισμοί, αντίστροφη διαδικασία, απεικόνιση, προβολή, αλγόριθμος.*

## Περίληψη

*Με την παρούσα εργασία προτείνεται η χρήση στη διδασκαλία μίας γλώσσας, τουλάχιστο σε επίπεδο έρευνας, των μαθηματικών μοντέλων που προκύπτουν από τον γενικό τρόπο ανάπτυξης ενός οποιουδήποτε κλάδου των Μαθηματικών. Γενικά, προτείνονται δύο τρόποι πλήρους ανάπτυξης προτύπων αλλά στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε μόνο στο ένα πρότυπο το οποίο αποτελείται από δύο «βήματα», ή «στάδια», συγκεκριμένα το γινόμενο και το πηλίκο. Από τα δύο αυτά στάδια το μεν πρώτο- το γινόμενο- είναι απλό και συνίσταται κυρίως στην αναγνώρισή του, ενώ το δεύτερο είναι πολύπλοκο, δεν είναι μοναδικό και απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις, εξάσκηση και εμπειρία για να αποκαλυφθούν οι δυνατότητες και η χρησιμότητά του.*

