Author: Richard Skemp

Title: Εννοιολογική Κατανόηση και εργαλειακή Κατανόηση

Abstract: Στο άρθρο αυτό ο Skemp αντιπαραβάλλει την εννοιλογική κατανόηση, η οποία βασίζεται στην κατανόηση των εννοιών και στην αλληλοσύνδεσή τους, έτσι που ο μαθητής να ξέρει και τι κάνει και γιατί το κάνει χωρίς να στηρίζεται απλά σε εφαρμογή κανόνων, στην εργαλειακή κατανόηση, όπου ο μαθητής εφαρμόζει ,μηχανικά κατά κάποιο τρόπο, μια αλγοριθμική διαδικασία. Αυτή η διάκριση της κατανόησης οδηγεί και στο ερώτημα αν υπάρχουν και τα αντίστοιχα Μαθηματικά (εννοιολογικά και εργαλειακά) ή αν δε δικαιώνουν τον τίτλο μαθηματικά και τα δύο αυτά είδη.

Creator: HDML

Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 13, Τεύχος.46, 1996

Εννοιολογική Κατανόηση και Εργαλειακή Κατανόηση*

Richard Skemp

Μετάφραση
Χαρά Σταθοπούλου
Επιμέλεια
Τάσος Πατρώνης

* Το άρθρο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό «Mathematics teaching» τον Δεκέμβριο του 1976.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το διχοτομημένο γνωστικό σύμπαν του κυρίου R.R. Skemp

Τ. Πατρώνης

Το άρθρο του Richard R. Skemp που παρουσιάζει στο τεύχος αυτό ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ γ΄ θεωρείται ήδη κλασικό, καθώς είναι μεταξύ εκείνων που, εδώ και είκοσι χρόνια περίπου, σημάδεψαν το ξεκίνημα κάποιου θεωρητικού προβληματισμού, γύρω από τα φαινόμενα της διδασκαλίας των μαθηματικών, ο οποίος υπερέβαινε το επίπεδο της απλής ιδεολογικής πεποίθησης ή της άμεσης διδακτικής εμπειρίας. Ο Skemp αντιπαραθέτει την «εννοιολογική» κατανόηση των Μαθηματικών - μια κατανόηση που στοχεύει στη σύλληψη των εννοιών και των λογικών σχέσεων μεταξύ τους - απέναντι στην «εργαλειακή» τους κατανόηση, που συνδέεται με την εκμάθηση, απλά, των κανόνων, αλγορίθμων ή μαθηματικών τύπων οι οποίοι εφαρμόζονται σε μια δεδομένη σειρά προβλημάτων. Η αντιπαράθεση αυτή, όμως, που σαν ένα είδος γνωστικής διχοτόμησης του κόσμου διατρέχει απ' την αρχή ως το τέλος αυτό το άρθρο, είναι στην ουσία πολύ παλιότερη, καθώς μπορούμε να την ανιχνεύσουμε σε διάφορες μορφές ή κάτω από διάφορα ονόματα στη φιλοσοφία, την ψυχολογία και την κοινωνιολογία της γνώσης. Είναι άλλο να καταλαβαίνουμε το *τι* θα κάνουμε για να λύσουμε ένα πρόβλημα και άλλο να καταλαβαίνουμε *γιατί* το κάνουμε.

Όπως γράφει η Anna Sierpinska στο άρθρο της [1], η ιδέα της κατανόησης απασχολούσε συνεχώς τους φιλοσόφους, από τον των Λοκ και μετά (η Sierpinska αναφέρει τους Hume, Dilthey, Husserl, Gadamer, Heidegger, Ricoeur, Dewey κ.α. χωρίς να αναφέρεται όμως, παρά μόνο ευκαιριακά, στις ουσιαστικά διαφορετικές προσεγγίσεις όλων αυτών). Μια από τις εμφανέστερες διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεων κάποιων απ' αυτούς τους φιλοσόφους, αλλά και των ψυχολόγων που εν μέρει τους ακολούθησαν, αφορά το κατά πόσο η κατανόηση είναι μια στιγμιαία πράξη, μια «σύλληψη» του νοήματος των πραγμάτων από το υποκείμενο, ή μια μακριά διαδικασία, στην οποία διακρίνει κανείς διάφορα «επίπεδα» ή «ποιότητες» κατανόησης ([1], σελ. 24-26).

Αν η κατανόηση είναι απλά και μόνο μια στιγμιαία πράξη, τότε δεν έχουμε να πούμε πολλά πράγματα σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ο δάσκαλος θα αρκεστεί στο να θέσει στους μαθητές ένα (δύσκολο, εν γένει) μαθηματικό πρόβλημα και να περιμένει πότε θα τους έρθει η έμπνευση, ή δεν ξέρω κι εγώ ποια σπουδαία υπαρξιακή στιγμή, για να το λύσουν.

Από την άλλη μεριά, αν υπήρχε μια διαδικασία με πολλά «επίπεδα» ή «ποιότητες» κατανόησης - όπως, κατά τη Sierpinska, το δείχνουν οι έρευνες των Herscovics και Γαγάτση [2], [3], οι οποίες επιχείρησαν να μετρήσουν την κατανόηση - τότε θα ήταν δυνατό να εντάξουμε ομαλά, μέσα σε μια τέτοια διαδικασία, την «εργαλειακή» και την «εννοιολογική» κατανόηση ως ακραίες μορφές μιας συνεχούς κλίμακας.

Τι θα γινόταν, όμως, τότε, με τους μαθητές εκείνους που ούτε στην «εργαλειακή», ούτε σε καμία άλλη βαθμίδα της κλίμακας δεν θα μπορούσαμε να τους κατατάξουμε, όχι γιατί δεν μπορούν, αλλά απλά γιατί δεν θέλουν να «καταλάβουν» ένα κομμάτι της διδασκόμενης ύλης, επειδή αυτό δεν τους έχει κινήσει κανένα ενδιαφέρον, ή επειδή οι ίδιοι έχουν ήδη διαμορφώσει μια τελείως διαφορετική άποψη; Μήπως η «κατανόηση» δεν είναι, τελικά, ούτε μια μυστηριώδης στιγμιαία πράξη ούτε μια μετρήσιμη διαδικασία, αλλά είναι περισσότερο ζήτημα *πρόθεσης* των ατόμων να εμπλακούν ή όχι σ' ένα παιχνίδι ή ένα διάλογο. Ο Habermas προτείνει μια «δια-λογική» θεωρία για την κατανόηση της προτασιακής, όπως και της ηθικής αλήθειας (βλ. π.χ. [4], [5]) προκειμένου να ξεπεραστεί η σχετικότητα των κριτηρίων αλήθειας. Σε μια τέτοια διαδικασία οι διάφορες όψεις της κατανόησης φαίνονται μάλλον συμπληρωματικές παρά διατάξιμες σε μια ιεραρχική κλίμακα.

Κάτω απ' αυτές τις σκέψεις, μου φαίνεται ότι με την πάροδο του χρόνου, το ενδιαφέρον του άρθρου του Richard Skemp θα τείνει να επικεντρώνεται σε μια πτυχή του ζητήματος, που κάνει σαφώς την εμφάνισή της στα γραφόμενά του αλλά βρίσκεται πολύ πέρα από τη διχοτομική διάκριση της (μαθηματικής) γνώσης που το άρθρο προτίθεται, καταρχήν, να διερευνήσει. Ο Skemp φανερώνει – για πρώτη ίσως φορά στο χώρο τουλάχιστον της μαθηματικής παιδείας – την ευαισθησία ενός γνωστικού ψυχολόγου να παραδεχθεί και άλλες μορφές κατανόησης των πραγμάτων από εκείνη με την οποία τα κατανοεί το «βλέμμα» του χώρου του. Στην ειλικρίνεια και την ανοιχτή ματιά με την οποία καταγράφει - και προσπαθεί ο ίδιος να «καταλάβει» - τον τρόπο κατανόησης των άλλων κοινωνικών υποκειμένων, των δασκάλων και των μαθητών, βρίσκεται, πιστεύω, η αξία που το άρθρο διατηρεί και σήμερα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] A. Sierpinska, «Some Remarks on Understanding in Mathematics», *For the Learning of Mathematics*, 10, 3 (1990).

[2] A Gagatsis, «Prιalables û une mιsure de la comprιhension», *Recherches en Did. Des Math.* 5.1, 43-80 (1984).

[3] N. Herscovics, «Constructing meaning for linear equations», *Rech. En Did. des Math.* 1.3, 351-386(1980).

[4] Γιούργκεν Χάμπερμας, *Αυτονομία και Αλληλεγγύη*, εκδ. Ύψιλον, 1987.

[5] Jurgen Habermas, «Ηθική του διαλόγου: Σημειώσεις για ένα πρόγραμμα θεμελίωσης», *Θεωρία και Κοινωνία*, τευχ. 4(1991).

Εννοιολογική[1] Κατανόηση και Εργαλειακή Κατανόηση

(Relational Understanding and Instrumental Understanding)

Riscard Skemp
Department of Education, University of Warwick

Περίληψη

*Στο άρθρο αυτό ο **Skemp** αντιπαραβάλλει την εννοιολογική **(relational)** κατανόηση, η οποία βασίζεται στην κατανόηση των εννοιών και στην αλληλοσύνδεσή τους έτσι που ο μαθητής να ξέρει και τι κάνει και γιατί το κάνει χωρίς να στηρίζεται απλώς σε εφαρμογή κανόνων ("κανόνων χωρίς λόγο"), στην εργαλειακή **(instrumental)** κατανόηση, όπου ο μαθητής εφαρμόζει μηχανικά, κατά κάποιον τρόπο, μια αλγοριθμική διαδικασία. Αυτή η διάκριση της κατανόησης οδηγεί και στο ερώτημα αν υπάρχουν και τα αντίστοιχα μαθηματικά (εννοιολογικά και εργαλειακά) ή αν δε δικαιώνουν τον τίτλο "μαθηματικά" και τα δύο αυτά είδη.*

Faux Amis

Faux amis είναι όρος ο οποίος χρησιμοποιείται από τους Γάλλους για να περιγράψουν λέξεις οι οποίες είναι ή ίδιες, ή σχεδόν ίδιες, σε δυο γλώσσες, αλλά οι σημασίες τους είναι διαφορετικές. Για παράδειγμα:

Γαλλική λέξη	**Σημασία στα Αγγλικά**	**Στα Ελληνικά**
histoire	story, not history	μια ιστορία, όχι η Ιστορία
libraire	bookshop, not library	βιβλιοπωλείο, όχι βιβλιοθήκη
chef	head of any organization, not only chef cook	επικεφαλής οργανισμού, όχι μόνο σεφ
agrément	pleasure or amusement, not aggrement	ευχαρίστηση ή διασκέδαση, όχι συμφωνία
docteur	doctor (higher degree), not agreement	διδάκτωρ, όχι γιατρός
médecin	medical practitioner, not medicine	γιατρός, όχι φάρμακο

[1] Η επιλογή της λέξης «εννοιολογική», για την απόδοση της λέξης «relational» έγινε γιατί είναι πιο κοντά στο νόημά της αν και δεν πρόκειται για πίστη μετάφραση. Η λέξη «σχεσιακή» παρ' ότι είναι πιστότερη μάλλον αποδίδει λιγότερο καλά το νόημα της.

parent	relations in general, including parent	συγγενείς γενικά, συμπεριλαμβανομένων και των γονιών

Ας πάρουμε για παράδειγμα τη χρήση των **Faux amis** στα Αγγλικά, όπως αυτά ομιλούνται στα διάφορα μέρη του κόσμου. Σ' έναν Άγγλο ο οποίος ζητάει ένα μπισκότο (**biscuit**) στην Αμερική θα μπορούσε να του δοθεί αυτό που εμείς λέμε πρόχειρο κέικ (**scone**). Για να πάρει αυτό που εμείς λέμε μπισκότο θα έπρεπε να ζητήσει **cookie**. Και στα Αγγλικά, που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή, υπάρχουν τέτοιες λέξεις όπως πεδίο, ομάδα, δακτύλιος, ιδεώδης.

Ένα άτομο που δε γνωρίζει ότι η λέξη που χρησιμοποιεί είναι **Faux ami** μπορεί να κάνει λάθη που θα του δημιουργήσουν προβλήματα. Περιμένουμε η *Ιστορία* να είναι αληθινή αλλά όχι μια ιστορία (μυθοπλασία). Παίρνουμε βιβλία χωρίς να πληρώνουμε από μια βιβλιοθήκη, αλλά όχι από ένα βιβλιοπωλείο: και ούτω καθεξής. Αλλά στα παραπάνω παραδείγματα υπάρχουν νύξεις που θα μπορούσαν να κάνουν κάποιον επιφυλακτικό: διαφορά της γλώσσας, ή της χώρας, ή του πλαισίου.

Εαν εν τούτοις η ίδια λέξη χρησιμοποιείται στην ίδια γλώσσα, χώρα και πλαίσιο, με δύο σημασίες των οποίων οι διαφορές δεν είναι ασήμαντες αλλά τόσο σημαντικές όσο είναι η διαφορά ανάμεσα στην έννοια του να πεις "**histoire**" & "**story**", που είναι μια διαφορά ανάμεσα σε πραγματικά γεγονότα και στη μυθοπλασία, τότε θα περιμένουμε πολλές συγχύσεις.

Δυο τέτοιες λέξεις μπορεί να αναγνωριστούν στο πλαίσιο των μαθηματικών, και οι εναλλακτικές σημασίες αυτών των λέξεων –με πολλές προεκτάσεις– πιστεύω ότι αποτελούν τις ρίζες πολλών κακών στην εκπαίδευση σήμερα.

Μια από αυτές είναι η λέξη «κατανόηση». Υπέπεσε στην προσοχή μου μερικά χρόνια πριν, χάρη στον **Stieg Mellin-Olsen** του Πανεπιστημίου **Bergen** ότι υπάρχουν δυο σημασίες αυτής τη λέξης στη σύγχρονη χρήση της. Τις διέκρινε καλώντας τες "εννοιολογική κατανόηση" και "εργαλειακή κατανόηση". Με την πρώτη εννοείται ό,τι εννοούμε πάντα με τη λέξη κατανόηση, και πιθανόν ό,τι εννοούν οι περισσότεροι αναγνώστες αυτού του άρθρου: γνωρίζοντας και το *τι* κάνουμε και *γιατί* το κάνουμε. Τη δεύτερη θα μπορούσα μέχρι πρόσφατα να μην τη θεωρήσω ως κατανόηση καθ' όλα. Είναι αυτό που στο παρελθόν έχω περιγράψει ως "κανόνες χωρίς λόγο", χωρίς να συνειδητοποιώ ότι για πολλούς μαθητές και για τους δασκάλους τους η κατάκτηση τέτοιων κανόνων και η ικανότητα να τους χρησιμοποιούν ήταν ό,τι αυτοί εννοούσαν με τη λέξη "κατανόηση".

Έστω ότι ο δάσκαλος υπενθυμίζει σε μία τάξη ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι Ε=α.β. Ένας μαθητής που έλειπε λέει ότι δεν καταλαβαίνει και ο δάσκαλος δίνει τις παρακάτω επεξηγήσεις: «Ο τύπος σου λέει ότι για να βρεις το εμβαδόν ενός ορθογωνίου πολλαπλασιάζεις το μήκος του με το πλάτος του». «Το κατάλαβα», λέει το παιδί, και συνεχίζει με τις ασκήσεις. Αν τώρα το ρωτάγαμε (επί της ουσίας) «Νομίζεις ότι το έχεις καταλάβει αλλά μήπως στην πραγματικότητα δεν το έχεις», δε θα συμφωνούσε. «Φυσικά το έχω καταλάβει: Κοίτα, έχω βρει όλες αυτές τις απαντήσεις σωστά.» Και ούτε θα τον ευχαριστούσε η δική μας υποτίμηση για το επίτευγμά του. Και με αυτή την έννοια της λέξης δεν καταλαβαίνει.

Μπορούμε να σκεφτούμε πολλά παραδείγματα αυτού του τύπου: «δανεισμός» στην αφαίρεση, «αντίστρεψε τους όρους του (δεύτερου) κλάσματος και πολλαπλασίασε» στη διαίρεση με ένα κλάσμα, «πήγαινέ το στο άλλο μέλος και άλλαξε το πρόσημο», είναι κάποια χτυπητά παραδείγματα· αλλά από τη στιγμή που έχει σχηματιστεί η έννοια, άλλα παραδείγματα από εργαλειακές εξηγήσεις μπορούν να αναγνωριστούν εν αφθονία σε ευρέως χρησιμοποιούμενα κείμενα. Εδώ είναι δύο παραδείγματα από ένα κείμενο που χρησιμοποιήθηκε από ένα πρώην δημόσιο σχολείο, τώρα ιδιωτικό, με υψηλό ακαδημαϊκό επίπεδο.

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων. Στον πολλαπλασιασμό κλάσματος με κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τους δυο αριθμητές και το γινόμενό τους το γράφουμε αριθμητή, και πολλαπλασιάζουμε τους δυο παρονομαστές και το γινόμενό τους το γράφουμε παρονομαστή.

π.χ. $2/3$ του $4/5=2.3/4.5=8/15$

$3/5.10/13=30/65=6/13$

Το σύμβολο . χρησιμοποιείται αντί της λέξης «του»

Κύκλοι: Το μήκος ενός κύκλου (δηλαδή η περίμετρος ή το μήκος των ορίων του) βρίσκεται να είναι, με μέτρηση, περισσότερο από τρεις φορές το μήκος της διαμέτρου. Σε κάθε κύκλο η περίμετρος του είναι προσεγγιστικά 3.4116 φορές (που είναι χονδρικά 3 και 1/7 φορές) τη διάμετρο. Κανένα από αυτά δεν είναι ακριβές, καθώς το ακριβές νούμερο δε μπορεί να εκφραστεί ούτε ως κλάσμα ούτε ως δεκαδικός. Ο αριθμός αντιπροσωπεύεται με το ελληνικό γράμμα π.

Μήκος κύκλου $=\pi d$ ή $2\pi r$

Εμβαδόν $=\pi r2$

Ο αναγνώστης παρακινείται να δοκιμάσει για τον εαυτό του να ψάξει και να αναγνωρίσει παραδείγματα εργαλειακών εξηγήσεων, και στα κείμενα και στην τάξη.

Αυτό θα έχει τρία οφέλη.

(i) Για άτομα σαν τον συγγραφέα και τους περισσότερους αναγνώστες αυτού του άρθρου, θα είναι πιθανόν σκληρό να αναγνωρίσουν πόσο ευρέως διαδομένη είναι η εργαλειακή προσέγγιση.

(ii) Θα βοηθήσει, με επαναλαμβανόμενα παραδείγματα, να ενοποιηθούν οι δυό αντίθετες έννοιες.

(iii) Είναι μια καλή προετοιμασία στην προσπάθεια να διατυπωθεί η διαφορά με γενικούς όρους.

Το αποτέλεσμα

(i) είναι απαραίτητο για ό,τι ακολουθεί σ' αυτή εδώ την ενότητα, ενώ τα

(ii) και (iii) θα είναι χρήσιμα για τις υπόλοιπες.

Αν είναι αποδεκτό ότι αυτές οι δύο κατηγορίες είναι καλώς ταξινομημένες, από εκείνους τους μαθητές και τους δασκάλους των οποίων οι σκοποί είναι αντίστοιχα η εννοιολογική και εργαλειακή κατανόηση (από τους μαθητές) εγείρονται δύο ερωτήματα. Πρώτον, πειράζει που συμβαίνει αυτό; Και δεύτερο, είναι το ένα είδος καλλίτερο από το άλλο; Για χρόνια θεωρούσα ως δεδομένες τις απαντήσεις σ' αυτές τις δύο ερωτήσεις. Αλλά η ύπαρξη ενός μεγάλου σώματος πεπειραμένων δασκάλων και ενός μεγάλου αριθμού κειμένων που ανήκουν στο αντίθετο στρατόπεδο με έχουν αναγκάσει να σκεφτώ περισσότερο σχετικά με το γιατί έχω αυτή την άποψη. Στη διαδικασία αλλαγής της άποψης από διαισθητική σε αναστοχαστική νομίζω ότι έχω μάθει κάτι χρήσιμο. Οι δυο ερωτήσεις δεν είναι εξ ολοκλήρου διαφορετικές, αλλά στην παρούσα ενότητα θα επικεντρωθώ όσο είναι δυνατό στην πρώτη: πειράζει που συμβαίνει αυτό;

Το πρόβλημα εδώ είναι η μη συμβατότητα που εγείρεται αυτόματα σε κάθε faux ami κατάσταση, και δεν εξαρτάται από το αν η σημασία του Α ή του Β είναι "η σωστή". Ας φανταστούμε, αν μπορούμε, ότι το σχολείο Α στέλνει μια ομάδα να παίξει με το σχολείο Β σε ένα παιχνίδι καλούμενο «ποδόσφαιρο» (football) αλλά καμμία ομάδα δεν ξέρει ότι υπάρχουν δύο είδη (καλούμενα «soccer» και «rugby»). Το σχολείο Α παίζει ποδόσφαιρο (soccer) και δεν έχει ακούσει ποτέ τίποτα για το rugby και αντιστρόφως για το Β. Κάθε ομάδα γρήγορα θα αποφασίσει ότι οι άλλοι είναι τρελοί ή ότι είναι πολύ βρώμικοι παίχτες. Ειδικά η ομάδα Α θα νομίσει ότι η Β χρησιμοποιεί μια μπάλα λανθασμένου σχήματος και ότι κάνει το ένα φάουλ μετά το άλλο. Αν δεν σταματήσουν οι δυο πλευρές και δε διευκρινίσουν σε ποιό παιχνίδι νομίζουν ότι παίζουν συζητώντας για αρκετό χρόνο ώστε να αποκτήσουν μια αμοιβαία κατανόηση, το παιχνίδι θα διακοπεί μέσα από δυσαρμονία και οι δυο ομάδες δε θα θέλουν να ξανασυναντηθούν.

Αν και μπορεί να είναι δύσκολο να φανταστούμε μια τέτοια κατάσταση να παρουσιάζεται στο χώρο του ποδοσφαίρου, εν τούτοις δεν είναι πολύ μακριά από αυτό που συμβαίνει σε μαθήματα μαθηματικών ακόμα και σήμερα. Υπάρχει η βασική διαφορά ότι η μια πλευρά τουλάχιστον δε μπορεί να αρνηθεί να «παίξει». Η «συμπλοκή» είναι υποχρεωτική, για 36 εβδομάδες το χρόνο, για πέντε μέρες τη βδομάδα και για πάνω από 10 χρόνια της ζωής κάθε παιδιού.

Αφήνοντας προς το παρόν στην άκρη το αν ένα παιδί είναι καλλίτερο από ένα άλλο, δύο είδη μαθηματικών ασυνεννοησιών μπορεί να εμφανιστούν.

1. Μαθητές των οποίων ο σκοπός είναι να μάθουν εργαλειακά, να διδάσκονται από δασκάλους οι οποίοι θέλουν από αυτούς να καταλαβαίνουν εννοιολογικά.

2. Η άλλη περίπτωση, το αντίθετο.

Η πρώτη από αυτές τις περιπτώσεις θα προξενήσει λιγότερα προβλήματα βραχυπρόθεσμα στους μαθητές, αν και θα είναι απογοητευτική για το δάσκαλο. Οι μαθητές για την ακρίβεια δε "θέλουν να ξέρουν" όλο το λεπτομερές υπόβαθρο της εργασίας που τους δίνει για προπαρασκευή, εκείνων που πρόκειται να μάθουν παρακάτω, ούτε όλες τις προσεκτικές εξηγήσεις. Το μόνο που θέλουν είναι κάποιου είδους κανόνα για να παίρνουν την απάντηση. Όσο γρηγορότερα αυτός βρίσκεται, «κολλάνε» σ' αυτόν και ξεχνούν τα υπόλοιπα.

Εάν ο δάσκαλος κάνει μια ερώτηση η οποία δεν ταιριάζει απόλυτα στον κανόνα, ασφαλώς δε θα την εκλάβουν με τη σημασία που πρέπει. Για το επόμενο παράδειγμα θα πρέπει να ευχαριστήσω τον κ. Peter Burney, τότε μαθητή της πρακτικής διδασκαλίας του Coventry College of Education. Ενώ δίδασκε το εμβαδόν του δημιουργήθηκε η υπόνοια ότι τα παιδιά δεν είχαν καταλάβει πραγματικά τι έκαναν. Έτσι τους ρώτησε: «Ποιό είναι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις, 20 εκατοστά και 15 γιάρδες;» Η απάντηση ήταν : «300 τετραγωνικά εκατοστά». Αυτός ρώτησε: «Γιατί όχι 300 τετραγωνικές γιάρδες;» Απάντηση: «Γιατί το εμβαδόν είναι πάντα σε τετραγωνικά εκατοστά.»

Για να αποφύγουμε λάθη όπως το προηγούμενο, οι μαθητές χρειάζονται έναν άλλο κανόνα (ή φυσικά εννοιολογική κατανόηση), όπου και οι δυο διαστάσεις θα είναι στην ίδια μονάδα. Αυτό προλαμβάνει έναν από τους ισχυρισμούς που θα χρησιμοποιήσω ενάντια στην εργαλειακή κατανόηση, που συνήθως εμπλέκει μια πολλαπλότητα κανόνων παρά μερικές αρχές γενικότερων εφαρμογών.

Υπάρχει πάντα φυσικά η πιθανότητα μερικοί από τους μαθητές να συλλάβουν αυτό που ο δάσκαλος προσπαθεί να κάνει. Έστω και χάριν αυτών νομίζω ότι ο δάσκαλος οφείλει να συνεχίσει την προσπάθεια. Για τους πολλούς, πιθανόν τους περισσότερους, οι προσπάθειές του να τους πείσει ότι το να είναι κανείς ικανός να χρησιμοποιήσει τον κανόνα δεν είναι αρκετό δε θα είναι καλοδεχούμενες. «Το καλά είναι ο εχθρός του καλλίτερου» και αν οι μαθητές μπορούν να πάρουν τις σωστές απαντήσεις με το είδος της σκέψης που συνηθίζουν να έχουν, δε θα δουν φιλικά τις υποδείξεις ότι πρέπει να προσπαθήσουν για κάτι πέρα από αυτό.

Το άλλο είδος ασυνενοησίας, όπου οι μαθητές προσπαθούν εννοιολογικά αλλά ο δάσκαλος το κάνει αυτό αδύνατο, θα μπορούσε να αποβεί πιερισσότερο καταστροφικό. Ένα παράδειγμα που έχει χαραχθεί στη μνήμη μου είναι του παιδιού ενός γείτονα που ήταν τότε 7 χρονών. Αυτό το παιδί ήταν πολύ έξυπνο αγόρι και με δείκτη ευφυίας στα 140. Στην ηλικία των πέντε ετών μπορούσε να διαβάσει την ώρα, αλλά στα επτά του χρόνια συχνά έκλαιγε για την κατ' οίκον εργασία των μαθηματικών. Η ατυχία του ήταν ότι αυτός προσπαθούσε να καταλάβει εννοιολογικά τη διδασκαλία ενώ η επιλογή του δασκάλου ήταν διαφορετική. Η απόδειξή μου για αυτή την πίστη είναι πως όταν τον δίδαξα εγώ ο ίδιος εννοιολογικά με τη βοήθεια του Unifix τα κατάλαβε γρήγορα και με πραγματική ευχαρίστηση.

Μια λιγότερο φανερή ασυνενοησία είναι αυτή που μπορεί να συμβεί ανάμεσα στο δάσκαλο και το κείμενο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δάσκαλο του οποίου η αντίληψη για την κατανόηση είναι εργαλειακή, και ο οποίος για τον ένα ή τον άλλο λόγο χρησιμοποιεί ένα κείμενο που στοχεύει σε εννοιολογική κατανόηση από τους μαθητές. Χρειάζεται κάτι παραπάνω απ' αυτό για ν' αλλάξει το στυλ της διδασκαλίας του. Ήμουνα σε ένα σχολείο το οποίο χρησιμοποιούσε το κείμενό μου, και παρατήρησα (ήταν στο Κεφάλαιο 1 του βιβλίου) ότι μερικοί από τους μαθητές γράφανε απαντήσεις όπως

«το σύνολο των {λουλουδιών}».

Όταν το επεσήμανα αυτό στο δάσκαλο (ήταν ο επικεφαλής των μαθηματικών), ζήτησε από την τάξη να τον προσέξουν και είπε: «Μερικοί από σας δε γράφετε τις απαντήσεις σωστά. Κοιτάξτε το παράδειγμα στο βιβλίο στην αρχή της άσκησης, και σιγουρευτείτε ότι οι απαντήσεις σας είναι ακριβώς έτσι».

Πολλά από αυτά που διδάσκονται ως «μοντέρνα μαθηματικά» διδάσκονται και μαθαίνονται ακριβώς τόσο εργαλειακά όσο ήταν και τα αναλυτικά προγράμματα τα οποία αντικατέστησαν. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο λόγω της δυσκολίας προσαρμογής (και αναδόμησης) των υπαρχόντων σχημάτων μας. Στην έκταση που συμβαίνει αυτό, οι καινοτομίες έχουν κάνει περισσότερο κακό από καλό, καθώς εισάγουν μια ασυνεννοησία ανάμεσα στο δάσκαλο και τους σκοπούς που υπονοούνται στο νέο περιεχόμενο. Η εισαγωγή εννοιών όπως τα σύνολα, απεικονίσεις και μεταβλητές εάν χρησιμοποιηθεί σωστά μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα εννοιολογική κατανόηση. Εαν οι μαθητές συνεχίζουν να διδάσκονται εργαλειακά, τότε ένα «παραδοσιακό» πρόγραμμα πιθανόν θα τους ωφελήσει περισσότερο. Τουλάχιστον θα αποκτήσουν ικανότητα σ' ένα αριθμό μαθηματικών τεχνικών τις οποίες θα μορούν να χρησιμοποιήσουν σε άλλα αντικείμενα και των οποίων η άγνοια έχει γίνει δώσει αφορμή, πρόσφατα, για παράπονα από δασκάλους των φυσικών, οικονομικών και άλλων επιστημών.

Στην αρχή περίπου, είπα ότι δύο faux amis θα μπορούσαν να αναγνωριστούν στο πλαίσιο των μαθηματικών. Το δεύτερο είναι ακόμα πιο σημαντικό· είναι η λέξη «μαθηματικά» αυτή καθεαυτή. Γιατί δε μιλάμε για χειρότερη ή καλλίτερη διδασκαλία του ίδιου είδους μαθηματικών. Είναι εύκολο να το σκεφτούμε αυτό, ακριβώς όπως οι φανταστικοί ποδοσφαιριστές, που δεν ήξεραν ότι οι αντίπαλοι έπαιζαν ένα διαφορετικό παιχνίδι, θα μπορούσαν να σκεφτούν ότι η άλλη πλευρά μάζευε τη μπάλα και έτρεχε μ' αυτή, γιατί δεν μπορούσαν να την κλωτσήσουν σωστά, ειδικά μια μπάλα ενός τόσο λανθασμένου σχήματος. Σ' αυτή την περίπτωση θα μπορούσαν να τους προσφέρουν ευγενικά μια καλλίτερη μπάλα και μερικά μαθήματα στο τριπλάρισμα.

Μου πήρε κάποιο χρόνο για να αποφασίσω ότι δεν πρόκειται για αυτή την περίπτωση. Συνήθως σκεφτόμουνα ότι οι δάσκαλοι των μαθηματικών δίδασκαν όλοι το ίδιο αντικείμενο και ότι απλώς κάποιοι το κάνουν καλλίτερα από τους άλλους. Τώρα πιστεύω ότι υπάρχουν δύο κατ' ουσίαν διαφορετικά αντικείμενα που πρέπει να διδαχτούν, κάτω από το ίδιο όνομα "μαθηματικά". Έαν αυτό είναι αλήθεια, τότε αυτή η διαφορά υπερβαίνει τις αλλαγές στο αναλυτικό πρόγραμμα, οι οποίες έχουν ευρέως συζητηθεί. Έτσι θα ήθελα να προσπαθήσω να τονίσω το σημείο αυτό με τη βοήθεια μιας άλλης αναλογίας.

Ας φανταστούμε ότι δύο ομάδες παιδιών διδάσκονται μουσική ως ένα σύστημα με μολύβι-και-χαρτί. Όλοι έχουν δει τις γραμμές του πενταγράμμου, με το κατσαρό σύμβολο «κλειδί του sol» στην αρχή και έχουν διδαχτεί ότι οι τα σύμβολα πάνω στις γραμμές ονομάζονται E,G,B,D,F. Τα σύμβολα ανάμεσα στις γραμμές ονομάζονται F,A,C,E. Μαθαίνουν ότι μια γραμμή με ένα ανοιχτό οβάλ καλείται ήμιση, και η αξία της είναι ίση με δυο μαυρισμένα οβάλ που καλούνται τέταρτα ή με τέσσερα μαυρισμένα οβάλ και μια ουρά που καλούνται όγδοα, και τα λοιπά, μουσικός πίνακας, πολλαπλασιασμού αν θέλετε. Για τη μιά ομάδα των μαθητών όλες οι γνώσεις τους είναι αυτού του είδους και τίποτα παραπέρα. Εάν κάθε μέρα είχαν ένα μάθημα μουσικής για πέντε φορές την εβδομάδα κατά την περίοδο του σχολείου και αυτό εθεωρείτο σημαντικό, αυτά τα παιδιά θα μπορούσαν με τον καιρό πιθανόν να μάθουν να γράφουν πλήρως τα σύμβολα για απλές μελωδίες τέτοιες όπως οι God Save και Auld Lang Syne και να λύνουν απλά προβλήματα όπως «Σε τι χρόνο είναι αυτό;» και «Ποιό κλειδί;» και ακόμα «Μετάφρασε αυτή τη μελωδία από το C ματζόρε στο A ματζόρε». Θα μπορούσε να το έβρισκαν αυτό ανιαρό και οι κανόνες απομνημόνευσης θα μπορούσαν να είναι πολυάριθμοι ώστε προβλήματα όπως «Γράψε μια απλή συγχορδία για αυτή τη μελωδία» θα μπορούσε να είναι πολύ δύσκολα για τους πιο πολλούς. Θα μπορούσε να σταματήσουν την εκμάθηση του αντικειμένου το νωρίτερο δυνατό και να το θυμούνται με δυσαρέσκεια.

Η άλλη ομάδα έχει διδαχτεί να συνδέει μουσικούς ήχους με αυτά τα σύμβολα πάνω στο χαρτί. Για τα πρώτα χρόνια αυτοί είναι μουσικοί ήχοι που παράγουν από μόνοι τους πάνω σε απλά όργανα. Μετά από ένα διάστημα μπορούν ακόμα να φανταστούν τους ήχους οποτεδήποτε βλέπουν ή γράφουν τα σύμβολα πάνω στο χαρτί. Με κάθε ακολουθία συμβόλων είναι συνδεδεμένη μια μελωδία και με κάθε κατακόρυφη ομάδα μια αρμονία. Τα κλειδιά C ματζόρε και A ματζόρε έχουν μια μουσική σχέση, και μια παρόμοια σχέση μπορεί να βρεθεί ανάμεσα σε ορισμένα άλλα ζευγάρια κλειδιών. Και ούτω καθεξής. Στην περίπτωση αυτή πολύ λιγότερη μνήμη απαιτείται, και αυτό που πρέπει να θυμούνται έχει, σε μεγάλο βαθμό, τη μορφή των συσχετισμένων συνόλων (όπως οι μελωδίες) που εύκολα συγκρατεί το μυαλό τους. Ασκήσεις όπως αυτές που αναφέρθηκαν προηγουμένως («Γράψε μια απλή συγχορδία») θα ήταν μέσα στις ικανότητες των περισσοτέρων. Αυτά τα παιδιά θα μπορούσαν επίσης να θεωρήσουν την εκμάθησή τους ουσιαστικά απολαυστική, και πολλοί θα μπορούσαν να τη συνεχίσουν εθελοντικά, ακόμα και μετά το O-Level ή το C.S.E.

Για τον παρόντα σκοπό επινόησα δύο μη-υπαρκτά είδη «μουσικού μαθήματος», που και τα δυο περιέχουν ασκήσεις χαρτιού και μολυβιού (στη δεύτερη περίπτωση αυτό γίνεται μετά από ένα ή δύο χρόνια). Αλλά η διαφορά ανάμεσα σ' αυτές τις φανταστικές δραστηριότητες δεν είναι μεγαλύτερη από όση είναι ανάμεσα στις δύο δραστηριότητες που τυχαίνει να είναι κάτω από το όνομα μαθηματικά. (Μπορούμε να κάνουμε την αναλογία στενότερη, εαν φανταστούμε ότι η πρώτη ομάδα των παιδιών είχαν αρχικά διδαχθεί τους ήχους που αντιστοιχούν στις νότες μάλλον μισο-απομνημονεύοντάς τους, αλλά αυτή η σύνδεση δεν ήταν τόσο καλά θεμελιωμένη και οργανωμένη ώστε να έχει διάρκεια).

Η παραπάνω αναλογία σαφώς μεροληπτεί υπέρ των εννοιολογικών μαθηματικών. Αυτό αντανακλά την προσωπική μου άποψη. Το να την ονομάσουμε μια άποψη, εν τούτοις συνεπάγεται ότι δεν τη θεωρώ πλέον ως αυταπόδεικτη αλήθεια η οποία δε χρήζει καμμιάς δικαιολόγησης: αυτό θα μπορούσε μετά βίας να ισχύει καθώς πολλοί πεπειραμένοι δάσκαλοι συνεχίζουν να διδάσκουν εργαλειακά μαθηματικά. Το επόμενο βήμα είναι να προσπαθήσουμε να υποστηρίξουμε τα πλεονεκτήματα και των δύο απόψεων όσο καθαρά και τίμια είναι δυνατό, και ειδικά της αντίθετης άποψης. Αυτός είναι ο λόγος που η παρακάτω ενότητα ονομάστηκε «Συνήγορος του Διαβόλου». Με κάποιο τρόπο σ' αυτή περιγράφεται εκείνο το μέρος που προτείνει επιχειρήματα υπέρ της εργαλειακής κατανόησης. Αλλά επίσης δικαιολογεί το άλλο μέρος, αφού η επινόηση ενός φανταστικού αντιπάλου, που σκέπτεται διαφορετικά από μας, είναι ένα καλό τέχνασμα για να μας γίνει καθαρότερο γιατί κάποιος άλλος σκέπτεται μ' αυτόν τον τρόπο.

Συνήγορος του Διαβόλου

Υπάρχει το δεδομένο ότι τόσοι πολλοί δάσκαλοι διδάσκουν εργαλειακά μαθηματικά. Θα μπορούσε να συμβαίνει αυτό επειδή έχει σημαντικά πλεονεκτήματα; Είμαι σε θέση να σκεφτώ τρία πλεονεκτήματα (πέρα από τους περιστασιακούς λόγους, που μπορεί να συντρέχουν ώστε να επιλέξει κανείς αυτή τη διδασκαλία, οι οποίοι θα συζητηθούν αργότερα).

1. *Μέσα στο πλαίσιο τους, τα εργαλειακά μαθηματικά είναι συνήθως ευκολότερο να κατανοηθούν*, μερικές φορές πολύ ευκολότερο. Μερικά θεματα, όπως το να πολλαπλασιάσεις δύο αρνητικούς αριθμούς ή να διαιρέσεις με έναν κλασματικό αριθμό είναι δύσκολο να κατανοηθούν εννοιολογικά. Το «πλην επί πλην, συν» και το «για να διαιρέσεις με ένα κλάσμα αντιστρέφεις τους όρους του και πολλαπλασιάζεις» είναι εύκολα απομνημονεύσιμοι κανόνες. Εαν το ζητούμενο είναι μια σελίδα από σωστές απαντήσεις, τα εργαλειακά μαθηματικά μπορούν να

το εξασφαλίσουν αυτό γρηγορότερα και ευκολότερα.

2. *Έτσι οι ανταμοιβές είναι πιο άμεσες και πιο φανερές*. Είναι ωραίο να πάρεις μια σελίδα από σωστές απαντήσεις και δεν πρέπει να υποτιμήσουμε τη σημασία της αίσθησης της επιτυχίας που παίρνουν οι μαθητές από αυτό. Πρόσφατα επισκέφτηκα ένα σχολείο όπου μερικοί από τους μαθητές περιγράφουν τους εαυτούς τους ως «τούβλα». Οι δάσκαλοί τους χρησιμοποιούν επίσης τον ίδιο όρο. Αυτό τα παιδιά χρειάζονται την επιτυχία για να διατηρήσουν την αυτοπεποίθησή τους και θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι μπορούν να το κάνουν αυτό πιο γρήγορα και εύκολα στα εργαλειακά μαθηματικά από ότι στα εννοιολογικά.

3. Ακριβώς επειδή λιγότερη γνώση εμπλέκεται, *μπορεί να πάρει κάποιος τη σωστή απάντηση πιο γρήγορα και σίγουρα* με την εργαλειακή σκέψη από ότι με την εννοιολογική. Αυτή η διαφορά είναι τόσο φανερή που ακόμα και μαθηματικοί της εννοιολογικής προσέγγισης συχνά χρησιμοποιούν την εργαλειακή. Αυτό είναι ένα ζήτημα μεγάλου θεωρητικού ενδιαφέροντος, το οποίο ελπίζω να συζητήσω πληρέστερα σε μια μελλοντική ευκαιρία.

Τα παραπάνω πιθανόν δε δικαιώνουν πλήρως τα εργαλειακά μαθηματικά. Θα ήμουν ευτυχής να ήξερα κάποια επιπλέον πλεονεκτήματά τους.

Υπάρχουν τέσσερα (τουλάχιστον) πλεονεκτήματα στα εννοιολογικά μαθηματικά.

1. *Είναι περισσότερο προσαρμόσιμα σε νέα καθήκοντα*. Πρόσφατα προσπαθούσα να βοηθήσω ένα αγόρι που είχε μάθει να πολλαπλασιάζει δεκαδικούς αριθμούς, διώχνοντας τις υποδιαστολές, πολλαπλασιάζοντας τους ακέραιους αριθμούς και επανεισάγοντας την υποδιαστολή για να δώσει το ίδιο με το αρχικό πλήθος δεκαδικών ψηφίων. Αυτή είναι μια βολική μέθοδος αν γνωρίζεις γιατί «δουλεύει». Χωρίς να είναι δικό του λάθος το παιδί δεν ήξερε, και όχι αδικαιολόγητα, να εφαρμόσει το ίδιο στη διαίρεση δεκαδικών. Με αυτή τη μέθοδο 4.8 : 0.6 έγινε 0.08. Ο ίδιος μαθητής επίσης είχε μάθει ότι, αν ξέρεις δύο γωνίες ενός τριγώνου, μπορείς να βρεις την τρίτη προσθέτοντας τις δυο γνωστές γωνίες του τριγώνου και αφαιρώντας τες από τις 180ο. Απάντησε σε δέκα ερωτήσεις σωστά μ' αυτόν τον τρόπο (ο δάσκαλός του πίστευε στην αφθονία της εξάσκησης) και συνέχισε να χρησιμοποιεί την ίδια μέθοδο για να βρει τις εξωτερικές γωνίες. Έτσι απάντησε στις επόμενες πέντε ερωτήσεις λάθος.

Δεν πιστεύω ότι ήταν ανόητος σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις. Ήταν απλώς ένα ξεστράτισμα από αυτό που ήδη ήξερε, αλλά η εννοιολογική κατανόηση, με το να γνωρίζει όχι μόνο ποιά μέθοδος δούλευε αλλά και γιατί, θα μπορούσε να τον έχει κάνει ικανό να συσχετίσει τη μέθοδο με το πρόβλημα, και πιθανόν να προσαρμόσει τη μέθοδο σε νέα προβλήματα. Η εργαλειακή κατανόηση απαιτεί απομνημόνευση σχετικά με το είδος των προβλημάτων στα οποία «δουλεύει» η μέθοδος και σε ποιά όχι, και επίσης τη μάθηση μιας διαφορετικής μεθόδου για κάθε νέα κατηγορία προβλημάτων. Έτσι το πρώτο πλεονέκτημα των εννοιολογικών μαθηματικών συνεπάγεται το εξής:

2. *Είναι ευκολότερο να τα θυμάσαι.* Φαίνεται να υπάρχει ένα παράδοξο εδώ καθώς είναι δυσκολότερο να τα μάθεις. Είναι πολύ ευκολότερο για τους μαθητές να μάθουν ότι "το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι =1/2 της βάσης επί το ύψος" από το να μάθουν γιατί συμβαίνει αυτό. Αλλά έτσι έχουν να μάθουν ξεχωριστούς κανόνες για τρίγωνα, ορθογώνια, παραλληλόγραμμα, τραπέζια· ενώ η εννοιολογική κατανόηση συνίσταται εν μέρει στο να τα δεις όλα αυτά σε σχέση με το εμβαδόν του ορθογωνίου. Είναι ακόμα επιθυμητό να ξέρουμε τους ξεχωριστούς κανόνες· καθένας δε θέλει να τους βγάζει κάθε φορά από την αρχή. Αλλά γνωρίζοντας κάποιος το πώς αλληλοσυνδέονται μπορεί να τούς θυμάται ως μέρη ενός συνεκτικού συνόλου, ευκολότερα. Έχει περισσότερα να μάθει –τις συνδέσεις και τους ξεχωριστούς κανόνες– αλλά το αποτέλεσμα, από τη στιγμή που τα μαθαίνει, είναι μεγαλύτερης διάρκειας. Έτσι έχει να μάθει λιγότερες περιπτώσεις, και μακροπρόθεσμα ο χρόνος που χρειάστηκε μπορεί να είναι λιγότερος συνολικά.

Η διδασκαλία για εννοιολογική κατανόηση μπορεί επίσης να εμπλέκει περισσότερο πραγματικό περιεχόμενο. Προηγουμένως, μια εργαλειακή εξήγηση παρατέθηκε οδηγώντας στην πρόταση «Μήκος κύκλου =πd». Για την εννοιολογική κατανόησή της, η ιδέα της αναλογίας έπρεπε να διδαχτεί πρώτα (ανάμεσα σε άλλες) και αυτό θα χρειαζόταν περισσότερη δουλειά από τη διδασκαλία των κανόνων απλώς όπως δόθηκαν. Αλλά η έννοια της αναλογικότητας είναι τέτοιας εφαρμοσιμότητας που είναι πολύτιμη διδασκαλία και για αυτούς τους λόγους επίσης. Στην εννοιολογική διδασκαλία αυτό συμβαίνει μάλλον συχνά. Ιδέες που απαιτούνται για την κατανόηση ενός ειδικού θέματος αποδεικνύονται βασικές για την κατανόηση πολλών άλλων θεμάτων επίσης. Σύνολα, απεικονίσεις και ισοδυναμίες είναι τέτοιες ιδέες. Ατυχώς τα οφέλη τα οποία θα μπορούσαν να προκύψουν απο τη διδασκαλία τους συχνά χάνονται καθώς διδάσκονται ως ξεχωριστά θέματα περισσότερο παρά ως στοιχειώδεις έννοιες με τις οποίες διασυνδέονται όλες οι περιοχές των μαθηματικών.

3. *Η εννοιολογική γνώση μπορεί να είναι αποτελεσματική ως αυτοσκοπός.* Αυτό είναι ένα εμπειρικό γεγονός βασισμένο σε μαρτυρία από ελεγμένα πειράματα χρησιμοποιώντας μη μαθηματικά υλικά. Η ανάγκη για εξωτερικές ανταμοιβές και τιμωρίες είναι κατά πολύ μειωμένη, κάνοντας αυτό που συχνά καλείται «παρακινητική» πλευρά τής δουλειάς ενός δασκάλου πολύ ευκολότερη. Αυτό σχετίζεται με:

4. *Τα εννοιολογικά σχήματα είναι συστηματοποιημένα κατά την ποιότητα.* Αυτός είναι ο καλλίτερος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσα να διατυπώσω μια ιδιότητα σύμφωνα με την οποίο φαίνεται να εξυπηρετούν την ίδια τους την ανάπτυξη. Η σύνδεση με το 3 συνίσταται στο ότι, αν οι μαθητές παίρνουν ικανοποίηση από τη εννοιολογική κατανόηση, μπορεί να μην προσπαθούν μόνο να καταλάβουν εννοιολογικά καινούργια πράγματα που τους παρατίθενται, αλλά και ενεργητικά να αναζητούν νέα πράγματα και να εξερευνούν νέες περιοχές, σχεδόν με τον ίδιο

τρόπο που ένα δένδρο εκτείνει τις ρίζες τους ή ένα ζώο εξερευνά νέα γη για ανεύρεση τροφής. Το να αναπτύξουμε αυτή την ιδέα πέρα από το επίπεδο μιας αναλογίας είναι πέρα από το στόχο της παρούσης εργασίας, αλλά είναι πολύ σημαντικό για να το παραλείψουμε.

Εαν τα παραπάνω είναι μια αμερόληπτη παρουσίαση των επιχειρημάτων των δύο πλευρών, θα μπορούσε να κάνει φανερό ότι, παρ' ότι θα μπορούσε να υπάρχει ένα επιχείρημα υπέρ των εργαλειακών μαθηματικών βραχυπρόθεσμα και μέσα σε ένα περιορισμένο πλαίσιο, μακροπρόθεσμα και στο πλαίσιο της συνολικής εκπαίδευσης των παιδιών δεν υπάρχει τέτοιο επιχείρημα; Τότε γιατί τόσα παιδιά διδάσκονται μόνο εργαλειακά μαθηματικά κατά τη διάρκεια της σχολικής τους ζωής; Αν και δεν μπορούμε να απαντήσουμε σ' αυτό υπάρχει μια μικρή ελπίδα να το βελτιώσουμε.

Ένας συγκεκριμένος δάσκαλος θα μπορούσε να κάνει μια αιτιολογημένη επιλογή να διδάξει με στόχο την εργαλειακή κατανόηση κάτω από ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω σκεπτικά:

1. Ότι η εννοιολογική κατανόηση χρειάζεται πολύ χρόνο για να επιτευχθεί, και όλοι οι μαθητές είναι πιθανόν να πρέπει να είναι ικανοί να χρησιμοποιούν μια συγκεκριμένη τεχνική.

2. Ότι η εννοιολογική κατανόηση ενός συγκεκριμένου θέματος είναι πολύ δύσκολη, αλλά οι μαθητές τη χρειάζονται για λόγους εξετάσεων.

3. Ότι μια δεξιότητα χρειάζεται για να χρησιμοποιηθεί σε ένα άλλο θέμα (π.χ. φυσικές επιστήμες) προτού να μπορεί να κατανοηθεί εννοιολογικά με τα παρόντα διαθέσιμα σχήματα των μαθητών.

4. Ότι κάποιος είναι νέος δάσκαλος σ' ένα σχολείο και όλοι οι άλλοι διδάσκουν εργαλειακά.

Όλα αυτά συνεπάγονται, σύμφωνα με τη φράση «κάνε μια αιτιολογημένη επιλογή» ότι είναι ικανός να εξετάσει τους εναλλακτικούς σκοπούς της εργαλειακής και εννοιολογικής κατανόησης με τα πλεονεκτήματά τους και σε σχέση με μια συγκεκριμένη κατάσταση. Το να κάνει μια συνειδητή επιλογή αυτού του τύπου συνεπάγεται συναίσθηση της διάκρισης και εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών αυτών καθεαυτών. Έτσι καμμιά άλλη κατανόηση εκτός από την εννοιολογική δε μπορεί να είναι κατάλληλη για ένα δάσκαλο. Παρατηρείται ωστόσο το γεγονός ότι αυτό το στοιχείο απουσιάζει από πολλούς που διδάσκουν μαθηματικά· αν όχι από τους περισσότερους.

Στους περιστασιακούς παράγοντες που συντελούν στη δυσκολία συμπεριλαμβάνονται:

1. *Η ψυχρολουσία των εξετάσεων.* Από τη σκοπιά της σπουδαιότητας των εξετάσεων για τη μελλοντική απασχόληση, μετά βίας μπορούμε να κατηγορήσουμε τους μαθητές, αν η επιτυχία σ' αυτές είναι ένας από τους κύριους σκοπούς τους. Ο τρόπος που οι μαθητές εργάζονται δεν επιτρέπεται αλλά συμβαίνει ωστόσο να επηρεάζεται από το σκοπό για τον οποίο εργάζονται, ο

οποίος είναι να απαντήσουν σωστά σε έναν επαρκή αριθμό ερωτήσεων.

2. *Υπερφορτωμένα αναλυτικά προγράμματα.* Μέρος της δυσκολίας είναι η υψηλή συμπύκνωση του περιεχομένου των πληροφοριών των μαθηματικών. Μια μαθηματική κατάσταση μπορεί να συμπυκνώνεται τόσο σε μια μόνο γραμμή όσο και σε περισσότερες από μια, δυό παραγράφους σε ένα άλλο αντικείμενο.Οι μαθηματικοί συνηθίζουν να χειρίζονται τέτοιες συμπυκνωμένες ιδέες (πράγμα το οποίο εξηγεί γιατί οι μαθηματικές διαλέξεις πάνε τόσο γρήγορα). Οι μη μαθηματικοί δεν το αντιλαμβάνονται αυτό καθόλου. Οπωσδήποτε και αν έχουν τα πράγματα, σχεδόν όλα τα προγράμματα θα ήταν πολύ καλλίτερα αν μειωνόταν η ποσότητα και υπήρχε χρόνος για να διδαχτούν καλλίτερα.

3. *Δυσκολία στον προσδιορισμό του αν ένα άτομο καταλαβαίνει εννοιολογικά ή εργαλειακά.* Από το βαθμό σε ένα διαγώνισμα, είναι πολύ δύσκολο να βγάλεις ένα ουσιαστικό συμπέρασμα για τις νοητικές διαδικασίες μέσω των οποίων κάποιος μαθητής έχει οδηγηθεί να κάνει αυτά που κάνει. Για αυτό το λόγο υπάρχει και η δυσκολία των προφορικών εξετάσεων στα μαθηματικά. Σε μια διδακτική κατάσταση, η συζήτηση με τους μαθητές είναι σχεδόν σίγουρα ο καλλίτερος τρόπος να το ανακαλύψει κανείς, αλλά σε μια τάξη άνω των 30 μαθητών ίσως είναι δύσκολο να βρει κανείς το χρόνο.

4. *Η μεγάλη ψυχολογική δυσκολία των δασκάλων να αναπροσαρμόσουν (να ανακατασκευάσουν) τα ήδη υπάρχοντα και επί μακρόν χρόνο σχήματά τους.*

Από ένα πρόσφατο άρθρο που πραγματευόταν την πρακτική, διανοητική και πολιτισμική αξία της μαθηματικής εκπαίδευσης (και δεν έχω καμμία αμφιβολία ότι εννοεί εννοιολογικά μαθηματικά!) από τον Sir Hermann Bondi, παίρνω αυτές τις τρεις παραγράφους. (Στο πρωτότυπο δεν ακολουθούν η μια την άλλη.)

Μέχρις εδώ η ενθουσιώδης μου συνεισφορά στα μαθηματικά έχει παραλείψει ένα ζωτικό σημείο: μια άρνηση για τα μαθηματικά από τόσους πολλούς, μια άρνηση που σε όχι λίγες περιπτώσεις καταλήγει σε άθλιο φόβο.

Η αρνητική στάση για τα μαθηματικά, ατυχώς τόσο συνηθισμένη ακόμα και ανάμεσα σε ανθρώπους υψηλής μόρφωσης, είναι σίγουρα το μεγαλύτερο μέτρο για την αποτυχία μας και ένας μεγάλος κίνδυνος για την κοινωνία μας.

Αυτό είναι πιθανώς η σαφέστερη ένδειξη ότι κάτι σ' αυτή την κατάσταση είναι λάθος και μάλιστα πολύ λάθος. Δεν είναι σκληρό να καταλογισθούν ευθύνες στην εκπαίδευση τουλάχιστον εν μέρει, είναι σκληρότερο να επισημαίνουμε την ευθύνη, και ακόμα πιο δύσκολο να προτείνουμε θεραπείες.

Αν αντικαταστήσουμε την «ευθύνη» με την «αιτία», υπάρχει μικρότερη αμφιβολία ότι η ευρέως διαδεδομένη αποτυχία της διδασκαλίας εννοιολογικών μαθηματικών —μια αποτυχία που συναντάται στην πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και περαιτέρω βαθμίδα εκπαίδευσης και εξίσου στα "σύγχρονα" όπως και στα "παραδοσιακά" προγράμματα μπορεί να αναγνωριστεί ως μια βασική αιτία. Το να προτείνουμε νέες θεραπείες είναι πράγματι δύσκολο, αλλά ίσως υπάρχει η ελπίδα ότι η διάγνωση είναι ένα καλό βήμα προς τη θεραπεία. Ένα άλλο βήμα θα προσφερθεί στην επόμενη ενότητα.

Μια θεωρητική διατύπωση

Δεν υπάρχει τίποτα τόσο ισχυρό για να κατευθύνει τις πράξεις κάποιου σε μια σύνθετη κατάσταση και για να συντονίζει τις προσπάθειές του με εκείνες άλλων, όσο μια καλή θεωρία. Όλοι οι καλοί δάσκαλοι οικοδομούν τα δικά τους εφόδια εμπειρικής γνώσης και έχουν εξαγάγει από αυτά κάποιες γενικές αρχές στις οποίες στηρίζονται και οι οποίες τους οδηγούν. Αλλά ενώ η γνώση τους είναι σ' αυτή τη μορφή, η γνώση αυτή βρίσκεται σε ατομικό επίπεδο, παραμένει κατά πολύ ακόμα στο διαισθητικό στάδιο, και δεν μπορεί να μεταδοθεί, και γι' αυτό το λόγο και γιατί δεν υπάρχει κανένα εννοιολογικό κατασκευαστικό (σχήμα) κοινό στα άτομα αυτά. Αν ήταν αυτό δυνατό, οι ατομικές προσπάθειες θα μπορούσαν να ολοκληρώνονται σ' ένα ενοποιημένο σώμα γνώσης το οποίο θα μπορούσε να είναι διαθέσιμο στη χρήση των νεοεισερχομένων στο επάγγελμα. Επί του παρόντος οι περισσότεροι δάσκαλοι πρέπει να μάθουν από τα δικά τους λάθη.

Για κάποια περίοδο η αντίληψή μου για τη διαφορά ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης που οδήγησε αντίστοιχα σε εννοιολογικά και εργαλειακά μαθηματικά παρέμενε επίσης στο διαισθητικό επίπεδο, αν και ήμουν προσωπικά πεπεισμένος ότι η διαφορά αυτή ήταν μεγάλης σπουδαιότητας, και αυτή την άποψη τη συμμερίζονταν οι περισσότεροι από όσους τη συζητούσα. Η συνειδητοποίηση της ανάγκης για μια σαφή διατύπωση μου ενισχύθηκε μέσα από δύο παράλληλα ερευνητικά προγράμματα και η ιδέα ήρθε πολύ ξαφνικά, κατά τη διάρκεια ενός πρόσφατου συνεδρίου. Όταν αυτό το δει κανείς διατυπωμένο φαίνεται αρκετά απλό, και αναρωτιέται γιατί δεν το είχα σκεφτεί νωρίτερα. Αλλά υπάρχουν δύο είδη απλότητας: αυτή της αφελότητας και εκείνη η οποία, διεισδύοντας πέρα από επιφανειακές διαφορές, φέρει την απλότητα με την ενοποίηση. Είναι το δεύτερο είδος που έχει κάτι να προσφέρει μια καλή θεωρία (και είναι δυσκολότερο να επιτευχθεί, ωστόσο). Είναι απαραίτητο να ξεκινήσουμε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Όταν πρωτοπήγα να μείνω σε μια συγκεκριμένη πόλη, έμαθα γρήγορα διάφορες συγκεκριμένες διαδρομές. Έμαθα να πηγαίνω από εκεί που έμενα στο γραφείο του κολεγίου, στο οποίο εργαζόμουν, από κει που έμενα στην τραπεζαρία όπου έτρωγα, από το γραφείο του φίλου μου στην τραπεζαρία και άλλα δύο ή τρία μέρη. Με δυο λόγια έμαθα έναν περιορισμένο αριθμό σταθερών σχεδίων, με τα οποία θα μπορούσα να πηγαίνω από συγκεκριμένα αρχικά μέρη σε συγκεκριμένα τελικά.

Στην πρώτη ευκαιρία που είχα κάποιο ελεύθερο χρόνο, άρχισα να εξερευνώ την πόλη. Τώρα δεν ήθελα να πάω κάπου συγκεκριμένα, αλλά να μάθω γύρω από το δρόμο μου και η διαδικασία να δω τι μπορεί να προκύψει από αυτό ήταν ενδιαφέρουσα. Σ' αυτό το στάδιο ο σκοπός μου ήταν διαφορετικός: να κατασκευάσω ένα γνωστό χάρτη της πόλης.

Αυτές οι δυο δραστηριότητες είναι αρκετά διαφορετικές. Σίγουρα ήταν δύσκολο να μπορούν να διακριθούν από έναν εξωτερικό παρατηρητή. Οποιοσδήποτε με έβλεπε να περπατάω από το Α στο Β θα δυσκολευόταν να καταλάβει (χωρίς να με ρωτήσει) τι από τα δύο έκανα. Αλλά το πιο σημαντικό πράγμα για μια δραστηριότητα είναι ο σκοπός της. Στη μια περίπτωση ο σκοπός μου ήταν να πάω στο Β, που είναι μια φυσική τοποθεσία. Στην άλλη ήταν να διευρύνω ή να ενοποιήσω το νοητό χάρτη της πόλης, που είναι μια κατάσταση γνώσης. Ένα άτομο με μια σειρά σταθερών (αμετάβλητων) σχεδίων μπορεί να βρει το δρόμο του από ένα πλήθος σημείων εκκίνησης σε ένα πλήθος στόχων. Το χαρακτηριστικό ενός σχεδίου είναι ότι του λέει τι να κάνει σε κάθε σημείο επιλογής: στρίψε δεξιά έξω από την πόρτα, πήγαινε ευθεία περνώντας την εκκλησία, κλπ. Δηλαδή, αν κάνει λάθος σε κάποιο στάδιο, μπορεί να χαθεί και θα παραμείνει χαμένος, αν δεν είναι ικανός να ξαναγυρίσει πίσω (από τον ίδιο δρόμο) και να επιστρέψει στο σωστό μονοπάτι.

Αντίθετα ένα άτομο με νοητό χάρτη της πόλης έχει κάτι από το οποίο μπορεί να παραγάγει, όταν χρειάζεται, ένα σχεδόν άπειρο αριθμό σχεδίων, με τα οποία μπορεί να οδηγήσει τα βήματά του από ένα αρχικό σημείο σε οποιοδήποτε τελικό, εξασφαλίζοντας απλά και μόνο ότι και τα δύο μπορεί να τα φανταστεί στο νοητό χάρτη. Και αν πάρει μια λάθος στροφή, θα ξέρει ακόμα που είναι, και ως εκ τούτου θα είναι σε θέση να διορθώσει το λάθος του χωρίς να χαθεί, ακόμα ίσως να μάθει κιόλας από αυτό.

Η αναλογία ανάμεσα στα προηγούμενα και την εκμάθηση των μαθηματικών είναι μεγάλη. Το είδος της μάθησης που οδηγεί σε εργαλειακά μαθηματικά συνίσταται σε εκμάθηση ενός αυξανόμενου αριθμού καθορισμένων σχεδίων, με τα οποία οι μαθητές μπορούν να βρουν το δρόμο τους από συγκεκριμένα σημεία εκκίνησης (τα δεδομένα) σε απαιτούμενα τελικά σημεία (οι απαντήσεις στις ερωτήσεις). Το σχέδιο λέει τι να κάνουν σε κάθε σημείο επιλογής, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Και όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αυτό που πρέπει να γίνει μετά είναι καθορισμένο απολύτως από την τοπική κατάσταση. (Όταν δεις το ταχυδρομείο, στρίψε αριστερά. Όταν βγάλεις τις παρενθέσεις, κάνε αναγωγή οποίων όρων). Δεν υπάρχει συναίσθηση της συλλογικής σχέσης ανάμεσα στα διαδοχικά στάδια και τον τελικό σκοπό. Και στις δυο περιπτώσεις, αυτό που μαθαίνει εξαρτάται από εξωτερική καθοδήγηση για την εκμάθηση κάθε νέου δρόμου για «να πάει εκεί».

Αντίθετα η εκμάθηση των εννοιολογικών μαθηματικών συνίσταται σε οικοδόμηση μιας εννοιολογικής δομής (σχήμα) από το οποίο ο κάτοχος της (κατ' αρχήν) παράγει έναν απεριόριστο αριθμό μετάβασης από ένα αρχικό σημείο σε ένα τελικό. (Λέω «κατ' αρχήν» γιατί φυσικά κάποια από αυτά τα μονοπάτια θα είναι πολύ πιο δύσκολο να κατασκευαστούν από ότι άλλα).

Αυτό το είδος εκμάθησης είναι ποικιλοτρόπως διαφορετικό από την εργαλειακή εκμάθηση

1.Ο τρόπος γίνεται ανεξάρτητος, ως εκ τούτου, των συγκεκριμένων τερμάτων.

2.Η οικοδόμηση ενός σχήματος μέσα σε μια δεδομένη περιοχή γνώσης γίνεται ουσιαστικά πειστικός σκοπός αφ' εαυτός.

3.Όσο πληρέστερο είναι το σχήμα ενός μαθητή, τόσο μεγαλύτερη ή αίσθηση αυτοπεποίθησης στις δικές του ικανότητες να βρει νέους τρόπους για «να πάει εκεί» χωρίς εξωτερική βοήθεια.

4.Αλλά ένα σχήμα δεν είναι ποτέ πλήρες. Όπως μεγαλώνουν τα σχήματά μας, έτσι μεγαλώνει και η συναίσθησή μας για τις δυνατότητές τους. Η διαδικασία συχνά συνεχίζεται από μόνη της και (βάσει της 3) αυτοαμειβόμενη.

Παίρνοντας πάλι για μια στιγμή το ρόλο του συνηγόρου του διαβόλου είναι σωστό να ρωτήσω αν πράγματι μιλάμε για δύο αντικείμενα, τα εννοιολογικά και τα εργαλειακά μαθηματικά, ή για την ακρίβεια για δυο τρόπους σκέψεις γύρω από το ίδιο θέμα. Χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη αναλογία, οι δυο διαδικασίες που περιγράφτηκαν θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως δύο διαφορετικοί τρόποι γνώσης για την ίδια πόλη, και στην οποία περίπτωση αυτή η διάκριση που έγινε ανάμεσα σε εννοιολογική και εργαλειακή κατανόηση θα μπορούμε να είναι έγκυρη, αλλά όχι και η διάκριση ανάμεσα σε εννοιολογικά και εργαλειακά μαθηματικά.

Αλλά το τι συνιστά τα μαθηματικά δεν είναι το περιεχόμενο της ύλης, αλλά ένα συγκεκριμένο είδος γνώσης γύρω από αυτά. Το περιεχόμενο της ύλης των εννοιολογικών και εργαλειακών μαθηματικών θα μπορούμε να είναι το ίδιο: αυτοκίνητα που ταξιδεύουν με ομαλές ταχύτητες ανάμεσα σε δύο πόλεις, πύργοι των οποίων πρέπει να βρεθούν τα ύψη, σώματα που πέφτουν με ελεύθερη πτώση, κλπ. Αλλά τα δύο είδη γνώσεων είναι τόσο διαφορετικά που νομίζω ότι υπάρχει ένα ισχυρό επιχείρημα να τα θεωρήσουμε ως διαφορετικά είδη μαθηματικών. Εάν είναι αποδεκτή αυτή η διάκριση, τότε η λέξη «μαθηματικά» είναι για πολλά παιδιά πράγματι ένας *ψεύτικος φίλος*, με το κόστος που αυτό συνεπάγεται.

Εν κατακλείδι ...

Αυτό είναι ήδη ένα μεγάλο άρθρο, αν και αφήνει ακόμα πολλά σημεία που περιμένουν περαιτέρω ανάπτυξη. Οι εφαρμογές της θεωρητικής διατύπωσης στην τελευταία ενότητα στα εκπαιδευτικά προβλήματα που περιγράφτηκαν στις δύο πρώτες ενότητες δεν έχουν εξηγηθεί καλά. Ένα από αυτά είναι η σχέση ανάμεσα στους σκοπούς του δασκάλου και του μαθητή. Ένα άλλο είναι οι συνέπειες για ένα αναλυτικό πρόγραμμα.

Στην πορεία της συζήτησης αυτών των ιδεών με τους εκπαιδευτικούς, όλων των βαθμίδων, της μαθηματικής εκπαίδευσης, ένας αριθμός από άλλα ενδιαφέροντα σημεία έχει εμφανιστεί και ο οποίος Δε μπορεί να εξερευνηθεί περαιτέρω εδώ. Ένα από αυτά είναι εάν ο όρος «μαθηματικά» δεν πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο για εννοιολογικά μαθηματικά. Συμπαθώ περισσότερο αυτή την άποψη, αλλά το θέμα δεν είναι τόσο απλό όσο εμφανίζεται.

Υπάρχει επίσης μια έρευνα σε εξέλιξη. Μια πιλοτική μελέτη που στόχευε στην ανάπτυξη μιας μεθόδου (ή μεθόδων) για την αξιολόγηση της ποιότητας της μαθηματικής σκέψης των παιδιών έχει τελειώσει και έχει οδηγήσει σε μια πιο ουσιαστική μελέτη σε συνεργασία με το N.F.E.R. ως μέρος του διαρκούς TAMS προγράμματος (project). Μια υψηλότερης βαθμίδας διατριβή στο Πανεπιστήμιο του Warwick σχεδόν τελειώνει, και μια ερευνητική ομάδα του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Quebec στο Montreal ερευνά το πρόβλημα με παιδιά πρώτης και τετάρτης τάξης. Όλα αυτά ελπίζω θα αναφερθούν σε κατάλληλη στιγμή.

Ο σκοπός της παρούσης εργασίας είναι διττός. Πρώτο να κάνει σαφές το πρόβλημα σε ένα εμπειρικό επίπεδο σκέψης και ως εκ τούτου να φέρει στην πρώτη γραμμή του ενδιαφέροντος αυτό που πολλοί από μας έχουμε εδώ και πολύ καιρό στο πίσω μέρος του μυαλού μας. Δεύτερο, να το διατυπώσουμε με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να συσχετιστεί με την υπάρχουσα θεωρητική γνώση γύρω από τη διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών, και την περαιτέρω διερεύνηση σ' αυτό το επίπεδο με τη δύναμη και τη γενικότητα που η θεωρία από μόνη της μπορεί να εξασφαλίσει.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. R.R Skemp: Understanding Mathematics (U.L.P.)
2. R.R. Skemp: The Psychology of Learning Mathematics (Penguin 1972) pp. 43–46.
3. H Bondi: The Danger of Rejecting Mathematics (Times Higher Education Supplement, 26.3.76)