

‘ΑΠΛΑ’ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗ ΓΛΩΣΣΑ

Θωμά Βουγιουκλή*, Πηνελόπη Καμπάκη**

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

*Παιδαγωγικό Τμ. Δημ. Εκπ., Ν. Χηλή, 68100 Αλεξανδρούπολη

**Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας, Πανεπιστημιούπολη, 69100 Κομοτηνή

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία κατατίθεται η άποψη ότι ακόμη και τα θεωρούμενα απλά μαθηματικά μοντέλα μπορεί και πρέπει να χρησιμοποιούνται ευρέως και συνειδητά σε διάφορες εφαρμοσμένες επιστήμες για την επιστημονική ανάπτυξή τους. Παρατίθενται εφαρμογές της παραπάνω άποψης στην επιστήμη της γλωσσολογίας κυρίως με τη χρήση του γενικού μοντέλου που είναι το δίπολο γινόμενο-πηλίκο.

1. Δυο γενικά μοντέλα μοντέλων

Είναι σαφές ότι, θεωρώντας τη μαθηματική επιστήμη από τη γενική σκοπιά, διαπιστώνουμε το γεγονός ότι διέπεται από μία εσωτερική σταθερή ανάπτυξη. Αυτή η ανάπτυξη μπορεί, η ίδια, να αποτελέσει ένα μοντέλο. Αναφερόμαστε, λοιπόν, στα μοντέλα των μοντέλων των μαθηματικών, δηλαδή στα λεγόμενα μεταμαθηματικά. Οι Vougiouklis, T. - Kambaki-Vougioukli P. 2000, στην εργασία [12], προτείνουν δυο γενικούς τρόπους ανάπτυξης-μελέτης που εφαρμόζονται σε κάθε κλάδο των μαθηματικών και επομένως σε κάθε επιστήμη που χρησιμοποιεί μαθηματικά πρότυπα ή μοντέλα. Πρόκειται για τις ακόλουθες δυο διαδικασίες οι οποίες ανιχνεύονται σε κάθε μαθηματική έρευνα, ενσυνείδητα ή υποσυνείδητα, αλλά πάντοτε σχεδόν απaráγκλιτα.

I. Πρώτο Γενικό Μοντέλο

Τα κύρια στάδια ανάπτυξης ενός μαθηματικού κλάδου είναι:

1. *Η επιλογή του βασικού αντικειμένου - συνόλου μελέτης.*
2. *Επιλογή των βασικών αξιωμάτων – βασικοί δομικοί κανόνες.*
3. *Κατασκευή.*
4. *Μορφισμοί: βασικές απεικονίσεις που μεταφέρουν τις δομές ή τα βασικά δομικά στοιχεία.*
5. *Μετασχηματισμοί (ενδομορφισμοί) και τα χαρακτηριστικά (αναλλοίωτα) στοιχεία.*

II. Δεύτερο Γενικό Μοντέλο

Στα μαθηματικά αντιμάχονται διαρκώς δύο αντίστροφες διαδικασίες:

- (α) *το γινόμενο, το οποίο ονομάζεται καρτεσιανό, και*
- (β) *το πηλίκο*

Με βάση τα παραπάνω διατυπώθηκε η ακόλουθη πρόταση:

Σε κάθε χρήση μαθηματικών μοντέλων να ακολουθούνται όλα τα στάδια που περιλαμβάνονται στο κάθε μοντέλο και να μελετώνται σε βάθος έτσι ώστε να αποκαλύπτονται στοιχεία που «κρύβονται» στη διαδικασία.

Ας αναπτύξουμε λίγο περισσότερο το πρώτο γενικό μοντέλο: Στο στάδιο (1), πρέπει να προσδιοριστούν σαφώς τα αρχικά αντικείμενα και το σύνολο μελέτης. Το σύνολο αυτών των αντικειμένων μπορεί να εμπλουτίζεται και κατά τη μελέτη των επόμενων σταδίων. Στο στάδιο (2), καθορίζονται τα αξιώματα, τα οποία είναι τα στοιχεία δόμησης και διατυπώνονται οι κανόνες κατασκευής. Ένα σημείο που πρέπει να τονισθεί είναι ότι δεν μιλάμε για *αλήθεια* αλλά για *αποδοχή* ή, ακόμα, για *επιβολή* του αξιώματος. Ακόμη, πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι οι βασικοί κανόνες που τίθενται πρέπει να είναι λίγοι, εύχρηστοι και, προπαντός, να μην οδηγούν σε αντιφάσεις που, με τη σειρά τους, θα οδηγήσουν στην κατάρρευση του οικοδομήματος. Το στάδιο (3) της κατασκευής είναι το κυριότερο και αυτό το οποίο υπερκαλύπτει την ανάπτυξη του αντικειμένου, με συνέπεια, πολλές φορές, τα άλλα στάδια να γίνονται δυσδιάκριτα. Κάθε συμπέρασμα προκύπτει από διαδικασία πλήρους διερεύνησης και κάθε μέθοδος που χρησιμοποιείται πρέπει να επισημαίνεται και να καταγράφεται.

Με αυτόν τον τρόπο θα εμπλουτίζεται διαρκώς η παρακαταθήκη των μεθόδων. Τέλος, εδώ γίνεται ο εμπλουτισμός των αρχικών εννοιών ή των βελτιωμένων αποδοχών τους. Στο στάδιο (4), γίνεται ο ορισμός των μορφισμών, δηλαδή των απεικονίσεων που μεταφέρουν τα στοιχεία δόμησης, κυρίως από τη μια δομή στην άλλη. Αυτό σημαίνει *κίνηση*, σημαίνει δυνατότητα σύγκρισης. Η μεταφορά μικρών δομικών στοιχείων οδηγεί στη μεταφορά μεγαλύτερων δομών και οδηγεί στην τυποποίηση της δόμησης. Σε όρους ανθρώπινων αισθήσεων θα μπορούσε να είναι μεταφορά ενός ερεθίσματος από μια αίσθηση σε μια άλλη. Το βασικό αντικείμενο των *παραμέτρων* εμφανίζεται σε αυτό το στάδιο. Οι παράμετροι εμφανίζονται με διαφορετική μορφή, σε διαφορετικούς κλάδους και επιστήμες ακόμη και σε διαφορετικούς μορφισμούς, και αντιμετωπίζονται ανάλογα. Έτσι, για παράδειγμα, στις απεικονίσεις ευρείας εφαρμογής που ονομάζονται *προβολές*, δηλαδή σε αυτές τις f για τις οποίες ισχύει η σχέση $f^2=f$, έχουμε ουσιαστικά την *απαλοιφή* κάποιων παραμέτρων. Μερικές φορές είναι δύσκολο να ανακαλύψει κανείς τους «μορφισμούς». Ως παράδειγμα, αναφέρουμε το έργο ενός συγγραφέα στον οποίο διακρίνουμε το *ύφος*. Ουσιαστικά, όταν μιλάμε για ύφος, αναφερόμαστε σε ένα τύπο απεικόνισης σε λέξεις και προτάσεις ο οποίος εκφράζει τον συγγραφέα.

Τέλος, το στάδιο (5) μελετά τους μετασχηματισμούς όπως η συμμετρία και η προβολή. Τα *αναλλοίωτα* στοιχεία είναι τα αμετάβλητα των απεικονίσεων. Είναι ειδικά στοιχεία ή υποσύνολα των οποίων η ιδιότητα του αναλλοίωτου οδηγεί στην κατανόηση της δομής, στην ανάπτυξή της, στη διαρκή επαλήθευση των συμπερασμάτων που περιέχει και είναι το επιστέγασμα της μελέτης, έστω και αν αυτή δεν έχει ολοκληρωθεί στα άλλα στάδιά της. Στις εργασίες [5,6,7,8,12], επισημαίνονται τα αναλλοίωτα στοιχεία διότι, πέρα από τη χρησιμότητά τους στην έρευνα, συνεισφέρουν προς την κατεύθυνση της διατήρησης διαφορετικών πολιτισμών, επειδή, ακριβώς, ο σεβασμός στα ειδικά χαρακτηριστικά προάγει τόσο την επιστήμη όσο και τον πολιτισμό. Στις προβολές τα αναλλοίωτα αποτελούν, συνήθως, ένα πολύ μεγάλο σύνολο.

Εντοπίζοντας μερικά από τα παραπάνω βήματα ανάπτυξης των δυο γενικών μοντέλων μπορούμε να αναφέρουμε τα ακόλουθα στην επιστήμη της γλωσσολογίας.

Τα βασικά ερωτήματα του Chomsky [1] είναι τα *αξιώματα* και οι *παράμετροι*, αυτά είναι τα στάδια (1), (4) του Πρώτου Γενικού Μοντέλου. Η *γλώσσα – πυρήνας*, είναι τα στοιχεία που μένουν αμετάβλητα σε όλες τις φυσικές γλώσσες, δηλαδή τα *γλωσσικά καθολικά*, αποτελούν το αναλλοίωτο στοιχείο (στάδιο 5). Μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι με τους μορφισμούς η

φυσική γλώσσα αποκτά τη *Λογοτεχνία* της, επειδή σε αυτό το στάδιο γίνεται η μεταφορά των εννοιών και των καταστάσεων που αφορούν στη συγκεκριμένη γλώσσα, στο συγκεκριμένο πολιτισμό. Τα αναλλοίωτα στοιχεία συνηθίζουμε να τα αποκαλούμε ‘αιώνιες αξίες’.

Αναφορικά με το Δεύτερο Γενικό Μοντέλο, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η *Παγκόσμια Γραμματική* του Chomsky ως σύστημα υποθεωριών είναι πορεία γινομένου. Ομοίως, όταν ο Eco [3] θεωρεί τα Λατινικά και τη *vulgata*, που εμφανίζονται στο Δάντη, ως ανεξάρτητες γλώσσες, ουσιαστικά υποστηρίζει ότι η τέλεια γλώσσα είναι μια καρτεσιανή διαδικασία.

2. Το δίπολο γινόμενο-πηλίκο

Στην παράγραφο αυτή θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε το δεύτερο γενικό μοντέλο, δηλαδή του δίπολου *γινόμενο-πηλίκο*, ως ‘απλό’ μοντέλο το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί, συνειδητά ή όχι, πάρα πολλές φορές έτσι ώστε να στηρίξει ένα αντικείμενο μελέτης μιας εφαρμοσμένης επιστήμης.

Πρώτα-πρώτα, είναι γνωστό ότι ο ορισμός μιας σχέσης ισοδυναμίας σε ένα σύνολο είναι έννοια ταυτόσημη με τη διαμέριση ενός συνόλου. Κατά συνέπεια, οποιαδήποτε αυθαίρετη διαμέριση ενός συνόλου σημαίνει πηλίκο. Παρόλο που και αυτό το απλό μοντέλο χρησιμοποιείται ευρύτατα, είναι σημαντικό το πηλίκο να διατηρεί και άλλα στοιχεία της δομής. Για την ακρίβεια, όσο περισσότερα στοιχεία διατηρούνται στις κλάσεις ισοδυναμίας τόσο επιτυχέστερο θεωρείται ένα μοντέλο, είτε απλό θεωρείται είτε σύνθετο. Σε κάθε περίπτωση, η συμπεριφορά ενός πηλίκου, δηλαδή σε ποιο νέο μοντέλο υπακούει και πώς συμπεριφέρεται είναι έργο των μαθηματικών και των κατάλληλων μαθηματικών κλάδων που έχουμε στη διάθεσή μας. Ας αναφερθούμε συγκεκριμένα στις ευρύτατα χρησιμοποιούμενες αλγεβρικές δομές που είναι οι ομάδες. Αν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα και $(H, \cdot)$ μια αναλλοίωτη υποομάδα της, τότε το πηλίκο G/H είναι ομάδα. Αν η $(H, \cdot)$ είναι οποιαδήποτε υποομάδα τότε το πηλίκο G/H είναι μια αλγεβρική δομή που ονομάζεται *υπερομάδα* και είναι αντικείμενο μελέτης των ονομαζόμενων αλγεβρικών υπερδομών. Το στοιχείο που πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ είναι ότι η διαμέριση που γίνεται στις κλάσεις πηλίκου δεν διατηρεί την μονότιμη πράξη αλλά την μετατρέπει σε πλειονότιμη, δηλαδή σε υπερπράξη. Επιπλέον, ιδιότητες και αξιώματα παίρνουν μια διαφορετική μορφή διότι αντί στοιχείων εμφανίζονται σύνολα. Έτσι για παράδειγμα η προσεταιριστική ιδιότητα

$$(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in G,$$

δηλώνει ισότητα συνόλων και όχι στοιχείων. Ένα επιπλέον βήμα σε αυτή την κατεύθυνση, γίνεται όταν δεν κάνουμε διαμέριση στην $(G, \cdot)$ με τη βοήθεια μιας υποομάδας αλλά κάνουμε μια οποιαδήποτε, αυθαίρετη, διαμέριση (S) . Τότε το πηλίκο G/S , είναι μια υπερδομή η οποία εισήχθη το 1990 [11,12] και ονομάστηκε H_v -ομάδα δημιουργώντας τον κλάδο των H_v -δομών ο οποίος περιέχει τις κλασικές υπερδομές. Στις υπερδομές αυτού του τύπου έχει αντικατασταθεί η ισότητα συνόλων με την μη κενή τομή. Έτσι η προσεταιριστική ιδιότητα παίρνει τη μορφή

$$(xy)z \cap x(yz) \neq \emptyset, \quad \forall x,y,x \in G.$$

Υπάρχει πλήθος κλασικών θεωρημάτων τα οποία διατηρούνται και άλλα παίρνουν μια διαφορετική μορφή. Με τα παραπάνω θέλουμε να καταδείξουμε την άποψή μας ότι και με μια οποιαδήποτε αυθαίρετη διαμέριση είναι δυνατόν να διατηρούνται δομικά στοιχεία τα οποία είναι χρήσιμα στην έρευνα και τις εφαρμογές, αρκεί ο ερευνητής να ανακαλύψει τα στοιχεί τα οποία διατηρούνται και την δομή που προκύπτει. Ή, με όρους των παραπάνω προτύπων μας, να ανακαλύψει τους μετασχηματισμούς και τα αναλλοίωτα στοιχεία τους.

Γενικά προτείνουμε στις εφαρμοσμένες επιστήμες τη συνειδητή εφαρμογή του δίπολου γινόμενο-πηλίκο η οποία φυσικά προϋποθέτει την πλήρη κατανόησή της. Ας το δούμε, επομένως, καλύτερα.

Το καρτεσιανό γινόμενο είναι μία απλή και μοναδική διαδικασία η οποία στηρίζεται στη *διάταξη*: στη διαδοχική παράθεση στοιχείων, χωρίς τη δυνατότητα αντιμετάθεσής τους. Το γεγονός αυτό πολλαπλασιάζει τις δυνατότητες αναπαράστασης. Για παράδειγμα με τα 24 γράμματα της αλφαβήτου μας μπορούμε να έχουμε 24^3 'λέξεις' με τρία μόνο γράμματα. Επιπλέον, το καρτεσιανό γινόμενο μπορεί να εφαρμοστεί περισσότερες φορές, όπως στη γλώσσα όπου πέρα από τη γραφή των λέξεων έχουμε και τη γραφή των προτάσεων.

Στα μαθηματικά υπάρχουν οι αντίστροφες διαδικασίες οι οποίες δεν είναι απαραίτητως εύκολες, προφανείς και ανάλογες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η αντίστροφη διαδικασία του καρτεσιανού γινομένου είναι η διαδικασία του *πηλίκου*. Είναι η προσπάθεια του «συμμαζέματος». *Πηλίκο* στα μαθηματικά σημαίνει μία *διαμέριση* ή ένας χωρισμός του συνόλου που έχουμε, έτσι ώστε τα ομαδοποιημένα σύνολά μας να συμπεριφέρονται με ανάλογο ομοιόμορφο τρόπο. Η ομοιομορφία της συμπεριφοράς τους, φυσικά, αναφέρεται σε κάποιες παραμέτρους, σε κάποιες εκφάνσεις που ενδιαφέρουν τον χρήστη. Ο χωρισμός αυτός σε υποσύνολα θα πρέπει να είναι σαφής, απόλυτος, χωρίς επικαλύψεις για να μην οδηγείται κανείς σε

αντιφάσεις των συμπερασμάτων του, ή, όπως λέμε, να μην οδηγείται κανείς σε ασάφειες που ουσιαστικά σημαίνουν τη διάλυση της δομής τους. Το πηλίκο στα μαθηματικά, συνεπώς και σε οποιονδήποτε άλλο κλάδο και αν χρησιμοποιηθεί, δεν είναι απλή διαδικασία, και το κυριότερο, αλλά και πλέον ενδιαφέρον από ερευνητική άποψη, δεν είναι μοναδική διαδικασία. Επομένως, ένας ερευνητής δεν έχει την απαίτηση να βρει ένα μοναδικό πηλίκο το οποίο να του λύνει το πρόβλημα, ή ακόμα δυσκολότερο, όλα τα προβλήματα. Μπορεί να αναζητήσει πολλά πηλίκια κατάλληλα για τις εφαρμογές του. Με δεδομένο λοιπόν ότι το πρόβλημα του πηλίκου είναι τεράστιο, μόνο προτάσεις για πηλίκια φαίνονται να είναι εφικτές. Ακόμη, όταν ένας ερευνητής προτείνει ένα πηλίκο δεν έχει την απαίτηση υιοθέτησης και εφαρμογής της συγκεκριμένης διαδικασίας. Απλώς, αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί ή όχι, κατά περίπτωση. Παρόλο που το πηλίκο είναι δύσκολη διαδικασία, εμφανίζεται φυσιολογικά και θεωρείται αυτονόητη σε κάποιες εφαρμογές όπως θα δούμε παρακάτω σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Με τον όρο ‘απλά μαθηματικά μοντέλα’ εννοούμε τα μοντέλα τα οποία έχουν συγκεκριμένα, διακριτά και λίγα στάδια εφαρμογής τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα και πολλές φορές. Αυτό γίνεται σε διάκριση με τα σύνθετα μοντέλα τα οποία απαιτούν, ενδεχομένως συσσωρευμένες μαθηματικές γνώσεις και σύνθετους κλάδους των μαθηματικών, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι είτε δυσκολότερα είτε χρησιμότερα μαθηματικά.

3. Μερικές εφαρμογές στη γλωσσολογία

Η γλωσσολογία, όπως όλες οι εφαρμοσμένες επιστήμες, προστρέχουν στα Μαθηματικά προκειμένου να εκφράσουν με παραστατικό και αυστηρό τρόπο τη δομή που χρησιμοποιούν. Οι δομές που χρησιμοποιούνται προέρχονται από διαφόρους κλάδους των μαθηματικών.

Η γλωσσολογία, από τότε που καθιερώθηκε, από τους ιστορικούς - συγκριτικούς γλωσσολόγους, ως επιστήμη βασισμένη στην έρευνα και στην παρατήρηση, συνδέθηκε με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων. Η χρήση των μαθηματικών μοντέλων υπαγορεύθηκε από την ανάγκη της επιστημονικής μελέτης της γλώσσας ως αυτόνομου συστήματος -ως δομής- και οδήγησε στην ανάπτυξη του κινήματος του δομισμού (στρουκτουραλισμού), για να φτάσει στην ακμή της περί τα μέσα του 20ου αιώνα με τον N. Chomsky και την γενετική - μετασχηματιστική γραμματική του. Σήμερα, η άμεση ή έμμεση στήριξη σε ένα μαθηματικό μοντέλο, να έχει γίνει προϋπόθεση,

σχεδόν για όλους τους κλάδους της γλωσσολογίας. Ο λόγος φαίνεται να είναι το αδιαμφισβήτητο γεγονός ότι, με τα μαθηματικά μοντέλα, οι δομές που χρησιμοποιεί η γλωσσολογία είναι ορατές, κατανοητές και εύκολα μεταφέρσιμες. Όπως χαρακτηριστικά επισημαίνει ο Μπαμπινιώτης [9]:

ο δομισμός, . . . εξασφάλισε στην επιστήμη της γλώσσας αδιαφιλονίκητο κύρος που απέρρεε από έναν ισχυρό θεωρητικό και μεθοδολογικό οπλισμό.

Οι κλάδοι των μαθηματικών που συνεισφέρουν στη γλωσσολογία μέχρι σήμερα, είναι κυρίως από το χώρο της στατιστικής ή της άλγεβρας. Η συνεισφορά της στατιστικής συνίσταται στον εντοπισμό του προβλήματος με τον προσδιορισμό των παραμέτρων. Στη συνέχεια προστρέχουμε συνήθως στην άλγεβρα, για αναζήτηση μοντέλων. Τα αλγεβρικά μοντέλα δίνουν μια δομή, μια κατασκευή, την οποία, υποτίθεται, ακολουθεί η γλώσσα. Όσο λιγότερες οι αποκλίσεις και απλούστερη είναι η δομή, τόσο περισσότερο πετυχημένο θεωρείται το μοντέλο. Δηλαδή, καταγράφουμε την υπάρχουσα κατάσταση και, στη συνέχεια, προσπαθούμε να ανακαλύψουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα στοιχεία και οι παράμετροι του συγκεκριμένου προβλήματος. Στην περίπτωση των αλγεβρικών μοντέλων, η κατάσταση είναι δεδομένη, τα αξιώματα τίθενται από την αρχή και στη συνέχεια αναζητάμε τη δομή που θα χρησιμοποιηθεί.

Η γλώσσα είναι ένας τεράστιος ερευνητικός χώρος και η απαίτηση εύρεσης συνολικού μοντέλου είναι ματαιοπονία ή, στην αισιόδοξη εκδοχή, αποτελεί πρόκληση. Επιβάλλεται, λοιπόν, να τεθούν περιορισμοί και να αναζητηθούν «μερικά» και όχι «συνολικά» μοντέλα.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι το πλήθος των μαθηματικών μοντέλων που εισβάλλουν στο χώρο των εφαρμοσμένων επιστημών, και της γλωσσικής επιστήμης συμπεριλαμβανομένης, μπορούν, με τη σωστή χρήση, να προσφέρουν πολλά στην περαιτέρω ανάπτυξη της έρευνας. Όπως πολύ εύστοχα παρατηρούν οι M. Cross and Moscardini A O [2]:

Ακόμη, το ενδιαφέρον με τα μαθηματικά μοντέλα είναι ότι αποτελούν ένα σχετικά οικονομικό και γρήγορο τρόπο διευθέτησης κάποιου όχι και τόσο ξεκάθαρα εκφρασμένου προβλήματος, που μπορεί να σχετίζεται είτε με το σύστημα είτε με τη διαδικασία.

Ακολουθούν εφαρμογές κυρίως του δίπολου γινόμενο-πηλίκο.

(α) Περί τονισμού [7,8]

Με την καθιέρωση του μονοτονικού συστήματος καταργήθηκαν τα πνεύματα και η περισπωμένη αντικαταστάθηκε από την οξεία. Αυτό είναι μία προβολή και το θέμα της προβολής άπτεται του Πρώτου Γενικού Προτύπου.

Πηλίκo από την άποψη του τονισμού, είναι ο χωρισμός του συνόλου των λέξεων σε τρία υποσύνολα: οξύτονες, παροξύτονες, προπαροξύτονες. Ο χωρισμός είναι μόνο σε τρία σύνολα, προφανώς δεν μπορεί να διατηρηθεί η σημασία των λέξεων, διότι έτσι, θα είχαμε, για παράδειγμα, όλες τις οξύτονες λέξεις να σημαίνουν το ίδιο ακριβώς. Από την άποψη του συμβολισμού, έχει καθιερωθεί η σύμβαση το τονικό σημάδι να τοποθετείται πάνω στο τονιζόμενο φωνήεν. Επειδή, λοιπόν, τώρα υπάρχουν τρία σύνολα και πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ τους, πρέπει να βρεθεί τρόπος ώστε τα δύο να διακρίνονται από το τρίτο. Ξέρουμε ότι η τελευταία συλλαβή στην οποία αναζητούμε τόνο είναι η λήγουσα. Ψάχνουμε λοιπόν σε μία λέξη τον τόνο, και αν δεν τον βρούμε στην προπαραλήγουσα και στην παραλήγουσα, τονίζουμε αυτόματα στη λήγουσα. Επομένως, ενώ στην παραλήγουσα και στην προπαραλήγουσα είναι απαραίτητο το τονικό σημάδι, στη λήγουσα δεν φαίνεται να είναι απαραίτητο, για την ακρίβεια είναι πλεονασμός. Έτσι, από μαθηματικής πλευράς, οδηγούμαστε στην πρόταση

να μη χρησιμοποιείται το τονικό σημάδι στη λήγουσα

(β) Περί του κενού διαστήματος [7,8]

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα: της ελάττωσης του χώρου που καταλαμβάνει ένα κείμενο. Στη γραφή ενός κειμένου, ένα κενό διάστημα δηλώνει το τέλος μίας λέξης. Αυτό σημαίνει ότι μάλλον έχουμε 25 γράμματα κι όχι 24, δηλαδή το κενό είναι ουσιαστικά το 25^ο γράμμα. Η ευφυής χρήση του κενού διαστήματος, οδηγεί σε ένα πηλίκo, όπου έχουμε τόσα υποσύνολα από όσα γράμματα αποτελείται η μεγαλύτερη λέξη. Επομένως, έχουμε και εδώ ένα πηλίκo, όμως πάλι δεν μπορεί να εκφράζει το νόημα των λέξεων και των φράσεων. Όσον αφορά στην προσπάθεια εξοικονόμησης χώρου, προφανώς πρέπει να καταργηθεί το 25^ο γράμμα, δηλαδή το κενό διάστημα. Προκειμένου να εκφράσουμε το τέλος μίας λέξης, η ιδέα του τελικού σίγμα «ς» θα μπορούσε να βοηθήσει προς αυτή την κατεύθυνση: θα μπορούσε, δηλαδή, να εφευρεθεί μία λίστα «τελικών γραμμάτων». Η ελάττωση του χώρου του κειμένου, με διατήρηση του πλήθους των κλειδιών του πληκτρολογίου, θα μπορούσε να επιτευχθεί

με άλλους τρόπους όπως, για παράδειγμα, με την υπογράμμιση του τελευταίου γράμματος κάθε λέξης. Για να αξιοποιήσουμε τα πλήκτρα που ήδη έχουμε στη διάθεσή μας, η πρότασή μας διαμορφώνεται ως εξής:

***κατάργηση του κενού διαστήματος και το πρώτο γράμμα
κάθε λέξης να είναι κεφαλαίο***

Πρέπει να αναφέρουμε ότι τέτοιοι πειραματισμοί εφαρμόζονται κατά καιρούς σε διάφορους χώρους. Ένα παράδειγμα είναι ο νεωτερισμός στο ΒΗΜΑgazino, το ένθετο της εφημερίδας ΤΟ ΒΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ, όπου στους τίτλους άρθρων αντί του κενού διαστήματος για τον χωρισμό των λέξεων χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα.

(γ) Περί της οικονομίας στη γραφή [6]

Όταν αγοράζουμε γράμματα από το βιβλιοπωλείο για να γράψουμε κάτι επάνω σε μία πινακίδα, δεν μας ενδιαφέρει προφανώς η σειρά, ή η διάταξη, αλλά τα συγκεκριμένα γράμματα που χρησιμοποιούνται και πόσα αριθμητικώς από το καθένα. Έτσι, για να γράψουμε τις λέξεις ΕΙΣΟΔΟΣ και ΕΞΟΔΟΣ αγοράζουμε τα γράμματα Δ,Δ, Ε,Ε, Ι, Ξ, Ο,Ο,Ο,Ο, Σ,Σ,Σ. Θα μπορούσε να ‘αγοράσει’ κανείς τη λέξη: ΔΔΕΕΙΞΟΟΟΟΣΣΣ, να την κόψει σε γράμματα και να πάρει τις λέξεις ΕΙΣΟΔΟΣ και ΕΞΟΔΟΣ. Αυτό το κάνουμε χάριν οικονομίας, ενώ οι πωλητές γραμμάτων θα προτιμούσαν να πωλούν ολόκληρες σειρές, οπότε θα αγοράζαμε 4 σειρές γραμμάτων – όσα και τα Ο που χρειαζόμαστε. Συνεπώς θα πληρώναμε $4 \times 24 = 96$ γράμματα αντί των 13 που χρειαζόμαστε.

Κάτι ανάλογο ισχύει και στη γραφομηχανή, όπου χρησιμοποιούνται τα 24 γράμματα και όχι λέξεις. Αν, παρόλα αυτά, υπάρχουν λέξεις ή φράσεις που επαναλαμβάνονται πολύ τακτικά σε κάποιες κατηγορίες κειμένου, τότε η ύπαρξη κάποιου κλειδιού ή συνδυασμού κλειδιών που θα έδιναν αυτή τη λέξη, θα αποτελούσε πολύ ουσιαστική βοήθεια για τον χρήστη. Για παράδειγμα η ημερομηνία θα μπορούσε να γράφεται χτυπώντας ένα μόνο ένα πλήκτρο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Chomsky, N. *Barriers*. Boston, Mass: MIT Press.1986.
- [2] Cross, M – Moscardini, A O. *Learning the art of mathematical modelling*. J.Wiley, 1985
- [3] Eco, U. *Η αναζήτηση της Τέλειας Γλώσσας*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα. 1995.
- [4] Gross, M. *Mathematical models in linguistics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1972.
- [5] Καμπάκη, Π. *Στο πρότυπο των προτύπων της γλώσσας*. 22^η Συν. Τομέα Γλωσσολογίας του Τμ. Ελλ. Φιλολογίας ΑΠΘ. Θεσ/νίκη, 2001
- [6] --- : *Μαθηματικά μοντέλα στη γλωσσική διδασκαλία*. Πρ.: Η διδασκαλία της ΝΕ ως μητρικής γλώσσας, ΔΠΘ, Κομοτηνή, 2002, 75-87
- [7] Καμπάκη, Π – Βουγιουκλής, Θ. *Η γραφή και πώς να την απλοποιήσουμε*. ΓΙΑΤΙ, τ. 318, Δεκέμβριος 2001, σελ. 63-65.
- [8] --- : *Γλώσσα και πηλίκο*. ΤΟ ΒΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ, 13-1-02, σ. Α51
- [9] Μπαμπινιώτης, Γ. *Ελληνική γλώσσα: παρελθόν-παρόν-μέλλον*. Αθήνα: Gutenberg. 2000.
- [10] Vougiouklis, T: *Hyperstructures and their Representations*, Hadronic Press, 1994.
- [11] --- : *Some remarks on Hyperstructures*, Contemporary Mathematics, American Math. Society, Vol.184, 1995, 427-431.
- [12] Vougiouklis, T. - Kambaki-Vougioukli P. *On the Mathematics of the Language*. Πρακτικά Β' Πανελλήνιου Συν. 'Οι Νέες Τεχνολογίες για την Κοινωνία και τον Πολιτισμό', 2000, 486-491.

Abstract

In this paper it is argued that even the so called simple mathematical models can and should be used both widely and consciously in various applied sciences so as to promote scientific development. In support of this view, there are presented certain applications of this specific theory in linguistics, mainly by the use of the general model which is the dipole of product-quotient.

ΑΠΛΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗ ΓΛΩΣΣΑ

Θωμά Βουγιουκλή*, Πηνελόπη Καμπάκη**, Δ.Π.Θ.

*Παιδαγωγικό Τμ. Δημ. Εκπ., Αλεξανδρούπολη

**Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας, Κομοτηνή

Δυο γενικά μοντέλα μοντέλων

Η μαθηματική επιστήμη, διέπεται από μία εσωτερική σταθερή ανάπτυξη η οποία μπορεί να αποτελέσει ένα μοντέλο. Αναφερόμαστε, στα μοντέλα των μοντέλων των μαθηματικών, δηλ. στα μεταμαθηματικά. Προτείνονται δυο γενικοί τρόποι ανάπτυξης-μελέτης που εφαρμόζονται σε κάθε κλάδο των μαθηματικών και επομένως σε κάθε επιστήμη που χρησιμοποιεί μαθηματικά πρότυπα ή μοντέλα.

I. Πρώτο Γενικό Μοντέλο

Κύρια στάδια ανάπτυξης ενός μαθηματικού κλάδου είναι:

1. *Η επιλογή του βασικού αντικειμένου - συνόλου μελέτης.*
2. *Επιλογή των βασικών αξιωμάτων - βασικοί δομικοί κανόνες.*
2. *Κατασκευή.*
3. *Μορφισμοί: βασικές απεικονίσεις που μεταφέρουν τις δομές ή τα βασικά δομικά στοιχεία.*
4. *Μετασχηματισμοί (ενδομορφισμοί) και τα χαρακτηριστικά (αναλλοίωτα) στοιχεία.*

II. Δεύτερο Γενικό Μοντέλο

Στα μαθηματικά αντιμάχονται δύο αντίστροφες διαδικασίες:

- (α) *το γινόμενο, το οποίο ονομάζεται καρτεσιανό, και*
- (β) *το πηλίκο*

Πρόταση: Σε κάθε χρήση μαθηματικών μοντέλων να ακολουθούνται όλα τα στάδια που περιλαμβάνονται στο κάθε μοντέλο και να μελετώνται σε βάθος έτσι ώστε να αποκαλύπτονται στοιχεία που «κρύβονται» στη διαδικασία.

Στο στάδιο (1), πρέπει να προσδιοριστεί το σύνολο μελέτης. Στο (2), καθορίζονται τα αξιώματα, τα οποία είναι τα στοιχεία δόμησης και οι κανόνες κατασκευής. Δεν μιλάμε για *αλήθεια* αλλά για *αποδοχή* ή, ακόμα, για *επιβολή* αξιώματος. Το στάδιο (3) είναι το κυριότερο το οποίο καλύπτει το αντικείμενο, με συνέπεια, τα άλλα στάδια να γίνονται δυσδιάκριτα. Στο (4), ορίζονται οι μορφισμοί: απεικονίσεις που μεταφέρουν στοιχεία δόμησης, κυρίως μεταξύ δομών. Αυτό σημαίνει *κίνηση* και δυνατότητα σύγκρισης. Οι *παράμετροι* εμφανίζονται εδώ. Στις *προβολές*, δηλ. στις f για τις οποίες $f^2=f$, έχουμε *απαλοιφή* παραμέτρων. Μερικές φορές είναι δύσκολο να ανακαλυφθούν οι μορφισμοί. Παράδειγμα, στο έργο συγγραφέα να διακρίνουμε το *ύφος*. Το (5) μελετά τους μετασχηματισμούς. Τα *αναλλοίωτα* στοιχεία είναι τα αμετάβλητα των απεικονίσεων. Είναι στοιχεία των οποίων η γνώση οδηγεί στην κατανόηση της δομής, στην ανάπτυξή της και είναι το επιστέγασμα της μελέτης.

Μερικά από τα παραπάνω στη γλωσσολογία:

Βασικά ερωτήματα του Chomsky είναι τα *αξιώματα* και οι *παράμετροι*. Η *γλώσσα-πυρήνας*, είναι αμετάβλητη σε όλες τις φυσικές γλώσσες, δηλ. τα *γλωσσικά καθολικά*, είναι αναλλοίωτο. Με τους μορφισμούς η γλώσσα αποκτά τη *Λογοτεχνία* της, διότι γίνεται μεταφορά των εννοιών και καταστάσεων. Τα αναλλοίωτα στοιχεία είναι οι 'αιώνιες αξίες'. Η *Παγκόσμια Γραμματική* του Chomsky ως σύστημα υποθεωριών είναι πορεία γινομένου. Ο Eco θεωρεί τα Λατινικά και τη *vulgata* στο Δάντη, ανεξάρτητες γλώσσες, άρα η *τέλεια γλώσσα* είναι καρτεσιανή διαδικασία.

Το δίπολο γινόμενο-πηλίκο

Ας δούμε το δεύτερο γενικό μοντέλο, *γινόμενο-πηλίκο*, ως απλό μοντέλο το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί, συνειδητά ή όχι.

Σχέση ισοδυναμίας σε σύνολο είναι έννοια ταυτόσημη με τη διαμέριση, άρα κάθε διαμέριση σημαίνει *πηλίκο*. Αυτό είναι ένα απλό μοντέλο. Είναι όμως σημαντικό το πηλίκο να διατηρεί και

άλλα στοιχεία της δομής. Στη θεωρία ομάδων: Αν $(G, \cdot)$ είναι ομάδα και $(H, \cdot)$ αναλλοίωτη υποομάδα της, τότε το πηλίκο G/H είναι ομάδα. Αν η $(H, \cdot)$ είναι τυχαία υποομάδα τότε το G/H είναι μια *υπερομάδα*, δηλ. μια *υπερδομή*. Παρατηρούμε, ότι στο πηλίκο η πράξη μετατρέπεται σε πλειονότιμη. Ιδιότητες και αξιώματα παίρνουν διαφορετική μορφή διότι αντί στοιχείων έχει σύνολα. Έτσι, η προσεταιριστική ιδιότητα

$$(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in G,$$

δηλώνει ισότητα συνόλων. Επιπλέον βήμα γίνεται όταν πάρουμε το πηλίκο της $(G, \cdot)$ ως προς τυχαία διαμέριση (S) . Τότε το G/S , είναι υπερδομή που ονομάστηκε H_v -ομάδα. Εδώ η ισότητα συνόλων έχει αντικατασταθεί με την μη κενή τομή. Έτσι η προσεταιριστική ιδιότητα γίνεται

$$(xy)z \cap x(yz) \neq \emptyset, \quad \forall x, y, z \in G.$$

Κλασικά θεωρήματα διατηρούνται και άλλα τροποποιούνται. Η άποψή μας είναι ότι και σε τυχαίο πηλίκο μπορούν να βρεθούν δομικά στοιχεία χρήσιμα στην έρευνα και τις εφαρμογές.

Το *καρτεσιανό γινόμενο* είναι απλή και μοναδική διαδικασία η οποία στηρίζεται στη *διάταξη*.

Στα μαθηματικά υπάρχουν οι αντίστροφες διαδικασίες οι οποίες δεν είναι απαραίτητως εύκολες και ανάλογες. Αντίστροφη διαδικασία του καρτεσιανού γινομένου είναι το *πηλίκο*. Είναι προσπάθεια συμμαζέματος. *Πηλίκο* σημαίνει *διαμέριση* έτσι ώστε οι κλάσεις να παρουσιάζουν ομοιομορφία ως προς παραμέτρους που ενδιαφέρουν τον χρήστη. Το πηλίκο δεν είναι απλή διαδικασία, και το κυριότερο, αλλά και πλέον ενδιαφέρον, δεν είναι μοναδική. Άρα, ένας ερευνητής δεν έχει την απαίτηση να βρει ένα πηλίκο το οποίο να του λύνει το πρόβλημα. Μπορεί να αναζητήσει πολλά πηλικά κατάλληλα για τις εφαρμογές του.

Λέγοντας '*απλά μαθηματικά μοντέλα*' εννοούμε τα μοντέλα τα οποία έχουν συγκεκριμένα, διακριτά και λίγα στάδια τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα και πολλές φορές. Αυτό σε

διάκριση με τα σύνθετα μοντέλα τα οποία απαιτούν, συνήθως μαθηματικές γνώσεις και σύνθετους κλάδους των μαθηματικών.

Μερικές εφαρμογές στη γλωσσολογία

Η γλωσσολογία, κατά τους ιστορικούς-συγκριτικούς γλωσσολόγους, ως επιστήμη βασισμένη στην έρευνα και στην παρατήρηση συνδέθηκε με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων. Αυτή υπαγορεύθηκε από την ανάγκη της μελέτης της γλώσσας ως αυτόνομου συστήματος και οδήγησε στην ανάπτυξη του κινήματος του *δομισμού*, για να φτάσει στην ακμή της, μέσα του 20^{ου} αι., με τον N. Chomsky (γενετική-μετασχηματιστική). Σήμερα, η στήριξη σε ένα μαθηματικό μοντέλο, έχει γίνει προϋπόθεση, σχεδόν για όλους τους κλάδους της γλωσσολογίας.

Τα μαθηματικά που συνεισφέρουν στη γλωσσολογία, είναι κυρίως από τη στατιστική και την άλγεβρα. Η συνεισφορά της στατιστικής συνίσταται στον προσδιορισμό των παραμέτρων. Η άλγεβρα δίνει μια δομή, μια κατασκευή, την οποία, υποτίθεται, ακολουθεί η γλώσσα. Όσο λιγότερες είναι οι αποκλίσεις και απλούστερη η δομή, τόσο πιο *πετυχημένο* είναι το μοντέλο.

Η *γλώσσα* είναι ένας τεράστιος ερευνητικός χώρος. Πρέπει να τεθούν περιορισμοί για αναζήτηση *μερικών* μοντέλων.

(α) Περί τονισμού

Με την καθιέρωση του μονοτονικού καταργήθηκαν τα πνεύματα και η περισπωμένη αντικαταστάθηκε από την οξεία. Αυτό είναι μία προβολή.

Πηλίκο από την άποψη του τονισμού, είναι ο χωρισμός του συνόλου των λέξεων σε τρία υποσύνολα: οξύτονες, παροξύτονες, προπαροξύτονες. Έχει καθιερωθεί η σύμβαση το τονικό σημάδι να τοποθετείται πάνω στο τονιζόμενο φωνήεν. Έχουμε, λοιπόν, τρία σύνολα και πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ τους, να βρεθεί τρόπος ώστε τα δύο να διακρίνονται από το τρίτο. Αν δεν βρούμε

τον τόνο στην προπαραλήγουσα και στην παραλήγουσα, τονίζουμε αυτόματα στη λήγουσα. Έτσι, έχουμε την πρόταση

να μη χρησιμοποιείται το τονικό σημάδι στη λήγουσα

(β) *Περί του κενού διαστήματος*

Πρόβλημα: ελάττωση του χώρου ενός κειμένου. Το κενό διάστημα δηλώνει το τέλος μίας λέξης, αυτό σημαίνει ότι έχουμε 25 γράμματα, όχι 24. Η ευφυής χρήση κενού διαστήματος οδηγεί σε πηλίκο. Για εξοικονόμηση χώρου, πρέπει να φύγει το 25^ο γράμμα. Για το τέλος μίας λέξης, υπάρχει η ιδέα του τελικού «ς»: εφεύρεση λίστας *τελικών γραμμάτων*. Ελάττωση του χώρου, με διατήρηση του πλήθους των κλειδιών του πληκτρολογίου, θα μπορούσε να γίνει με *υπογράμμιση του τελευταίου γράμματος κάθε λέξης*. Για να αξιοποιήσουμε τα πλήκτρα που ήδη έχουμε στη διάθεσή μας, η πρότασή μας διαμορφώνεται ως εξής:

κατάργηση του κενού διαστήματος και το πρώτο γράμμα κάθε λέξης να είναι κεφαλαίο

Πειραματισμοί εφαρμόζονται κατά καιρούς. Παράδειγμα: ο νεωτερισμός στο ΒΗΜΑgazino (ΒΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ) όπου στους τίτλους χρησιμοποιούνται διαφορετικά χρώματα.

(γ) *Περί της οικονομίας στη γραφή*

Αν θέλουμε γράμματα για μία πινακίδα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, αλλά συγκεκριμένα γράμματα και πόσα από το καθένα. Έτσι, για να γράψουμε ΕΙΣΟΔΟΣ, ΕΞΟΔΟΣ θα αγοράζαμε τη λέξη ΔΔΕΕΙΞΟΟΟΟΣΣΣ και θα την κόβαμε σε γράμματα. Οι πωλητές πωλούν ολόκληρες σειρές, οπότε αγοράζουμε 4 σειρές, όσα και τα Ο, άρα θα πληρώναμε 96 γράμματα αντί των 13.

Ανάλογα ισχύουν στη γραφομηχανή. Αν υπάρχουν λέξεις ή φράσεις, π.χ. ημερομηνία, που επαναλαμβάνονται τακτικά, τότε η ύπαρξη κάποιου κλειδιού θα ήταν μεγάλη βοήθεια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Chomsky, N. *Barriers*. Boston, Mass: MIT Press.1986.
- [2] Cross,M.–Moscardini, A.O. *Learning the art of mathematical modelling*. J. Wiley, 1985
- [3] Eco,U.*Η αναζήτηση της Τέλειας Γλώσσας*.Αθήνα: Ελλ. Γράμματα, 1995
- [4] Gross, M. *Mathematical models in linguistics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 1972.
- [5] Καμπάκη, Π. *Στο πρότυπο των προτύπων της γλώσσας*. 22^η Συν. Τομέα Γλωσσολογίας του Τμ. Ελλ. Φιλολογίας ΑΠΘ. Θεσ/νίκη, 2001
- [6] --- : *Μαθηματικά μοντέλα στη γλωσσική διδασκαλία*. Πρ.: Η διδασκαλία της ΝΕ ως μητρικής γλώσσας, ΔΠΘ, Κομοτηνή,2002,75-87
- [7] Καμπάκη, Π – Βουγιουκλής, Θ. *Η γραφή και πώς να την απλοποιήσουμε*. ΓΙΑΤΙ, τ. 318, Δεκέμβριος 2001, σελ. 63-65.
- [8] --- : *Γλώσσα και πηλίκο*. ΤΟ ΒΗΜΑ ΤΗΣ ΚΥΡΙΑΚΗΣ, 13-1-02,σ. Α51
- [9] Μπαμπινιώτης, Γ. *Ελληνική γλώσσα: παρελθόν-παρόν-μέλλον*. Αθήνα: Gutenberg. 2000.
- [10] Vougiouklis, T: *Hyperstructures and their Representations*, Hadronic Press, 1994.
- [11] --- : *Some remarks on Hyperstructures*, Contemporary Mathematics, American Math. Society, Vol.184, 1995, 427-431.
- [12] Vougiouklis,T. - Kambaki-Vougioukli P. *On the Mathematics of the Language*. Πρακτικά Β΄ Πανελλήνιου Συν. ‘Οι Νέες Τεχνολογίες για την Κοινωνία και τον Πολιτισμό’, 2000, 486-491.